Klausur

Komplexitätstheorie

(Blockkurs 22.3. - 4.4.2016)

Darmstadt, 9.4.2016

Bitte tragen Sie Ihren Namen und Vornamen auch auf allen folgenden Blättern ein.

Name, Vorname

Matrikelnummer

Gewählte 8 Aufgaben (bitte ankreuzen): 1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [ ]

Zu erreichende Punkte: 80

Summe erzielter Punkte:

Name, Vorname

Aufgabe 1. [O-Notation, 3+3+4 Punkte]

a) Zeigen Sie $3n^3+2n^2-n+4 = O(n^3)$, in dem Sie ein $c > 0$ und ein n_0 aus IN angeben, so dass für alle $n>n_0$ gilt $3n^3+2n^2-n+4 < cn^3$.

b) Zeigen Sie $4n \ln n = O(n^2)$ durch Betrachtung des Grenzwertes von $4n \ln n/n^2$.

c) Zeigen Sie $3 \ln n + 5 = O(\sqrt{n})$ durch Anwendung der Regel von L'Hospital.

Lösung:

Name, Vorname

Aufgabe 2. [Entscheidbarkeit, 2+6+2 Punkte]

a) Geben Sie die Reduktionskette zum Beweis der Unentscheidbarkeit des postschen Korrespondenzproblems (PKP) an.

b) Geben Sie die Übergangstabelle einer Turingmaschine an, die entscheidet, ob ein Eingabewort w aus {0,1}* ein Palindrom ist (z.B. 111, 0110, 11101000010111 sind Palindrome).

c) Ist die Sprache der Palindrome regulär und/oder kontextfrei?

Lösung:

Name, Vorname

Aufgabe 3. [Polynomielle Reduktionen, 10 Punkte]

Welche der folgenden in der Vorlesung vorgestellten polynomiellen Reduktion benutzt das Prinzip der "lokalen Ersetzung" (L), welche das Prinzip der "verbundenen Komponenten" (V), welche das Prinzip “Generalisierung” (G)?
Bitte tragen Sie die Buchstaben L, V bzw. G ein.

- SAT <_p 3SAT [ ]

- 3SAT <_p DHC [ ]

- DHC <_p HC [ ]

- 3SAT <_p KP* [ ]

- 3SAT <_p CLIQUE [ ]

- NP <_p BPP [ ]

- KP* <_p NP [ ]

- KP* <_p KP [ ]

- HC <_p CLIQUE [ ]

- SAT <_p SAT* [ ]

Name, Vorname

Aufgabe 4. [NP Vollständigkeit, 10 Punkte]

Zeigen Sie: Das Problem *Independent Set* (IS) ist NP-vollständig.

Das Problem IS ist dabei wie folgt definiert.

Gegeben: Graph G mit Knotenmenge V und Kantenmenge E.
Gesucht: Auswahl von Knoten V' aus V, so dass für alle Knoten u und v aus V' gilt:
Die Kante (u,v) liegt nicht in E

Nutzen Sie eine polynomielle Reduktion auf das Problem CLIQUE.

Lösung:

Name, Vorname

Aufgabe 5. [Probabilistische Algorithmen und die polynomielle Hierarchie, 3 + 3 + 4 Punkte]

Listen Sie alle Ihnen bekannten Teilmengenbeziehungen von

a) NP, coNP, BPP, ZPP, PP, RP, coRP

b) P, PSPACE, NPSPACE, Σ_1 := NP, Π_1 := co-NP, Σ_{k+1} := NP (Σ_k) für $k \geq 1$, Π_{k+1} := co-Σ_{k+1} für $k \geq 1$.

auf (Pfeildiagramme reichen, Transitivität wird vorausgesetzt).

c) Was passiert bei $\Sigma_k = \Pi_k$, und was bei $\Sigma_{k+1} = \Sigma_k$?

Lösung:

Name, Vorname

Aufgabe 6. [Approximationsalgorithmen, 2 + 2 + 3 + 3 Punkte]

a) Wie sind bei Approximationsalgorithmen (o.B.d.A für Maximierungsprobleme) der Wert R_A und der Wert R_{MIN} definiert?

b) Geben Sie die aus der Vorlesung und Übung erzielten konstanten Approximationsgüten R_A für KP, BPP, VC, CLIQUE, MAX3SAT und METRIC-TSP an.

c) Geben Sie (unter der Voraussetzung P <> NP) Ihnen bekannte Grenzen für die Approximationsgüte für KP, BPP, VC, CLIQUE, MAX3SAT und TSP an.

d) Geben Sie (unter der Voraussetzung P <> NP) des Weiteren an, ob eines der Probleme KP, BPP, VC, CLIQUE, MAX3SAT oder TSP einen pseudopolynomiellen Algorithmus oder ein (voll) polynomielles Approximationsschema hat.

Lösung:

Name, Vorname

Aufgabe 7. [Speicherplatzklassen 2 + 4 + 2 + 2]

a) Wie lautet der Satz von Savitch?

b) Folgern Sie daraus PSPACE = NPSPACE?

c) Gilt NSPACE(n) = co-NSPACE(n)?

d) Gilt DSPACE(n) = NSPACE(n)?

Lösung:

Name, Vorname

Aufgabe 8. [PCP-Theorie, 4 + 3 +3 Punkte]

a) Wie lautet das PCP-Theorem und was besagt es?

b) Welche Ihnen bekannte Komplexitätsklassen verbergen sich hinter PCP(poly(n),poly(n)), PCP(poly(n),0), PCP(log n, n^3)?

c) Nennen Sie eine Konsequenz aus dem PCP-Theorem.

Lösung:

Name, Vorname

Aufgabe 9. [Orakelklassen und lineare Reduktionen, 8 + 2 Punkte]

Die konvexe Hülle CONH ist das geometrische Problem für eine Menge R von Paaren R= $(x_1,y_1),....,(x_n,y_n)$ aus IR^2 für alle i aus {1,...,n} díejenigen Paare (x_i,y_i) zu filtern, die auf dem Rand (nicht im Inneren) der von $(x_1,y_1),....,(x_n,y_n)$ beschriebenen Fläche liegen. Diese Punkte auf der konvexen Hülle werden im Uhrzeigersinn ausgegeben.

a) Zeigen Sie: Das Sortierproblem SORT (mit Eingabe $(a_1,...,a_n)$) ist linear auf CONH reduzierbar. Hinweis: Nutzen Sie die Parabel der Funktion $f(x) = x^2$, um die Werte $(a_i,(a_i)^2)$ in ein Koordinatensystem einzutragen.

b) Für das Sortierproblem SORT existiert bewiesenermaßen kein Linerarzeitalgorithmus. Was können sie daraus für CONH schließen?

Lösung:

Name, Vorname

Aufgabe 10. [P- und #P-Vollständigkeit, 2+2+2+2+2 Punkte]

a) Welche beiden Reduktionskonzepte werden für den Nachweis der P- bzw. der #P-Vollständigkeit genutzt?

b) Wie sind die P-Vollständigkeit und die #P-Vollständigkeit definiert?

c) Welches Problem wurde als P vollständig nachgewiesen und welches NP-Vollständigkeitsresultat stand Pate für den Beweis?

d) Wie wird das Perfektes-Matching- oder Heiratsproblem (#PM) auf die Matrix-Permanente perm *abgebildet und was ist* perm*(M) mod 2?*

e) Warum ist das Resultat "#PM ist #P-vollständig" überraschender als das Ergebnis "#SAT ist #P-vollständig"?

Lösung: