Strutture geometriche su gruppi di Lie

Simon Salamon

Conferenze tenute alla Scuola Normale, Pisa

04/10/01	Algebre di Lie e forme differenziali
11/10/01	Nilvarietà e strutture complesse
18/10/01	Metriche riemanniane
25/10/01	Forme chiuse
08/11/01	Altre applicazioni geometriche

§1 Algebre di Lie e forme differenziali

1. Definizioni e Esempi

Definizione. Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale V (di solito su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) dotato di un'applicazione

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ (u,v) & \mapsto & [u,v] \end{array}$$

tale che

(i) $[u,v] = -[v,u]$;

(ii) $[au+bv,\ w] = a[u,w] + b[v,w]$, $a,b \in \mathbb{R}$;

(iii) $[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$.

In parole, il 'bracket' è bilineare, antisimmetrico, soddisfa l'identità di Jacobi.

Esempi. (i) $V = \mathbb{R}^n$ con $[u,v] = 0\ \forall u,v$. Indichiamo quest'algebra 'abeliana' con $\mathfrak{a}_n$.

(ii) $V = \mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ con $[e_1,e_2] = e_2$, indicato $\mathfrak{f}_2$. Quest'unica relazione determina il bracket che, rispetto all base scelta, corrisponde alla matrice di vettori $\begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ -e_2 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Qualsiasi algebra A associativa diventa un'algebra di Lie con bracket $[u,v] = uv - vu$. Questo è vero in particolare per l'insieme delle matrici $n \times n$, l'algebra che risulta viene indicata $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. C'è ad esempio un'inclusione

$$\mathfrak{f}_2 \subset \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) \quad \text{con} \quad e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) $V = \mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ con $[u,v] = u \wedge v$ il prodotto vettoriale.

(v) Nell'esempio precedente, si ponga $\tilde{e}_1 = \lambda e_1$, $\tilde{e}_2 = \lambda e_2$, $\tilde{e}_3 = \lambda^2 e_3$, quindi

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = \tilde{e}_3, \quad [\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] = \lambda^2 \tilde{e}_3, \quad [\tilde{e}_3, \tilde{e}_1] = \lambda^2 \tilde{e}_2.$$

Lasciando $\lambda \to 0$, otteniamo l'algebra di Heisenberg $\mathfrak{h}_3$.

2. La derivata esterna

Sia V uno spazio vettoriale reale. Il suo duale V^* è lo spazio di tutti le applicazioni lineari $V \to \mathbb{R}$. Possiamo definire

$$\textstyle\bigwedge^2 V^* = \{\text{applicazioni bilineari antisimmetriche } \beta : V \times V \to \mathbb{R}\}.$$

Questo spazio ammette come base $\{e^{ij} : i < j\}$ dove $e^{ij} = e^i \wedge e^j = e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i$, con la convenzione che (ad eesmpio)

$$e^{ij}(e_1, e_2) = 1 \quad \text{se} \quad 1 = i,\ 2 = j.$$

Inoltre

$$\bigwedge^k V^* = \{\text{applicazioni moltilineari alternanti } \gamma : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}\},$$

in cui la condizione alternante vuol dire che il valore di $\gamma(v_1, \ldots, v_k)$ cambia segno se qualsiasi due vettori v_i, v_j $(i \neq j)$ sono scambiati.

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Si definisca un'applicazione lineare

$$d : V^* \to \bigwedge^2 V^*$$
$$d\alpha(u, v) = -\alpha[u, v].$$

Una tale applicazione si estende in modo unico ad un'applicazione

$$d : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k+1} V^*$$

che soddisfa la legge

$$d(\beta \wedge \gamma) = d\beta \wedge \gamma + (-1)^k \beta \wedge d\gamma, \quad \beta \in \bigwedge^k \mathfrak{g}^*,\ \gamma \in \bigwedge^\ell \mathfrak{g}^*.$$

Proposizione. $d^2 = 0$.

Dimostrazione. Sia $\alpha \in V^*$. Si considerino

$$\begin{array}{ccccc} V^* & \to & \bigwedge^2 V^* & \to & \bigwedge^3 V^* \\ \alpha & & d\alpha & & dd\alpha \end{array}$$

Basta verificare che $dd\alpha = 0$ con $d\alpha = \beta \wedge \gamma$ (in generale $d\alpha$ sarà una combinazione lineare di tali prodotti semplici). Allora

$$\begin{aligned} \alpha([[u,v],w]) &= -d\alpha([[u,v],w]) \\ &= -\beta \wedge \gamma([u,v],w]) \\ &= -\beta([u,v])\gamma(w) + \gamma([u,v])\beta(w) \\ &= d\beta(u,v)\gamma(w) - d\gamma(u,v)\beta(w). \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} 0 = \alpha([[u,v],w] + [[v,u],w] + [[w,u],v]) &= (d\beta \wedge \gamma - d\gamma \wedge \beta)(u,v,w) \\ &= d(\beta \wedge \gamma)(u,v,w) \end{aligned}$$

e $dd\alpha = 0$. $\square$

Esempio e esercizio. Se $\mathfrak{h}_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, la base duale di $\mathfrak{h}_3^*$ soddisfa

$$\begin{cases} de^1 = 0, \\ de^2 = 0, \\ de^3 = -e^1 \wedge e^2. \end{cases}$$

Determinare $a \in \mathbb{R}$ per cui

$$\begin{cases} de^1 = 0, \\ de^2 = e^{12}, \\ de^3 = e^{13}, \\ de^4 = ae^{14} + be^{23}. \end{cases}$$

è il duale di un'algebra di Lie. Dire in che modo quest'algebra dipende (almeno di isomorfismo) da b.

3. Algebre nilpotenti e risolubili

Sia $V=\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Il sottospazio

$$\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\{[u,v]:u,v\in\mathfrak{g}\}$$

è un'ideale: soddisfa la condizione $[\mathfrak{g}',\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{g}$ analoga a quella che caratterizza un sottogruppo normale.

Si definiscano due serie di sottospazi nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^r&=[\mathfrak{g}^{r-1},\mathfrak{g}^{r-1}], &\qquad \mathfrak{g}^0&=\mathfrak{g};\\ \mathfrak{g}_{(r)}&=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_{(r-1)}], &\qquad \mathfrak{g}_{(0)}&=\mathfrak{g}.\end{aligned}$$

Si osservi che $\mathfrak{g}^1=\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}_{(1)}$.

Definizioni.

$\mathfrak{g}$ è risolubile se $\mathfrak{g}^k=0$ per qualche k,

$\mathfrak{g}$ è nilpotente se $\mathfrak{g}_{(k)}=0$ per qualche k.

Nel secondo caso, $\mathfrak{g}$ è 'k-step' se inoltre $\mathfrak{g}_{(k-1)}\neq 0$.

L'inclusione $\mathfrak{g}^r\subseteq\mathfrak{g}_{(r)}$ implica che

$$\mathfrak{g}^{r+1}=[\mathfrak{g}^r,\mathfrak{g}^r]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_{(r)}]=\mathfrak{g}_{(r+1)},$$

quindi vale per ogni r. Come conseguenza, nilpotente$\Rightarrow$risolubile.

Come esempi: $\mathfrak{h}_3$ è nilpotente; $\mathfrak{f}_2$ è risolubile ma non nilpotente; $\mathfrak{su}(2)$ è semplice (non contiene un'ideale non propria).

Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, di definisca

$$\mathfrak{g}^o_{(k)}=\{\alpha\in\mathfrak{g}^*:\alpha(u)=0\ \forall u\in\mathfrak{g}_{(k)}\}.$$

Allora $\mathfrak{g}^o_{(0)}=\mathfrak{g}^0=\{0\}$ e

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^o_{(1)}=(\mathfrak{g}')^o&=\{\alpha\in\mathfrak{g}^*:\alpha[u,v]=0\ \forall u,v\}\\ &=\{\alpha\in\mathfrak{g}^*:d\alpha=0\}\\ &=\ker(d:\mathfrak{g}^*\to\textstyle\bigwedge^2\mathfrak{g}^*).\end{aligned}$$

Lasciamo come esercizio il

Lemma. $\mathfrak{g}^o_{(k)}=\{\alpha\in\mathfrak{g}^*:d\alpha\in\bigwedge^2\mathfrak{g}^o_{(k-1)}\}$.

Tenendo conto della successione $\{0\}\subset\mathfrak{g}^o_{(1)}\subset\mathfrak{g}^o_{(2)}\subset\cdots\subset\mathfrak{g}^*$,

Corollario. $\mathfrak{g}$ è nilpotente se e solo se $\mathfrak{g}^*$ ammette una base $(e^1,\dots,e^n)$ tale che $de^1=0$ e

$$de^k\in\langle e^1,\dots,e^{k-1}\rangle,\quad k\geqslant 1.$$

Esempio. La definizione e le proprietà di un'algebra di Lie 4-dimensionale $\mathfrak{n}_4$ sono date dalla seguente tabella:

$\mathfrak{n}_4$	$\mathfrak{n}_4^*$
	$de^1 = 0$
$[e_1, e_2] = -e_3$	$de^2 = 0$
$[e_1, e_3] = -e_4$	$de^3 = e^{12}$
	$de^4 = e^{23}$
$\mathfrak{g}' = \langle e_3, e_4\rangle$	$\mathfrak{g}^o_{(1)} = \langle e^1, e^2\rangle$
$\mathfrak{g}_{(2)} = \langle e_4\rangle$	$\mathfrak{g}^o_{(2)} = \langle e^1, e^2, e^3\rangle,$
$\mathfrak{g}_{(3)} = \{0\}$	$\mathfrak{g}^o_{(3)} = \mathfrak{g}^*$

4. Gruppi di Lie

Associata ad ogni algebra di Lie di dimensione finita è un gruppo di Lie. Questa corrispondenza è più semplice quando $\mathfrak{g}$ è nilpotente, e la descriviamo nel caso anche più facile con $\mathfrak{g}_{(2)} = 0$. Si ponga

$$u * v = u + v + \tfrac{1}{2}[u, v], \qquad u, v \in \mathfrak{g}.$$

Allora

$$\begin{aligned}(u * v) * w &= u + v + \tfrac{1}{2}[u, v] + w + \tfrac{1}{2}[u + v, w]\\ &= u + v + w + \tfrac{1}{2}([u, v] + [v, w] + [u, w])\\ &= u * (v * w).\end{aligned}$$

Inoltre, $u * 0 = u = 0 * u$ e anche $u * (-u) = 0 = (-u) * u$. In questo modo $\mathfrak{g}$ diventa un gruppo, in generale non abeliano.

Esempio. Usando una base dell'algebra di Heisenberg $\mathfrak{h}_3$ per cui $[e_1, e_2] = e_3$, abbiamo

$$\mathfrak{h}_3 = \{ae_1 + be_2 + ce_3 : a, b, c \in \mathbb{R}\} = \left\{ u = \begin{pmatrix} 0 & a & c\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \right\} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}).$$

Tenendo conto che $u^3 = 0$,

$$e^u = I + u + \tfrac{1}{2}u^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & c + \frac{1}{2}ab\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

da cui segue

$$e^u.e^v = e^{u*v}.$$

Possiamo identificare il gruppo $(\mathbb{R}^3, *)$ con l'insieme

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c'\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} : a, b, c' \in \mathbb{R} \right\}$$

dotato della moltiplicazione di matrici. Più in generale si ha la

Formula [Baker-Campbell-Hausdorff]

$$u * v = u + v + \tfrac{1}{2}[u, v] + \tfrac{1}{12}([u, [u, v]] - [v, [v, u]]) + \cdots$$

Ad esempio,

$$\gamma(t) = e^{tu} = \begin{pmatrix} 1 & ta & tc+\frac{1}{2}t^2ab \\ 0 & 1 & tb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ci sono problemi di convergenza se $\mathfrak{g}$ non è nilpotente.

Associato ad ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$, c'è una varietà differenziabile G, semplicemente connessa, dotata di una struttura di gruppo (in modo che le operazioni del gruppo siano lisce).

$$\mathfrak{g} = T_eG = \{\text{vettori tangenti a } G \text{ nell'identità}\}.$$

$[.\,,.]$ corrisponde al bracket di campi vettoriali invarianti a sinistra.

Esempio. $\mathfrak{f}_2$ è associato al gruppo

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^*,\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

che corrisponde all insieme $\{x \mapsto ax+t\}$ di trasformazioni affini di $\mathbb{R}$.

5. Il gruppo ortogonale

Si consideri

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(3) &= \{ae_1 + be_2 + ce_3 : a,b,c \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}) \\ &= \{U \in M^{3,3}(\mathbb{R}) : U + U^t = 0\}. \end{aligned}$$

Il gruppo $G = O(3)$ associato è generato da $e^U = P$:

$$\begin{aligned} (E^U)^t = (I + U + \tfrac{1}{2}U^2 + \cdots)^t = e^{U^t} = e^{-U} \\ \Rightarrow \quad P^tP = e^U.e^{-U} = e^0 = I. \end{aligned}$$

Quindi

$$O(3) = \{P \in M^{3,3}(\mathbb{R}) : P^tP = I\},$$

gruppo con i seguenti difetti:

(i) $O(3)$ non è connesso a causa del fatto che $\det P = \pm 1$. Infatti,

$$SO(3) = \{P \in O(3) : \det P = 1\}$$

è un sottogruppo normale di $O(3)$.

(ii) Sia $\Delta = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| \leqslant 1\}$. Vedremo che $SO(3)$ è omeomorfo al quoziente topologico

$$\widetilde{\Delta} = \Delta/\{v \sim -v,\ v \in \partial\Delta\}.$$

Questo spazio non è semplicemente connesso. Si consideri il cappio

$$\gamma : [0,1] \to \widetilde{\Delta}, \quad \gamma(t) = (2t-1,0,0)$$

basato nel punto $(1,0,0) \in \Delta$. Allora $[\gamma] \not\sim 0$ mentre $[\gamma]^2 \sim 0$ in $\pi_1(\widetilde{\Delta})$.

6. Il gruppo unitario

Data una matrice A qualsiasi, indichiamo con $A^* = \overline{A}^t$ la trasposta coniugata di A. Ad esempio, se $v \in \mathbb{C}^n$ è un vettore colonna, allora $\langle v, w\rangle = v^* w$ è il prodotto scalare standard su $\mathbb{C}^n$. Una matrice A, $n \times n$, conserva questo prodotto se e solo se

$$\langle v, w\rangle = \langle Av, Aw\rangle = (Av)^*(Aw) = v^*(A^*A)w, \quad \forall v, w,$$

cioè $A^*A = I$. Quest'osservazione porta alla definizione dei gruppi matriciali

$$\begin{array}{rcl} U(n) & := & \{A \in M^{n,n}(\mathbb{C}) : A^*A = I\}, \\ SU(n) & := & \{ \quad \text{—————————} \quad \text{e } \det A = 1\}. \end{array}$$

Le algebre di Lie corrispondenti sono determinate dal comportamento infinitesimale in un intorno dell'identità. Se $A = I + tu + O(t^2)$, allora

$$\begin{array}{c} AA^* = I + (u + u^*)t + O(t^2), \\ \det A = 1 + (\operatorname{tr} u)t + O(t^2), \end{array}$$

quindi

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{u}(n) & = & \{u \in M^{n,n}(\mathbb{C}) : u + u^* = 0\}, \\ \mathfrak{su}(n) & = & \{ \quad \text{—————————} \quad \text{e } \operatorname{tr} u = 0\}. \end{array}$$

È facile verificare che $u, v \in \mathfrak{su}(n) \Rightarrow [u, v] = uv - vu \in \mathfrak{su}(n)$.

Esercizio. $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$. Segue che $SU(2)$ è omoeomorfo a $S^3 = \{v \in \mathbb{R}^4 : \|v\| = 1\}$.

Lemma. Le algebre di Lie $\mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(3)$ sono isomorfe.

Dim. Si cerchi una base (e_k) di $\mathfrak{su}(2)$ che soddisfa

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad \mathfrak{S}c \text{ permutazioni ciclici.}$$

A questo scopo si considerino le matrici hermitiane di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Basta definire $e_k = -\frac{1}{2} i\, \sigma_k \in \mathfrak{su}(2)$. $\square$

Inoltre, (e_k) è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare $-2\mathrm{tr}(uv)$ su $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$. Si fissi $A \in SU(2)$. Tenendo conto che $A^* = A^{-1}$ e che matrici simili hanno la stessa traccia, anche (Ae_kA^*) è ortonormale. La matrice P del cambiamento di base ha componenti

$$P_{k\ell} = -2\mathrm{tr}(Ae_kA^*e_\ell).$$

Esercizi. (i) $P\,{}^tP = I$;

(ii) $F : A \mapsto P$ è un omomorfismo $SU(2) \to O(3)$;

(iii) $\operatorname{Im} F = SO(3)$ e $\ker F = \{I, -I\}$.

Quindi $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$ è omoeomorfo a

$$S^3/\mathbb{Z}_2 = \{\text{rette che passano per } 0 \text{ in } \mathbb{R}^4\} = \mathbb{RP}^3.$$

Questo fatto giustifica la descrizione di $SO(3)$ come il quoziente $\widetilde{\Delta}$. Basta identificare Δ con la 'calotta' inferiore di S^3, e $\partial\Delta = S^2$ con l'equatore.

§2 Nilvarietà e strutture complesse

7. Algebre e gruppi in dimensione 4

Come riassunto delle definizioni in §1, si consideri la

Proposizione. A meno di isomorfismo, ci sono 3 algebre di Lie nilpotenti in dimensioni 4, ossia

$$\mathfrak{a}_4, \qquad \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{h}_3, \qquad \mathfrak{n}_4,$$

i cui duali hanno basi per cui

$$\begin{cases} de^k = 0 \\ \qquad \forall k \end{cases}, \qquad \begin{cases} de^1 = 0 \\ de^2 = 0 \\ de^3 = 0 \\ de^4 = e^{23} \end{cases}, \qquad \begin{cases} de^1 = 0 \\ de^2 = 0 \\ de^3 = e^{12} \\ de^4 = e^{23} \end{cases}.$$

Dimostrazione. Abbiamo costruito una serie

$$\{0\} \subseteq \ker d = (\mathfrak{g}')^o \subseteq \mathfrak{g}_{(2)}{}^o \subset \mathfrak{g}^*.$$

Gli elementi α di $\mathfrak{g}^o_{(2)}$ soddisfano $d\alpha \in \bigwedge^2 \ker d$, di cui segue che $\dim \ker d \geqslant 2$. Inoltre, esiste una base (e^k) di $\mathfrak{g}^*$ tale che $e^1, e^2 \in \ker d$ e $de^k \in \bigwedge^2\langle e^1, \ldots, e^{k-1}\rangle$ $k \geqslant 2$. Quindi,

$$\begin{aligned} de^3 &\in \textstyle\bigwedge^2\langle e^1, e^2\rangle = \langle e^{12}\rangle, \\ de^4 &\in \textstyle\bigwedge^2\langle e^1, e^2, e^3\rangle = \langle e^{12}, e^{13}, e^{23}\rangle. \end{aligned}$$

Se $de^3 = 0$, è facile cambiare la base in modo che $de^4 \in \langle e^{23}\rangle$. Quindi $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a}_4$ (1-step) o $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{h}_3$ (2-step). Analogamente per il caso 3-step. $\square$

Il gruppo di Lie che corrisponde a $\mathfrak{a}_4$ è $(\mathbb{R}^4, +)$. Usando il sottogruppo $\mathbb{Z}^4$, si può formare il quoziente $T^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$, sempre un gruppo abeliano. È anche uno spazio topologico compatto, omeomorfo a $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$.

Ogni punto di T^4 è un laterale del tipo $\mathbf{x}+\mathbb{Z}^4$ quindi T^4 ammette coordinate (x^1, x^2, x^3, x^4) definite almeno di una traslazione $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$. L'insieme di tutti questi sistemi (uno per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^4$) si chiama 'atlante'.

C'è un discorso analogo per le altre algebre. Il gruppo G che corrisponde a $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{h}_3$ ha la forma $\mathbb{R} \times H_3$, ma può essere scritto

$$G = \left\{ M(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x^1 \\ 0 & 1 & x^2 & x^4 \\ 0 & 0 & 1 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ x^i \in \mathbb{R} \right\}.$$

La legge di molteplicazione è

$$\begin{aligned} M(\mathbf{a})M(\mathbf{x}) &= M(a^1 + x^1, a^2 + x^2, a^3 + x^3, a^4 + x^4 + a^2x^3) \\ &= M(\mathbf{a} + \mathbf{x} + a^2x^3\mathbf{e}_4), \qquad \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^4. \end{aligned}$$

Se indichiamo con $\mathbb{Z}^4$ il sottogruppo discreto $\{M(\mathbf{a}) : a^i \in \mathbb{Z}\}$, possiamo considerare il quoziente

$$K = \mathbb{Z}^4\backslash G = \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3\backslash H_3 = S^1 \times \mathbb{Z}^3\backslash H_3.$$

Un elemento di K è un laterale $\{M(\mathbf{a})M(\mathbf{x}) : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^4\}$ con $\mathbf{x}$ fissato.

Mentre G è omeomorfo a $\mathbb{R}^4$,

Proposizione. $\mathbb{Z}^3\backslash H_3$ è un S^1-fibrato su $T^2 = S^1 \times S^1$.

Dimostrazione. Questo vuol dire che esiste un'applcazione $\pi : \mathbb{Z}^3\backslash H_3 \to T^2$ per cui $\pi^{-1}(p)$ è sempre omeomorfo a S^1. L'applicazione π è indotta da $M(\mathbf{x}) \mapsto (x^2, x^3)$. Quindi,

$$\pi^{-1}(p) = \{x^4 + a^4 + a^2x^3 \ : \ x^3 \text{ è fissato mod } \mathbb{Z}\} \approx S^1.$$

8. Forme differenziali su G e K

L'esistenza delle coordinate ci permette di estendere la definizione di d.

Differenziale di una funzione. Si fissi $p \in G$. Due funzioni differenziabili (nel senso C^∞) nelle variabili x^k hanno lo stesso 'germ' in p se coincidono su qualche intorno di p; indichiamo questa classe di equivalenza con $[f]$. Ponendo

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \{[f] : f(p) = 0\} \\ \mathcal{I}^2 &= \{[fg] : f(p) = 0,\ g(p) = 0\}, \end{aligned}$$

lo spazio vettoriale quoziente $T_p^* = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ si chiama lo 'spazio cotangente' a G in p. Se f è una funzione definita in un intorno di p, si definisca

$$df := [f - f(p)] + \mathcal{I}^2 \in T_p^*.$$

Si può verificare:

(i) $dc = 0$ se c è costante;

(ii) $d(fg) = df\, g(p) + f(p)\, dg$;

(iii) T_p^* ha dimensione 4 e una base $(dx^1, \ldots, dx^4)$.

Al variare di p si può scrivere semplicemente $d(fg) = df\, g + f\, dg$. $\square$

Per collegare questo discorso con la struttura di $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{h}_3$, si può identificare, per qualsiasi p, T_p^*G con $\mathfrak{g}^*$ ponendo

$$\begin{cases} e^k = dx^k, & k = 1, 2, 3, \\ e^4 = -dx^4 + x^2 dx^3. \end{cases}$$

Segue che

(i) le 1-forme e^k sono invarianti rispetto alla molteplicazione da un qualsiasi elemento fisso $M(\mathbf{a}) \in G$ a sinistra:

$$\begin{array}{rcl} dx^k & \mapsto & d(a^k + x^k) = dx^k, \quad k = 1, 2, 3, \\ -dx^4 + x^2 dx^3 & \mapsto & -d(a^4 + x^4 + a^2x^3) + (a^2 + x^2) d(a^3 + x^3) = -dx^4 + x^2 dx^3. \end{array}$$

Questo spiega perchè la scelta di p non è importante.

(ii) le equazioni per $\mathfrak{g}^*$ sono consistente con la condizione $d^2 = 0$:

$$\text{e.g.} \qquad de^4 = d(dx^4 + x^2 dx^3) = dx^2 \wedge dx^3 = e^{23}.$$

Ogni $\bigwedge^k \mathfrak{g}^*$ corrisponde ad un sottospazio di dimensione finita dllo spazio Ω^k di tutte le k-forme che variano in modo C^∞ da punto in punto:

$$\begin{array}{ccccccccc} C^\infty & \to & \Omega^1 & \to & \Omega^2 & \to & \Omega^3 & \to \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & \mathfrak{g}^* & \to & \bigwedge^2 g^* & \to & \bigwedge^3 \mathfrak{g}^* & \to \end{array}$$

Ad esempio, dx^4 è un elemento di Ω^1 ma non $\mathfrak{g}^*$.

Problema. Trovare funzioni complesse z^1, z^2 tale che

(i) $dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\overline{z}^1 \wedge d\overline{z}^2 \neq 0$;
(ii) Il sottospazio $\langle dz^1, dz^2 \rangle$ di $\mathfrak{g}_c^*$ è invariante.

La seconda condizione vuol dire che il sottospazio è generato dalle combinazioni di e^k con coefficienti costanti.

Una soluzione:

$$\begin{aligned} z^1 &= x^2 + ix^3, \\ z^2 &= x^1 + ix^4 + \tfrac{1}{2}(x^2)^2. \end{aligned}$$

Questo implica che

$$\begin{aligned} dz^1 &= e^2 + ie^3, \\ dz^2 &= e^1 + i(-e^4 + x^2 dx^3) + x^2 dx^2 = e^1 - ie^4 + x^2(e^2 + ie^3), \end{aligned}$$

quindi $\langle dz^1, dz^2 \rangle = \langle e^1 - ie^4, e^2 + ie^3 \rangle$.

9. Strutture complesse sulle algebre di Lie

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{R}$. La complexificazione $\mathfrak{g}_c$ è l'algebra di Lie su $\mathbb{C}$ con spazio vettoriale $\mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ e il bracket esteso in modo $\mathbb{C}$-lineare.

Definizioni. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{R}$ di dimensione pari.

(i) Una struttura quasi complessa (s.q.c.) su $\mathfrak{g}$ è un'applicazione lineare $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tale che $J^2 = -1$. Equivale all'esistenza di un sottospazio A di $\mathfrak{g}_c$ tale che $\mathfrak{g}_c = A \oplus \overline{A}$; A è l'autospazio

$$\{u \in \mathfrak{g}_c : Ju = iu\} = \{v - iJv : v \in \mathfrak{g}\}$$

(J viene estesa a $\mathfrak{g}_c$ in modo $\mathbb{C}$-lineare).

(ii) Se A è un sottoalgebra, cioè $[A, A] \subseteq A$, la struttura J si chiama integrabile o complessa. La struttura J si chiama abeliana se $[A, A] = 0$.

Il bracket non c'entra in (i), che è un concetto valido per qualsiasi spazio vettoriale di dimensione pari.

Esempi. (i) $\dim \mathfrak{g} = 2$. Ogni algebra di Lie reale di dimensione 2 è isomorfa a $\mathfrak{a}_2$ oppure $\mathfrak{f}_2$. Sia $\mathfrak{g}$ una tale algebra con base $\langle e_1, e_2 \rangle$. Allora $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_c = 2$. Un sottospazio $A = \langle e_1 + \lambda e_2 \rangle$ definisce una struttura quasi complessa qualora $\lambda \notin \mathbb{R}$. È automaticamente integrabile e abeliana.

(ii) $\dim \mathfrak{g} = 4$. Data una s.q.c. su $\mathbb{R}^4$, esiste una base (e_k) rispetto alla quale

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

cioè $Je_1 = e_3$ ($\Rightarrow Je_3 = -e_1$) e $Je_2 = e_4$ ($\Rightarrow Je_4 = -e_2$). Se X è una matrice invertibile (cioè, un elemento di $GL(4, \mathbb{R})$) che commuta con A allora

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \quad \text{e corrisponde a} \quad A + iB \in M^{2,2}(\mathbb{C}).$$

Corollario. L'insieme $\mathscr{Z}_4$ delle s.q.c. su $\mathbb{R}^4$ è

$$\{XJX^{-1} : X \in GL(4, \mathbb{R})\} \cong \frac{GL(4, \mathbb{R})}{GL(2, \mathbb{C})}.$$

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_4$ (con una scelta di base), ogni elemento di $\mathscr{Z}_4$ determina una struttura complessa abeliana su $\mathfrak{g}$.

Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{h}_3$ con una base (e_k) per cui $[e_2, e_3] = -e_4$. Allora un elemento di $\mathscr{Z}_4$ non è integrabile in generale. Ad esempio, J sopra corrisponde a

$$A = \langle e_1 - ie_3,\ e_2 - ie_4 \rangle$$

e $[e_1 - ie_3, e_2 - ie_4] = ie_4 \notin A$. Invece,

$$B = \langle e_1 + ie_4,\ e_2 - ie_3 \rangle$$

determina una struttura complessa abeliana. La scelta dei segni non è importante, ma guarantisce che B^o è lo spazio $\langle dz^1, dz^2 \rangle$ alla fine della sottosezione precedente.

10. La varietà di Iwasawa

Sia

$$\begin{aligned} H_3^c &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z^1 & z^3 \\ 0 & 1 & z^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : z^k \in \mathbb{C} \right\} \\ \mathbb{Z}^6 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a^1 & a^3 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a^k \in \mathbb{Z}[i] \right\} \\ L &= \mathbb{Z}^6 \backslash H_3^c. \end{aligned}$$

L è una varietà complessa: ammette dei sistemi di coordinate locali con funzioni a trasizione

$$(z^1, z^2, z^3) \mapsto (z^1 + a^1,\ z^2 + a^2,\ z^3 + a^3 + a^1 z^2).$$

Anche H_c^3 è una varietà complessa, ma si identifica semplicemente con $\mathbb{C}^3$.

Si considerino le seguenti 1-forme invarianti a sinistra su H_3^c:

$$\begin{aligned} dz^1 &= e^1 + ie^2 = \omega^1, \\ dz^2 &= e^3 + ie^4 = \omega^2, \\ -dz^3 + z^1 dz^2 &= e^5 + ie^6 = \omega^3. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{cases} de^k = 0, & k \leqslant 4, \\ de^5 = e^{13} + e^{42}, \\ de^6 = e^{14} + e^{23}. \end{cases}$$

Allora (e^k) è una base di $\mathfrak{g}^*$ dove $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie su $\mathbb{R}$ sottostante $\mathfrak{h}_{3c}$:

$\mathfrak{h}_3$	è un'algebra di Lie di	$\dim 3$ su $\mathbb{R}$	
$\mathfrak{h}_{3c}$	——————————	$\dim 3$ su $\mathbb{C}$,	$\mathfrak{h}_{3c}^* = \langle \omega^1, \omega^2, \omega^3 \rangle$
$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_{3cr}$	è un'algebra di Lie di	$\dim 6$ su $\mathbb{R}$,	$\mathfrak{g}^* = \langle e^1, \dots, e^6 \rangle$.

Complessificando di nuovo, è noto che si ottiene un isomorfismo di algebre di Lie $\mathfrak{h}_{3crc} \cong \mathfrak{h}_{3c} \oplus \overline{\mathfrak{h}_{3c}}$. Adesso spieghiamo questo fatto in termini di 1-forme.

Per definizione, l'algebra $\mathfrak{g}$ ammette una struttura complessa naturale, che corrisponde allo spazio

$$\Lambda^{1,0} = \langle dz^1, dz^2, dz^3 \rangle = \langle e^1 + ie^2,\ e^3 + ie^4,\ e^5 + ie^6 \rangle$$

di 1-forme complesse definite in ogni punto di H_3^c. Infatti, $\Lambda^{1,0}$ è l'annullatore della sottoalgebra

$$T^{0,1} = \langle e_1 + ie_2,\ e_3 + ie_4,\ e_5 + ie_6, \rangle$$

che per convenzione pensiamo come autospazio $\overline{A}$ di J con l'autovalore $-i$. Dal fatto che $Je_1 = e_2$, segue che

$$\begin{gathered} (Je^1)(e_2) = e^1(Je_2) = e^1(-e_1) = -1, \\ \Rightarrow \quad Je^1 = -e^2, \quad J\,dz^1 = i\,dz^1. \end{gathered}$$

Si dice che le forme dz^k sono del tipo $(1,0)$.

Più in generale, sia G un gruppo di Lie con algebra $\mathfrak{g}$ su $\mathbb{R}$, dimensione $2n$. Una struttura complessa su $\mathfrak{g}$ definisce una decomposizione

$$\begin{gathered} \mathfrak{g}_c^* = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1} \\ \Rightarrow \quad \textstyle\bigwedge^2 \mathfrak{g}_c^* = \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1} \oplus \Lambda^{0,2}. \end{gathered}$$

Dato che $\Lambda^{1,0}$ è contenuto nello spazio cotangente $\mathfrak{g}_c^* = (T_e^*)_c$ a G nell'identità, è definita un sottospazio $\Lambda_p^{1,0}$ di $(T_p^*)_c$ per ogni $p \in G$ per traslazione a sinistra. Inoltre,

$$\begin{aligned} A \text{ è un sottoalgebra di } \mathfrak{g}_c \quad &\Leftrightarrow \quad [u,v] \in \overline{A}, \quad \forall u, v \in \overline{A} \\ &\Leftrightarrow \quad d\alpha(u,v) = 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda^{1,0},\ \forall u, v \in \overline{A} \\ &\Leftrightarrow \quad d\alpha \in \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1}, \quad \forall \alpha \in \Lambda^{1,0}. \end{aligned}$$

La condizione di integrabilità è quindi

$$d(\Lambda^{1,0}) \subseteq \Lambda^{1,1} \oplus \Lambda^{2,0} \qquad\qquad **$$

Questa condizione ha senso non solo nel senso algebrico, ma anche punto per punto. Dato che

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha,$$

se $d\alpha$ ha zero componente in $\Lambda^{0,2}$ vale lo stesso per $d(f\alpha)$.

Teorema (segue da Newlander-Nirenberg). Se vale $**$, allora esistono coordinate locali $z^1, \ldots, z^n$ su G tale che $Jdz^k = i\, dz^k$.

Il viceversa segue immediatamente. Dati due sistemi di coordinate z^i, w^j,

$$dz^i = \sum \frac{\partial z^i}{\partial w^j} dw^j + \frac{\partial w^i}{\partial \overline{w}^j} d\overline{w}^j.$$

Se $dw^j \in \Lambda^{1,0}$ allora $\partial z^i / \partial \overline{w}^j = 0$ e le funzioni a trasizione sono olomorfe.

Esempi. (i) Ponendo $\Lambda^{1,0} = \langle e^1 + ie^2,\ e^3 - ie^4,\ e^5 - ie^6 \rangle$ definisce una struttura complessa dato che

$$d(e^5 - ie^6) = e^{13} + e^{42} - ie^{14} - ie^{23} = (e^1 - ie^2) \wedge (e^3 - ie^4) \in \Lambda^{1,1}.$$

La conclusione del Teorema è soddisfatto dall'esistenza delle coordinate $z^1, \overline{z}^2, \overline{z}^3$ per cui $\Lambda^{1,0} = \langle dz^1, d\overline{z}^2, d\overline{z}^3 \rangle$.

(ii) Analogamente, $\Lambda^{1,0} = \langle e^1 + ie^2,\ e^3 - ie^4,\ e^5 + ie^6 \rangle = \langle dz^1, d\overline{z}^2, d(-z^3 + z^1 z^2) \rangle$.

L'applicazione $\pi : H_3^c \to \mathbb{C}^2$ definita da

$$\begin{pmatrix} 1 & z^1 & z^3 \\ 0 & 1 & z^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (z^1, z^2)$$

induce una fibrazione $L \to T^4$ con fibra T^2. Inoltre,

$$\pi^* T_p^*(T^4) = \langle e^1, e^2, e^3, e^4 \rangle =: \mathbb{D}.$$

Lo spazio tangente alla fibra è $\mathbb{D}^o = \langle e_5, e_6 \rangle$.

Teorema. Sia J una struttura complessa su $\mathfrak{h}_{3cr}$. Allora $J\mathbb{D} = \mathbb{D}$.

Dimostrazione. Sia $\Lambda^{1,0} = \{u \in \mathfrak{g}_c^* : Ju = iu\}$. Allora

$$\dim(\langle e^1, e^2, e^3, e^4, e^5 \rangle_c \cap \Lambda^{1,0}) = 2.$$

Se $\dim(\mathbb{D}_c \cap \Lambda^{1,0}) = 2$ allora $J\mathbb{D} = \mathbb{D}$. Segue che esiste una $(1,0)$-forma $\delta + e^5$ con $\delta \in \mathbb{D}$.

$$\Rightarrow \quad de^5 \in \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1} \quad \Rightarrow \quad de^5 \in \Lambda^{1,1}.$$

Analogamente per e^6, e quindi

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = d\omega^3 = de^5 + ide^6 \in \Lambda^{1,1}$$

$$\Rightarrow \quad J\omega^1 \wedge J\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \langle J\omega^1, J\omega^2 \rangle = \langle \omega^1, \omega^2 \rangle.$$

Quindi, il sottospazio $\langle \omega^1, \omega^2 \rangle$ di $\mathfrak{g}_c^*$ è J-invariante e coincide con $\mathbb{D}_c \cap \Lambda^{1,0}$. $\square$

Come corollario, data una struttura complessa J su L, esiste una struttura complessa $\hat{J}$ su T^4 per cui $\pi : L \to T^4$ è olomorfa.

§3 Metriche riemanniane

11. Forme simmetriche

Il discorso che segue si applica a qualsiasi varietà differenziabile M, compresso un aperto di $\mathbb{R}^n$. In ogni punto $p \in M$ è definito lo spazio cotangente T_p^* e il suo duale T_p. Nel caso di un gruppo di Lie G, T_p si può identificare con $T_e = \mathfrak{g}$ per traslazione a sinistra. Più in generale, lo spazio tangente T_p di una varietà G/H di laterali (H qualsiasi sottogruppo chiuso di G) si può identificare con $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di T_p. Il prodotto scalare per cui $\{e_k\}$ è ortonormale è l'oggetto

$$g = \sum_{k=1}^{n} e^k \otimes e^k \in S^2 T_p^*,$$

che definisce un'applicazione $T_p \times T_p \to \mathbb{R}$ bilineare simmetrica in questo modo:

$$g(e_\ell, e_m) = \sum_k e^k(e_\ell) e^k(e_m) = \delta_{\ell m}.$$

Esempio. Sia $(t, u, v) \in \mathbb{R}^3$, e si consideri

$$\begin{cases} e^1 = dt, \\ e^2 = du + vdt, \\ e^3 = dv - udt \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} de^1 = 0, \\ de^2 = dv \wedge dt = e^{31}, \\ de^3 = -du \wedge dt = e^{12}. \end{cases}$$

Il fatto che i coefficienti siano costanti ci dice che $\langle e^1, e^2, e^3 \rangle^*$ ha la struttura di un'algebra di Lie. Di più interesse è la metrica

$$\begin{aligned} g &= (dt)^2 + (du + vdt)^2 + (dv - udt)^2 \\ &= (1 + u^2 + v^2)(dt)^2 + (du)^2 + (dv)^2 + 2(vdu - udv)dt, \end{aligned}$$

dove $2dudt$ sta per $du \otimes dt + dt \otimes du$. Scritta in questa forma, la metrica definisce l'elemento di lunghezza infinitesimale ds^2, che generalizza quella di Pitagora $(ds)^2 = (dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2$. Ci permette di calcolare la lunghezza di una curva mediante la formula

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_\gamma ds.$$

Rispetto alle coordinate t, x, y, la metrica g è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + u^2 + v^2 & v & -u \\ v & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema. Data una metrica g in termini di coordinate, esistono nuove coordinate $x^1, \ldots, x^n$ per cui $g = \sum\limits_{k=1}^{n} (dx^k)^2$? Se g può essere trasformata in questa forma standard, g si dice 'piatta'.

La metrica è piatta se esiste una base ortonormale $\{\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^n\}$ di 1-forme *chiuse.* La condizione $d\tilde{e}^k = 0$ implica l'esistenza di una funzione x^k per cui $\tilde{e}^k = dx^k$.

Lemma fondamentale. Sia $\{e^k\}$ una base di 1-forme. Esiste un'unica 'matrice' di 1-forme (ω^k_ℓ) tale che

$$\text{(i)}\quad de^k=\sum_\ell \omega^k_\ell\wedge e^\ell,\qquad \text{(ii)}\quad \omega^k_\ell+\omega^\ell_k=0.$$

Dimostrazione dell'unicitità. Date due soluzioni (ω^k_ℓ), $(\tilde\omega^k_\ell)$, sia $\omega^k_\ell-\tilde\omega^k_\ell=\sum_m f^k_{\ell m}e^m$. Allora (i) implica

$$\begin{aligned}0=\sum_{\ell,m} f^k_{\ell m}e^m\wedge e^\ell &= \sum_{\ell<m}(f^k_{m\ell}-f^k_{\ell m})e^\ell\wedge e^m\\ &\Rightarrow\quad f^k_{\ell m}=f^k_{m\ell}.\end{aligned}$$

Inoltre, $f^k_{\ell m}+f^\ell_{km}=0$. Quindi,

$$f^k_{\ell m}=-f^\ell_{km}=-f^\ell_{mk}=f^m_{\ell k}=f^m_{k\ell}=-f^k_{m\ell}=-f^k_{\ell m},$$

and $f^k_{\ell m}=0$. Corrisponde al fatto che i due sottospazi

$$S^2V\otimes V\subset V\otimes V\otimes V\supset V\otimes \textstyle\bigwedge^2 V$$

hanno intersezione zero.

Definizione. $\Omega^k_\ell=dw^k_\ell-\sum\limits_m \omega^k_m\wedge\omega^m_\ell$ sono le cosidette 2-forme di curvatura. Si osservi che anche la matrice (Ω^k_ℓ) è anti-simmetrica.

Soluzione del problema. g è piatta se e solo se si annullano tutte le Ω^k_ℓ.

Esempio.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0=de^1 &=& & & \omega^1_2\wedge e^2 &+& \omega^1_3\wedge e^3\\ e^{31} &=& -\omega^1_2\wedge e^1 & & &+& \omega^2_3\wedge e^3\\ e^{12} &=& -\omega^1_3\wedge e^1 &-& \omega^2_3\wedge e^2 & & \end{array}$$

È facile verificare che l'unica soluzione è $\omega^1_2=0=\omega^1_3$, $\omega^2_3=-e^1$. Segue che

$$\begin{aligned}\Omega^2_3&=d\omega^2_3-\omega^2_1\wedge\omega^1_3=0,\\ \Omega^3_1&=d\omega^3_1-\omega^3_2\wedge\omega^2_1=0,\\ \Omega^1_2&=d\omega^2_3-\omega^1_3\wedge\omega^3_2=0,\end{aligned}$$

e g è piatta. In seguito, troveremo funzioni $x^2=x$ e $x^3=y$ tale che

$$(du+vdt)^2+(dv-udt)^2=(dx)^2+(dy)^2.$$

12. Connessioni e curvatura

Definizione. Data una metrica $g=\sum_{k=1}^n e^k\otimes e^k$, la derivata covariante di e^k è definita da

$$\nabla e^k=\sum_\ell \omega^k_\ell\otimes e^\ell.$$

Nella presenza di funzioni, quest'applicazione si estende con la legge

$$\nabla(f\alpha) = f\nabla\alpha + df\otimes\alpha,$$

che è compatibile con la commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
T^* & \stackrel{\nabla}{\to} & T^*\otimes T^* & \stackrel{\nabla_1}{\to} & \bigwedge^2 T^*\otimes T^* & \to & \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
T^* & \stackrel{d}{\to} & \bigwedge^2 T^* & \stackrel{d}{\to} & \bigwedge^3 T^* & \to\cdots &
\end{array}$$

L'estensione ∇_1 è definita da $\nabla_1(\alpha\otimes\beta) = d\alpha\otimes\beta - \alpha\wedge\nabla\beta$. Quindi

$$\begin{aligned}
\nabla_1(\nabla e^k) &= \sum_\ell (d\omega^k_\ell\otimes e^\ell - \omega^k_\ell\wedge\nabla e^\ell)\\
&= \sum_\ell (d\omega^k_\ell - \sum_m \omega^k_m\wedge\omega^m_\ell)\otimes e^\ell\\
&= \sum_\ell \Omega^k_\ell\otimes e^\ell.
\end{aligned}$$

Conviene anche definire, per ogni vettore tangente X, un operatore $\nabla_X : T^*\to T^*$ ottenuto dalla 'contrazione' tra ω^k_ℓ e X:

$$\nabla_X e^k = \sum_\ell \omega^k_\ell(X)e^\ell.$$

L'azione di ∇_X si estende in un modo naturale agli spazi duali e ai prodotti tensoriali, come $T = (T^*)^*$, $T^*\otimes T^*$ e $T^*\otimes T = \operatorname{End} T$. Ad esmpio,

$$\begin{aligned}
\nabla_X g &= \sum_k \Big[(\nabla_X e^k)\otimes e^k + e^k\otimes(\nabla_X e^k)\Big]\\
&= \sum_{k,\ell} (\omega^k_\ell(X) + \omega^\ell_k(X))e^k\otimes e^\ell\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Le 2-forme Ω^k_ℓ di curvatura misurano il non-annullamento di $\nabla_1\circ\nabla$. Se $\nabla e^1 = 0$ allora $\Omega^1_k = 0$. Nella direzione contraria, il teorema di Frobenius per le varietà differenziabili può essere utilizzato a provare il

Teorema. Se $\Omega^k_\ell = 0$ for ogni k,ℓ, allora esiste una base $\{f^k\}$ di 1-forme (in un intorno di ogni punto) per cui $\nabla f^k = 0$ per ogni k.

Partendo da (f^k), possiamo applicare il processo o Gram-Schmidt ad ottenere una base ortonormale (e^k). Il fatto che $\nabla_X g = 0$ garantisce che $\nabla e^k = 0$. Questa implica che $de^k = 0$ e (in un intorno di ogni punto) esiste una funzione x^k per cui $e^k = dx^k$. Quindi,

$$g = \sum dx^k\otimes dx^k,$$

e g è piatta.

Esempio. Si ricordi la metrica

$$g = \sum_k e^k \otimes e^k \quad \text{con} \quad \begin{cases} e^1 = dt, \\ e^2 = du + vdt, \\ e^3 = dv - udt, \end{cases}$$

Abbiamo calcolato ω^k_ℓ, da cui segue che

$$\nabla e^1 = 0, \qquad \nabla e^2 = -e^1 \otimes e^3, \qquad \nabla e^3 = e^1 \otimes e^2,$$

e inoltre $\Omega^k_\ell = 0$. Dobbiamo trovare le coordinate x^1, x^2, x^3 per cui la base (dx^k) è ortonormale, quindi $\nabla dx^k = 0$. Sia

$$\begin{aligned} dx^1 &= fe^1 + ge^2 + he^3 \\ \Rightarrow \quad 0 = \nabla dx^1 &= df \otimes e^1 + g \otimes (-e^1 \otimes e^3) + dg \otimes e^2 + h \otimes (e^1 \otimes e^2) + dh \otimes e^3 \\ &\Rightarrow \quad df = 0, \quad dg = -h\, e^1, \quad dh = g\, e^1. \end{aligned}$$

In particolare, f deve essere costante. Dato che $e^1 = dt$ possiamo prendere g, h funzioni di t, e una soluzione è

$$f = \text{costante}, \qquad \begin{cases} g'(t) = h(t), \\ h'(t) = -g(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad g''(t) = -g(t), \quad h''(t) = -h(t).$$

Una soluzione è

$$\begin{cases} x^1 = t, \\ x^2 = u \cos t + v \sin t, \\ x^3 = -u \sin t + v \cos t. \end{cases}$$

Si verifica che

$$(dx^2)^2 + (dx^3)^2 = (du + v\, dt)^2 + (dv - u\, dt)^2.$$

La conclusione è che g è un'espressione della solita metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$ referita ad una 'trasformata elicoide'.

13. Il tensore di Riemann

Sia $\{e^k\}$ una base ortonormale di 1-forme. Si scrivi

$$\Omega^k_\ell = \sum_{i,j} R_{k\ell ij} e^i \otimes e^j.$$

Allora

$$\begin{aligned} R_{k\ell ij} &= -R_{\ell kij}, \\ R_{k\ell ij} &= -R_{k\ell ji}, \\ R_{k\ell ij} + R_{kij\ell} + R_{ij\ell k} &= 0. \end{aligned}$$

La seconda equazione segue perchè Ω^k_ℓ sono 2-forme. La terza è la 'prima identità di Bianchi'; segue dal fatto che $\wedge \circ \nabla_1 \circ \nabla = d \circ d = 0$. È ben noto che queste identità implicano anche le seguenti.

Corollario. $R_{k\ell ij} = R_{ijk\ell}$ e $R_{[ijk\ell]} = 0$.

Le parentesi quadre indicano un'antisimmetria totale (cioè la somma alternante su tutte e 24 le permutazioni di i, j, k, ℓ). Quindi R appartiene allo spazio

$$\mathcal{R} = \ker\Big(\ker : S^2(\textstyle\bigwedge^2 T^*) \to \bigwedge^4 T^*\Big).$$

Sia $N = n(n-1)/2$. Allora $\mathcal{R}$ è uno spazio vettoriale di dimensione

$$\dim \mathcal{R} = \frac{N(N+1)}{2} - \binom{n}{4} = \frac{1}{12} n^2(n^2-1),$$

che è data in dimensioni basse dalla tabella

n	$\dim \mathcal{R}$	
2	1	$= 1 + 0$
3	6	$= 6 + 0$
4	20	$= 10 + 10$
5	50	$= 15 + 35$
6	105	$= 21 + 84$
7	196	$= 28 + 168$

Abbiamo scomposto la dimensione di $\mathcal{R}$ per indicare prima le componenti del cosidetto tensore di Ricci:

Definizione. $\mathrm{Ric}_{\ell j} = \sum_k R_{k\ell kj}$.

Il tensore di Ricci ha la stesso tipo algebrico della metrica g, cioè $\mathrm{Ric} \in S^2 T^*$, e la parte complementare di R si chiama il tensore di Weyl:

$$R = \mathrm{Ric} + \mathrm{Weyl}.$$

In 3 dimensioni, bastano le componenti $R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{1223}, R_{1323}$, equivalentemente

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ric}_{11} & = & R_{2121} + R_{3131} \\ \mathrm{Ric}_{22} & = & R_{1212} + R_{3232} \\ \mathrm{Ric}_{33} & = & R_{1313} + R_{2323} \\ \mathrm{Ric}_{12} & = & R_{3132} \\ \mathrm{Ric}_{13} & = & R_{2123} \\ \mathrm{Ric}_{23} & = & R_{1213} \end{array}$$

per determinare R.

§4 Forme chiuse

14. Strutture quasi Hermitiane

Supponiamo che $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie di dimensione pari, dotata di una metrica g. Data una struttura quasi complessa J su $\mathfrak{g}$, è naturale richiedere che J sia ortogonale, cioè

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

In questo caso, esiste una forma bilineare antisimmetrica ω definita da

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) = g(-X, JY) = -\omega(Y, X).$$

L'endomorfismo J e le forme g, ω determinano tensori (invarianti a sinistra) su un gruppo di Lie G con algebra $\mathfrak{g}$. Il discorso seguente vale più in generale per tensori di questo tipo (ma non necessariamente invarianti) su una varietà differenziabile M^{2n} di dimensione pari.

In termini di una base ortonormale (e^k) di $\mathfrak{g}^*$, possiamo scrivere

$$g = \sum e^k \otimes e^k, \quad \omega = \tfrac{1}{2} \sum Je^k \wedge e^k,$$

$\{Je^k\}$ essendo un'altra base ortonormale. Si può inoltre scegliere la base in modo che $Je^{2k} = e^{2k-1}$.

Definizione. La struttura definita da g, J, ω si chiama kähleriana se (i) J è integrabile e (ii) $d\omega = 0$.

Le condizioni (i) e (ii) sono analoghe. Abbiamo visto che (i) implica l'esistenza delle coordinate per cui $Jdz^k = idz^k$. Se $z^k = x^k + iy^k$ allora $Jdx^k = -dy^k$ e $Jdy^k = dx^k$. In termini di basi duali, si può scrivere

$$J = \sum \left(dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^k} - dy^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \in T^* \otimes T = \operatorname{End} T.$$

Dall'altra parte, se $d\omega = 0$, il teorema di Darboux (più facile di quella per la J) implica che esistono coordinate $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$ tale che

$$\omega = \sum_1^n dx^k \wedge dy^k.$$

Esempio. Si ricordi il quoziente discreto $K = S^1 \times (\mathbb{Z}^3 \backslash H)$ associato all'algebra di Lie $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{h}_3$. Si fissi la metrica $g = \sum e^k \otimes e^k$ per cui (e^k) è una base di $\mathfrak{g}^*$ con

$$\begin{cases} de^k = 0, & k = 1, 2, 3, \\ de^4 = e^{23}. \end{cases}$$

Una s.q.c. è determinata da un endomorfismo $J : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ con $J^2 = -1$. Allora

$$\begin{aligned} J \text{ è } g\text{-ortogonale} \quad &\Rightarrow \quad -Je^1 = xe^2 + ye^3 + ze^4, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad \omega = \tfrac{1}{2}(Je^1 \wedge e^1 + Jf \wedge f), \end{aligned}$$

con f un versore in $\langle e^2, e^3, e^4\rangle$. Il termine $Jf \wedge f$ è determinato da Je^1 al meno del segno, quindi l'insieme delle s.q.c. ortogonali in $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^4$ è l'unione di due 2-sfere:

$$\mathcal{Z}_4^g = S_+^2 \sqcup S_-^2.$$

Ponendo

$$\begin{array}{lll} \omega_1 = e^{12} + e^{34}, & \text{che corrisponde a} & J_1 e^1 = -e^2,\ J_1 e^3 = e^4; \\ \omega_2 = e^{13} + e^{42}, & & J_2 e^1 = -e^3,\ J_2 e^4 = -e^2; \\ \omega_3 = e^{14} + e^{23}, & & J_3 e^1 = -e^4,\ J_3 e^2 = -e^3. \end{array}$$

possiamo identificare

$$S_+^2 = \{x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Si ricordi che J_3 è una struttura complessa. Corrisponde a $\Lambda^{1,0} = \langle e^1 + ie^4,\ e^2 + ie^3\rangle$ ed è abeliana:

$$d(\Lambda^{1,0}) = \langle e^{23}\rangle \subset \Lambda^{1,1}.$$

Dall'altra parte,

$$d(x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0,$$

e gli elementi di S_+^2 che sono forme simplettiche costituiscono l'equatore

$$\{x\omega_1 + y\omega_3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

.

Teorema. K non ammette nessuna struttura kähleriana.

Questo risultato segue dal fatto che i numeri di Betti b_{2k+1} 'dispari' di una varietà Kahleriana compatta M devono essere tutti pari. Ad esmpio, c'è un'azione di J sulle 1-forme armoniche che definiscono $H^1(M, \mathbb{R})$ e quindi questo spazio ha dimensione pari. In questo caso, vedremo che $b_3(K) = 3$.

15. Coomologia

Definizione. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione reale n. Il coomologia di $\mathfrak{g}$ è definita dagli spazi vettoriali

$$H^k(\mathfrak{g}) = \frac{\ker(d : \bigwedge^k \mathfrak{g}^* \to \bigwedge^{k+1} \mathfrak{g}^*)}{\mathrm{Im}(d : \bigwedge^{k-1} \mathfrak{g}^* \to \bigwedge^k \mathfrak{g}^*)}, \quad k \geqslant 1.$$

Sia $h^k = \dim H^k(\mathfrak{g})$.

Per l'esempio $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{h}_3$,

$$\begin{array}{lcl} h^1 & = & 3 - 0 = 3, \\ h^2 & = & 5 - 1 = 4, \\ h^3 & = & 4 - 1 = 3, \\ h^4 & = & 1, \end{array}$$

numeri che risultano della schema

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{g}^* & \to & \bigwedge^2\mathfrak{g}^* & \to & \bigwedge^3\mathfrak{g}^* & \to & \bigwedge^4\mathfrak{g}^* \\
\left.\begin{array}{c} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{array}\right\} & \mapsto & 0 & & & & \\
e^4 & \mapsto & e^{23} & \mapsto 0 & & & \\
 & & \left.\begin{array}{c} e^{12} \\ e^{13} \\ e^{23} \\ e^{24} \\ e^{34} \end{array}\right\} & \mapsto & 0 & & \\
 & & e^{14} & \mapsto & e^{123} & \mapsto 0 & \\
 & & & & \left.\begin{array}{c} e^{124} \\ e^{134} \\ e^{234} \end{array}\right\} & \mapsto & 0 \\
 & & & & & & e^{1234}
\end{array}
$$

Le dimensioni soddisfano il dualità di Poincarè : $h^k = h^{n-k}$. Definiamo anche $h^0 = 1$, giustificato dal fatto che $\bigwedge^0\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}$ e $d : \bigwedge^0\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ si annulla.

Un'applicazione del formula $\dim V = \dim\ker + \text{rango}$ implica che

$$\text{caratteristico di Eulero} = \sum_{i=0}^{n} h^i = \sum_{i=0}^{n} \dim(\textstyle\bigwedge^i\mathfrak{g}^*) = 0.$$

Sia G è nilpotente, e $M = \Gamma\backslash G$ compatta. Mediante una versione (facile) della teoria di Hodge in cui gli spazi hanno dimensione finita, gli elementi di $H^k(\mathfrak{g})$ possono essere rappresentati da forme armoniche relative al complesso $(\bigwedge^\bullet\mathfrak{g}^*, d)$. Quindi, esiste un'iniezione $H^k(\mathfrak{g}) \hookrightarrow H^k(M, \mathbb{R})$.

Teorema [Nomizu] $H^k(M, \mathbb{R}) \cong H^k(\mathfrak{g})$.

Esercizi e osservazioni. (i) La coomologia delle algebre nilpotenti di dimensione 4 è data dalla tabella

	h^0	h^1	h^2	h^3	h^4
$\mathfrak{a}_4$	1	4	6	4	1
$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{h}_3$	1	3	4	3	1
$\mathfrak{n}_4$	1	2	2	2	1

Un teorema di Dixmier afferma che ogni algebra di Lie nilpotente soddisfa

$$h^k \geqslant 2, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

(ii) $\mathfrak{h}_{3cr}$ ha $h^1 = 4$, $h^2 = 8$, $h^3 = 10$.

(iii) $\mathfrak{f}_2$ ha $h^1 = 1$, $h^2 = 0$, e non soddisfa il dualità di Poinareè.

(iv) $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ ha $h^1 = h^2 = 0$, $h^3 = 1$.

Più in generale,

$$\begin{array}{l} H^k(\mathfrak{so}(2n+1) \cong H^k(S^3 \times S^7 \times S^{11} \times \cdots \times S^{4n-1}) \\ H^k(\mathfrak{so}(2n+2) \cong H^k(\quad \text{———————————} \quad \times S^{2n+1}) \end{array}$$

(v) Si consideri lo spazio dei campi vettoriali su $\mathbb{R}$ che si annullano a ordine $\geqslant n$ in 0:

$$L_n = \langle x^k \frac{d}{dx} : k \geqslant n \rangle.$$

Diventa un'algebra di Lie con il bracket

$$\left[x^k \frac{d}{dx}, x^\ell \frac{d}{dx} \right] = x^k . \ell x^{\ell-1} \frac{d}{dx} - x^\ell . k x^{k-1} \frac{d}{dx} = (\ell - k) x^{k+\ell-1} \frac{d}{dx}.$$

Si definisca $V_n = L_1 / L_{n+1}$. Allora $V_n^* = \langle e^1, \ldots, e^n \rangle$ con

$$de^k = \sum_{i<\frac{k}{2}} (k-2i) e^i \wedge e^{k-i}.$$

Esplicitamente:

$$\begin{array}{rcl} de^1 & = & 0 \\ de^2 & = & 0 \\ de^3 & = & e^{12} \\ de^4 & = & 2e^{13} \\ de^5 & = & 3e^{14} + e^{23} \\ de^6 & = & 4e^{15} + 2e^{24} \\ \hline de^7 & = & 5e^{16} + 3e^{25} + e^{34} = \omega \\ & & \ldots\ldots \end{array}$$

Si osservi che il conto

$$d\omega = -5e^1.2e^{24} - 3e^2.3e^{14} + e^{124} = (-10 + 9 + 1)e^{124} = 0$$

fa parte della verifica che V_7 è un'algebra di Lie, ma nello stesso tempo dimostra che ω è una forma simplettica (non-esatta) su V_6.

È chiaro che V_n ha $h^1 = 2$. Inoltre, $h^2 = 3$ se $n \geqslant 6$. (Per $n = 6$, $H^2(\mathfrak{g})$ è generato da e^{14}, e^{14} e ω.) Più in generale,

Teorema [M] $h^k(V_n)$ è uguale al numero di Fibonacci F_{k+2} (con $F_0 = 0$, $F_1 = 1$) per $k \ll n$.

§5 Altre applicazioni geometriche

16. Un esempio kähleriano

Torniamo all'esercizio con $\mathfrak{g}^* = \langle e^1, e^2, e^3, e^4 \rangle$ definita da

$$\begin{cases} de^1 = 0, \\ de^2 = e^{12}, \\ de^3 = e^{13}, \\ de^4 = ae^{14} + be^{23}. \end{cases}$$

Allora

$$d(de^4) = -ae^1 \wedge (be^{23}) + b(e^{12} \wedge e^3 - e^1 \wedge e^{13}) = -abe^{123} + 2be^{123}.$$

Segue che $d^2 = 0$ se e solo se $b = 0$ o $a = 2$. Si supponga che $b \neq 0$ e $a = 2$.

Trattando (e^k) come base ortonormale, sono definite le 2-forme e rispettive strutture quasi complesse:

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = e^{12} + e^{34}, & J_1 e^1 = -e^2,\ J_1 e^3 = e^4; \\ \omega_2 = e^{13} + e^{42}, & J_2 e^1 = -e^3, \\ \omega_3 = e^{14} + e^{23}, & \qquad\ldots\ldots \end{array}$$

Segue che

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= 3e^{134} = 3e^1 \wedge \omega_1, \\ d\omega_2 &= 3e^{142} = 3e^1 \wedge \omega_2, \\ d\omega_3 &= (2-b)e^{123} = (2-b)e^1 \wedge \omega_3. \end{aligned}$$

Dato che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} T^* & \to & \bigwedge^3 T^* \\ \theta & \mapsto & \theta \wedge \omega_1 \end{array}$$

è un isomorfismo, associate a $\omega_1, \omega_2, \omega_2$ sono le tre 'forme di Lee'

$$\theta_1 = 3e^1, \quad \theta_2 = 3e^2, \quad \theta_3 = (2-b)e^1.$$

Esercizio. $\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow J_3$ è integrabile.

Ci sono due casi notevoli:

$\boxed{b = -1}$

Tutte e tre J_1, J_2, J_3 integrabili, e la struttura è 'ipercomplessa'. Per ogni $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in S^2$ sia

$$J_{\mathbf{a}} = a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_3 J_3, \quad J_{\mathbf{a}}^2 = -1.$$

Allora $J_{\mathbf{a}}$ è integrabile. Al livello delle varietà, sia S il gruppo di Lie semplicemente connesso con l'algebra $\mathfrak{g}$ (S per 'Solvable'). Allora S ammette una struttura ipercomplessa invariante a sinistra.

Localmente, possiamo scrivere $e^1 = dt$ e $\tilde{g} = e^{-3t} g$ ($\Rightarrow \tilde{\omega}_i = e^{-3t}\omega_i$). Allora,

$$d\tilde{\omega}_i = -e^{-3t} dt \wedge \omega_i + e^{-3t} d\omega_i = 0,$$

e la nuova metrica $\tilde{g}$ è iperkähleriana: $(\tilde{g}, J_{\mathbf{a}}, \omega_{\mathbf{a}})$ è kähler per ogni $\mathbf{a} \in S^2$. Fa parte di una classe di metriche iperkähleriane scoperta da Gibbons-Hawking. Ogni metrica iperkähleriana è automaticamente Ricci-piatta, quindi una metrica di Einstein con curvatura scalare $s = 0$.

$\boxed{b = 2}$

Adesso, $\omega_3 = \frac{1}{2} de^4$ è chiuso e $\mathfrak{g}$ è kähleriano.

Proposizione. g_2 è Einstein con $s < 0$.

Dimostrazione. È noto che su una varietà kähleriana, il tensore di Ricci misura la curvatura della connessione indotta da ∇ sul fibrato canonico $\Lambda^{2,0} = \langle \eta \rangle$, dove

$$\eta = (e^1 + ie^4) \wedge (e^2 + ie^3) = \omega_1 + i\omega_2.$$

Abbiamo

$$d\eta = 3e^1 \wedge \eta = -3ie^4 \wedge \eta \quad \Rightarrow \quad \nabla \eta = -3ie^4 \wedge \eta;$$

visto che $-3ie^4 \in \mathfrak{u}(1)$ deve essere la 1-forma di connessione. La 2-form di curvatura è

$$\Omega = d(-3ie^4) = -6i\omega_3$$

è proporzionale alla forma di kähler. $\square$

Interpretazione: S si può identificare con il piano iperbolico complesso

$$\mathbb{CH}^2 = \frac{SU(2,1)}{S(U(2) \times U(1))},$$

e g_2 con la metrica standard che esiste su questo spazio simmetrico.

17. Strutture ortogonali

L'insieme delle strutture quasi complesse $J : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è

$$\mathcal{Z}_4 = \frac{GL(4,\mathbb{R})}{GL(2,\mathbb{C})} = \{XJ_0X^{-1} : X \in GL(4,\mathbb{R})\}.$$

Ci sono due componenti secondo il segno di $\det X$.

Il sottoinsieme delle s.q.c. ortogonali (rispetto ad il prodotto scalare standard g) è

$$\mathcal{Z}_4^g = \frac{O(4)}{U(2)} = Z_+ \sqcup Z_-,$$

dove

$$Z_\pm = \frac{SO(4)}{U(2)} = \frac{SU(2) \times SU(2)}{U(1) \times SU(2)} = \frac{SU(2)}{U(1)} = \frac{SO(3)}{SO(2)} \cong S^2.$$

Partendo da $\mathbb{R}^6$,

$$\mathcal{Z}_6^g = \frac{O(6)}{U(3)} = Z_+ \sqcup Z_-,$$

con

$$Z_+ = \frac{SO(6)}{U(3)} = \frac{SU(4)}{S(U(3)\times U(1))} \cong \mathbb{CP}^3.$$

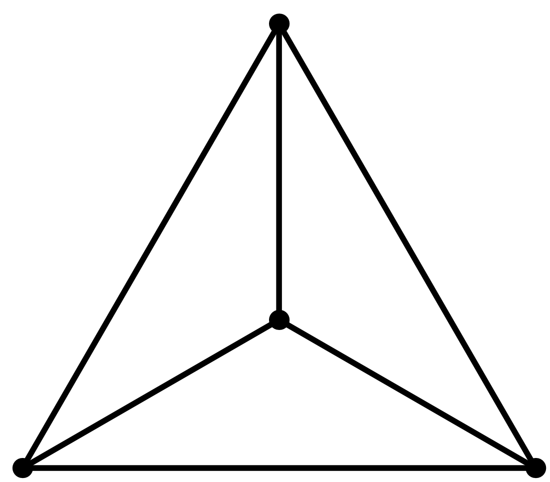
Mentre in $\mathcal{Z}_4^g$ vale $J \in S_+^2 \Leftrightarrow -J \in S_+^2$, abbiamo

$$Z_- = \{-J : J \in Z_+\} \quad \text{in} \quad \mathcal{Z}_6^g.$$

Ogni s.q.c. $J \in Z_+ \subset \mathcal{Z}_6^g$ è rappresentata dalla 2-forma ω. Ad esempio,

$$\begin{array}{rcl} \omega_0 = & e^{12}+e^{34}+e^{56} & \leftrightarrow & (1,0,0,0) \\ \omega_1 = & e^{12}-e^{34}-e^{56} & \leftrightarrow & (0,1,0,0) \\ \omega_2 = & -e^{12}+e^{34}-e^{56} & \leftrightarrow & (0,0,1,0) \\ \omega_3 = & -e^{12}-e^{34}+e^{56} & \leftrightarrow & (0,0,0,1). \end{array}$$

costituiscono le vertici di un tetraedro che si può immaginare immerso in $\mathbb{CP}^3$. Ogni spigolo rappresenta una retta proiettiva $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, ogni faccia un piano $\mathbb{CP}^2$.



Applichiamo questo modello allaetà di Iwasawa $L = \mathbb{Z}^6 \backslash G$ dove $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}_{3cr}^*$ ha una base ortonormale (e^k) con

$$\begin{cases} de^k = 0, & k \leqslant 4, \\ de^5 = e^{13}+e^{42}, \\ de^6 = e^{14}+e^{23}. \end{cases}$$

Sia J_k la s.q.c. che corrisponde a $\omega_k \in Z_+$. Abbiamo visto che J_0, J_1, J_2 sono integrabili:

$$J_0 : \qquad \Lambda^{1,0} = \langle \alpha^1 = e^1 + ie^2,\ \alpha^2 = e^3 + ie^4,\ \alpha^3 = e^5 + ie^6 \rangle,$$
$$d(e^5 + ie^6) = (e^1 + ie^2) \wedge (e^3 + ie^4) \in \Lambda^{2,0}.$$

$$J_1 : \qquad \Lambda^{1,0} = \langle e^1 + ie^2,\ e^3 - ie^4,\ e^5 - ie^6 \rangle,$$
$$d(e^5 - ie^6) = (e^1 - ie^2) \wedge (e^3 - ie^4) \in \Lambda^{1,1}.$$

Si consideri invece J_3:

$$\begin{aligned} d\omega_3 &= (e^{13}+e^{42})\wedge e^6 - e^5\wedge(e^{14}+e^{23}) \\ &= e^{136}-e^{246}-e^{145}-e^{235} \\ &= \operatorname{Im}\eta, \end{aligned}$$

dove

$$\eta = (e^1-ie^2)\wedge(e^3-ie^4)\wedge(e^5+ie^6)\in\Lambda^{3,0}.$$

Inoltre,

$$d\eta = (e^1-ie^2)\wedge(e^3-ie^4)\wedge(e^1+ie^2)\wedge(e^3+ie^4) = 4e^{1234}.$$

Queste proprietà portano alla

Proposizione [GLPS] La metrica

$$g = dt^2 + t^{2/3}\sum_{k=1}^{4} e^k\otimes e^k + t^{-2/3}\sum_{k=5}^{6} e^k\otimes e^k$$

definita su $\mathbb{R}^+\times L$ ha gruppo di olonomia uguale a G_2 e quindi $\mathrm{Ric}=0$.

18. Strutture complesse su L

Cerchiamo di deformare J_0 in una struttura complessa $\widetilde{J}$ per cui

$$\widetilde{\Lambda^{1,0}} = \langle\beta^1,\beta^2,\beta^3\rangle,$$

con

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \alpha^1 + a\overline{\alpha}^1 + b\overline{\alpha}^2 + s\overline{\alpha}^3, \\ \beta^2 &= \alpha^2 + c\overline{\alpha}^1 + d\overline{\alpha}^2 + t\overline{\alpha}^3, \\ \beta^3 &= \alpha^3 + x\overline{\alpha}^1 + y\overline{\alpha}^2 + u\overline{\alpha}^3. \end{aligned}$$

Questa descrizione è valida se $\widetilde{J}$ non è 'troppo lontana' da J_0 nel senso che $\beta^{123}\wedge\overline{\alpha}^{123}\neq 0$. I coefficienti sono anche limitati dal fatto che $\beta^{123}\wedge\overline{\beta}^{123}\neq 0$. La condizione di integrabilità è

$$(d\beta^k)^{0,2}=0, \quad \text{cioè} \quad d\beta^k\wedge\underbrace{\beta^1\wedge\beta^2\wedge\beta^3}_{\text{in } \widetilde{\Lambda^{3,0}}} = 0, \qquad k=1,2,3.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} d\beta^1\wedge\beta^{123} = s\,\overline{\alpha}^{12}\wedge\alpha^{12} &= 0 &\Rightarrow\quad & s=0, \\ \cdots\cdots & &\Rightarrow\quad & t=0, \\ d\beta^3\wedge\beta^{123} = (\alpha^{12}+u\overline{\alpha}^{12})\wedge(\alpha^{12}+(ad-bc)\overline{\alpha}^{12}) &= 0 &\Rightarrow\quad & u+ad-bc=0. \end{aligned}$$

Quindi $\widetilde{J}\mathbb{D}=\mathbb{D}$, conseguenza anche dal teorema dimostrato in §2.

Corollario. Un intorno di J_0 dello spazio delle strutture complesse invarianti su $\mathfrak{g}$ è una quadrica in $\mathbb{C}^7$.

La s.q.c. $\widetilde{J}$ è g-ortogonale se e solo se $\Lambda^{1,0}$ è totalmente isotrope. Se $i\in\{1,2\}$,

$$\begin{aligned} &g(\alpha^i,\alpha^i)=0\Rightarrow a=d=0, &\qquad& g(\alpha^1,\alpha^2)=0\Rightarrow b+c=0, \\ &g(\alpha^i,\alpha^3)=0\Rightarrow x=y=0, && g(\alpha^3,\alpha^3)=0\Rightarrow u=0\Rightarrow b=c=0. \end{aligned}$$

Quindi J_0 è isolato nel sottoinsieme $\mathcal{C}$ di $\mathcal{Z}_6^g$ che consiste delle strutture integrabili.

Teorema [AGS] $\mathcal{C} = \{\omega_0\} \sqcup (\omega_1\omega_2)$, dove $(w_1\omega_2)$ è lo spigolo $\{\omega - e^{56} : \omega \in S^2_-\}$.

[Bibliografia da aggiungere]