Geometria e gruppi

Esercizi, 02/05/03

(M,g) è una varietà Riemanniana di dimensione n.

1. Sia $F_i^j = d\sigma_i^j + \sum \sigma_i^k \wedge \sigma_k^j$ la matrice di curvatura (della connessione di Levi-Civita). Provare che $F_{ij} = -F_{ji}$ dove $F_{ij} = F_i^k g_{kj}$.

2. Sia $\Lambda^k = \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)^*$ lo spazio delle forme alternanti di grado k su $\mathbb{R}^n$. Verificare che l'applicazione naturale $b : \mathsf{S}^2(\Lambda^2) \to \Lambda^4$ definita da

$$b(\alpha \otimes \beta) = \alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha, \qquad \alpha, \beta \in \Lambda^2,$$

   è suriettiva.

3. Sia $\mathcal{R}$ lo spazio dei tensori con le stesse simmetrie (studiate a lezione) del tensore di Riemann R. Verificare che $\mathcal{R} = \ker b$.

4. Sia $n = 2$. Trovare il legame preciso tra la curvatura scalare $s = R^i{}_{ji\ell} g^{j\ell}$ e la curvatura Gaussiana della superficie M.

5. Si consideri la derivata covariante

$$\nabla R = \sum R^i{}_{jk\ell;\,m} e_i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e^\ell \otimes e^m \in \mathcal{R} \otimes \Lambda^1.$$

   Verificare (dalla seconda identità di Bianchi) che $R^i{}_{jk\ell;\,m} + R^i{}_{jmk;\,\ell} + R^i{}_{j\ell m;\,k} = 0$.

6. Sia $n \geqslant 3$. Si supponga che il tensore di Ricci sia un multiplo della metrica in ogni punto, cioè $R_{jk} = \lambda g_{jk}$ dove λ è una funzione. Dedurre, mediante l'esercizio precedente, che λ è costante.

7. Si indichi con S^k il sottospazio del prodotto tensoriale $\bigotimes^k(\mathbb{R}^n)^*$ che consiste nei tensori totalmente simmetrici. Verificare che $\dim(S^k)$ è il coefficiente binomiale $\binom{n+k-1}{k}$. Provare poi che $\mathcal{R}$ è isomorfo al nucleo dell'applicazione

$$b' : \mathsf{S}^2(S^2) \to S^4$$

   con simmetrizzazione al posto di antisimmetrizzazione.