1. Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale V su una varietà differenziabile M; quindi $\nabla(fv) = df \otimes v + f\nabla v$ per una funzione $f \in C^\infty(M)$ e una sezione $v \in \Gamma(M, V)$. Verificare che l'operatore ∇^* definito da
$$(\nabla^*_X f)(v) = X(f(v)) - f(\nabla_X v), \qquad f \in \Gamma(V^*), \quad X \in \mathcal{X}(M)$$
è una connessione sul fibrato duale V^*.

2. Sia ∇ una connessione su $T^* = T^*M$ (o equivalentemente su $T = TM$ da sopra). Verificare che
(i) la torsione $\tau = \mathrm{a} \circ \nabla - d$ può essere identificata con $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$,
(ii) la curvatura F di ∇ può essere identificato con la 2-forma
$$(X, Y) \mapsto \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \in \operatorname{End} T.$$

3. Sia ∇ la connessione di Levi-Civita su una varietà Riemanniana M e sia $(\tilde{e}^k)$ una base di 1-forme con $\nabla \tilde{e}^k = 0$. Spiegare perchè esiste una base *ortonormale* con la stessa proprietà.

4. Abbiamo visto che il gruppo $SL(2, \mathbb{R})$ ammette una base (e^1, e^2, e^3) di 1-forme, invarianti a sinistra, tale che $de^1 = -e^{23}$, $de^2 = -2e^{12}$, $de^3 = 2e^{13}$. Sia $g = \sum e^i \otimes e^i$ la metrica Riemanniana per cui (e^i) sia ortonormale. Calcolare la connessione di Levi-Civita (cioè ogni ∇e^i e poi la matrice σ_i^j) e la sua curvatura (cioè la matrice F_i^j data da $F = d\sigma + \sigma \wedge \sigma$).

5. Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale V. Verificare che l'operatore $\tilde{\nabla}$ definito da
$$(\tilde{\nabla}_X \phi)(v) = \nabla_X(\phi(v)) - \phi(\nabla_X v)$$
è una connessione su $\operatorname{End} V$. Usare ∇^* (dall'es 1) e ∇ per definire una connessione su $V^* \otimes V$ che coincide con $\tilde{\nabla}$ rispetto alla identificazione naturale $\operatorname{End} V = V^* \otimes V$. Essendo $\mathbf{1} \in \operatorname{End} V$ l'applicazione identica, verificare che $\tilde{\nabla}(\mathbf{1}) = 0$.

6. Sia ∇ una connessione sul fibrato tangente $T = TM$. Si consideri l'operatore
$$D_1 \colon \Omega^1(T) \to \Omega^2(T)$$
definito a lezione come l'estensione naturale di $\nabla = D_0$. Verificare che $D_1(\mathbf{1})$ si identifica con la torsione τ (notazione dall'esercizio precedente con $V = T$).