1. Sia $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2)$, cioè $a, b, c, d \in \mathbb{H}$ e $Q^*Q = I$ dove $Q^* = \overline{Q}^T$.

   (i) Verificare direttamente che $|b| = |c|$, $|a| = |d|$ e $QQ^* = I$.

   Si identifichi $\mathbb{R}^4$ con lo spazio delle matrici $\begin{pmatrix} 0 & p \\ \overline{p} & 0 \end{pmatrix}$ con $p \in \mathbb{H}$.

   (ii) Provare che $QPQ^* \in \mathbb{R}^4$ per ogni $P \in \mathbb{R}^4$ implica $b = 0 = c$ o $a = 0 = d$.

2. Calcolare le dimensioni b_k degli spazi di coomologia $H^k(\mathfrak{g})$ quando $\mathfrak{g}$ è l'algebre di Lie

   (i) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, (ii) $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Si consideri l'insieme $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & p & \frac{1}{2}q \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : p, q \in \mathbb{H} \text{ e } \mathrm{Re}(p^2 - q) = 0 \right\}$.

   (i) Verificare che N è chiuso rispetto alla moltiplicazione delle matrici e dedurre che è un gruppo di Lie.

   (ii) Provare che le 4 componenti di dp e le 3 componenti di $dq - 2p\,dp$ (perchè solo 3?) sono invarianti per la traslazione a sinistra.

4. Lo spazio $\mathbb{R}^{2,1}$ indica $\mathbb{R}^3$ con la forma bilineare simmetrica $h((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + yy' - zz'$ anzichè il solito prodotto scalare. Dato l'iperboloide

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{2,1} : x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ z > 0\},$$

   verificare che

   (i) $\mathbf{r}(u,v) = (\cos u \sinh v,\ \sin u \sinh v,\ \cosh v)$ è una parametrizzazione di Σ,

   (ii) la metrica indotta da h su ogni spazio tangente $T_{\mathbf{v}}\Sigma = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle$ è definita positiva,

   (iii) in ogni punto $\mathbf{v} = (x,y,z) \in \Sigma$, il vettore $\mathbf{v}$ stesso è 'normale' a Σ.

5. Il gruppo alternante A_4 agisce su $\mathbb{R}^4$ permutando le coordinate x^0, x^1, x^2, x^3. Scrivere ogni elemento $\sigma \in A_4$ nella forma (p_1, p_2) dove $p_i \in Sp(1)$ e $\sigma(q) = p_1 q \overline{p}_2$ con $q \in \mathbb{H}$.

6. Siano Λ^2_+ e Λ^2_- i sottospazi di $\bigwedge^2\mathbb{R}^4$ generati dalle componenti di $d\theta_+ = dq \wedge d\overline{q}$ e $d\theta_- = d\overline{q} \wedge dq$ con $q = x^0 + x^1 i + x^2 j + x^3 k$. Scrivendo $e^i = dx^i$, $e^{ij} = dx^i \wedge e^j$ ecc., si consideri il prodotto scalare su $\bigwedge^2\mathbb{R}^4$ per cui $(e^{ij} : 0 \leqslant i < j \leqslant 3)$ è una base ortonormale. Verificare che

$$\text{(i) } \sigma \wedge \tau = 0 \text{ se } \sigma \in \Lambda^2_+ \text{ e } \tau \in \Lambda^2_-, \qquad \text{(ii) } \sigma \wedge \sigma = \pm\|\sigma\|^2 e^{1234} \text{ se } \sigma \in \Lambda^2_\pm.$$

   Dedurre che l'insieme delle 2-forme semplici (cioè uguali a $e \wedge e'$ per qualche e, e') di norma 1 si identifica con $S^2 \times S^2$.