1. Il gruppo $U(n)$ consiste nelle matrici $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ tale che $\overline{M}^T M = I$.

   (i) Provare che ogni elemento $M \in U(2)$ con $\det M = 1$ ha la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$.

   (ii) Verificare che lo spazio tangente $T_I U(n)$ è uguale all'insieme $\mathfrak{u}(n) = \{P \in \mathbb{C}^{n,n} : \overline{P} + P^T = 0\}$ delle matrici anti-Hermitiane. Verificare che qualsiasi matrice $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ si scrive in modo unico $M = P + iQ$ con $P, Q \in \mathfrak{u}(n)$.

2. Il gruppo $Sp(n)$ consiste nelle matrici $Q \in \mathbb{H}^{n,n}$ tale che $\overline{Q}^T Q = I$.

   (i) Verificare che ogni colonna $(q_1, \dots, q_n)^T$ di Q ha norma 1, cioè $\sum_{i=1}^n |q_i|^2 = 1$. Dedurre che $Sp(n)$ è uno spazio topologico compatto.

   (ii) Provare che la dimensione di $Sp(n)$ come varietà è $n(2n+1)$.

3. Sia G l'intersezione $Sp(n, \mathbb{R}) \cap O(2n)$ in $GL(2n, \mathbb{R})$ (abbiamo visto che questa è isomorfa a $U(n)$). Si consideri
$$G_c = Sp(n, \mathbb{C}) \cap O(2n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(2n, \mathbb{C}) : M^T M = I \text{ e } M^T J M = J\}.$$

   (i) Mostrare che $G_c \subset H$ dove $H = \{M \in GL(2n, \mathbb{C}) : MJ = JM\}$.

   (ii) Scrivendo $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ e $P_\pm = A \pm iB$, provare che $M \in G_c \Leftrightarrow {P_+}^T P_- = I$.

   (iii) Dedurre che $H \cong GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$ e che $G_c \cong GL(n, \mathbb{C})$.

4. Sia $SL(n, \mathbb{H})$ il sottogruppo di $GL(n, \mathbb{H})$ che consiste nelle matrici $A + Bj \in \mathbb{H}^{n,n}$ con $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ e $\det \begin{pmatrix} A & -B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} = 1$. Verificare che $SL(1, \mathbb{H}) = SU(2)$. È vero che $SL(n, \mathbb{H})$ è compatto per ogni $n \geqslant 1$?

5. Si identifichi $\mathbb{R}^3$ con lo spazio $\operatorname{Im} \mathbb{H}$ generato da $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{H}$. Sia $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ una seconda base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ con $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$. Dato $\mathbf{p} = \cos\theta + (\sin\theta)\mathbf{e}_1 \in \mathbb{H}$, verificare che l'applicazione $f_\mathbf{p} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $f_\mathbf{p}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}\mathbf{q}\overline{\mathbf{p}}$ è una rotazione di 2θ con l'asse parallelo a $\mathbf{e}_1$.

6. Si ricordi che due matrici $A, B \in \mathbb{C}^{m,m}$ sono *simili* (scriviamo $A \approx B$) se esiste $M \in GL(m, \mathbb{C})$ tale che $MAM^{-1} = B$. Diciamo invece che $A, B \in \mathbb{C}^{m,m}$ sono *consimili* ($A \sim B$) se esiste $M \in GL(m, \mathbb{C})$ tale che $\overline{M} A M^{-1} = B$.

   (i) Verificare che $A \sim B \Rightarrow A\overline{A} \approx B\overline{B}$. Provare che $A\overline{A} \approx I \Rightarrow A \sim I$ (I è la matrice identica; si calcoli AM con $M = e^{i\theta}\overline{A} + e^{-i\theta} I$).

   (ii) Posto $m = 2n$, verificare che la classe di equivalenza $\{A \in \mathbb{C}^{m,m} : A \sim J\}$ è in corrispondenza biiettiva con lo spazio dei laterali $GL(2n, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{H})$.

   (iii)* Posto $m = 2$, siano λ, μ gli autovalori di $A\overline{A}$. Provare che ci sono solo le due possibilità: (a) $\lambda = \overline{\mu}$, oppure (b) λ, μ sono reali e *positivi*.