Complementi di Matematica 09/02/2010

1. Si ricordi che un'applicazione biiettiva $f: X \to Y$ si chiama *omeomorfismo* se f e f^{-1} sono continue. Per ognuna delle coppie di spazi di cui ai punti (i)–(vi), dire se esiste un omeomorfismo $f: X \to Y$. Nel caso positivo, scrivere (senza giustificazione) una tale f; nel caso negativo dare una giustificazione del fatto che i due spazi *non* sono omeomorfi.

(i) $X = (0,1)$ e $Y = (0,\infty)$.

(ii) $X = [0,1]$ e $Y = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

(iii) $X = [0,1)$ e $Y = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(iv) $X = (0,1)$ e $Y = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$.

(v) $X = (0,1)$ e $Y = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

(vi) $X = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ e $Y = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Naturalmente, nel caso (i), i due sottoinsiemi hanno la topologia indotta da $\mathbb{R}$. Nei casi (ii)–(v), X ha la topologia indotta da $\mathbb{R}$, e Y quella indotta da $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{C}$. Nel caso (vi), i due sottoinsiemi hanno la topologia indotta da $\mathbb{C}$.

2. (a) Dare la definizione di un sottoinsieme *compatto* di uno spazio topologico. Dimostrare *due* delle seguenti affermazioni (tutte e tre sono vere!):

Un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.

Un sottoinsieme compatto di uno spazio Hausdorff è chiuso.

Un'applicazione continua manda un sottoinsieme compatto in uno compatto.

(b) Siano X, Y spazi topologici con X compatto e Y Hausdorff. Citando i risultati di cui sopra, dedurre che qualsiasi applicazione $f: X \to Y$ continua soddisfa le due condizioni:

C è un sottoinsieme chiuso di X $\Rightarrow$ $f(C)$ è chiuso in Y.

$f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$.

(c) Dedurre anche che un'applicazione $f: [0,1] \to [0,1]$ biiettiva e continua è un omeomorfismo.

3. (a) Dare la definizione di *connesso* e *connesso per archi* per uno spazio topologico. Mostrare che *connesso per archi* implica *connesso*. Vale il viceversa?

(b) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{C} \setminus [0, \infty) = \{x + iy \in \mathbb{C} : y \neq 0 \text{ oppure } x < 0\} \\ B &= \ \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad\ \ = \{x + iy \in \mathbb{C} : y \neq 0\}. \end{aligned}$$

Dimostrare (anche se sembra ovvio) che A è connesso e che B non è connesso.

(c) Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale tale $(f(z))^2 = z$ per ogni $z \in A$. Mostrare che l'immagine di f è contenuto in solo uno dei semi-piani

$$B^+ = \{x + iy : y > 0\}, \qquad B^- = \{x + iy : y < 0\},$$

le componenti connesse di B.

4. Sia (X, d) uno spazio metrico con distanza $d: X \times X \to [0, \infty)$. (Un esempio è $\mathbb{C}$ con la distanza euclidea $d(w, z) = |w - z|$, il modulo di $w - z$.) Spiegare come d induce una topologia su X; in particolare, come si definiscono gli aperti?

Dato un sottoinsieme chiuso $A \neq \emptyset$ di X, si consideri una funzione $f_A: X \to [0, \infty)$ definita da

$$f_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

(a) Fissato A, dimostrare che la funzione f_A è continua, ad esempio partendo della disuguaglianza $d(y, a) \leqslant d(x, a) + d(x, y)$ e considerando $|f_A(y) - f_A(x)|$. Verificare (rigorosamente) che $(f_A)^{-1}(0) = A$.

(b) Usando le controimmagine di f_A, dedurre che esiste una successione $\{U_n\}$, con $n = 1, 2, 3, \dots$, di sottoinsiemi aperti di X tale che $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ è la loro intersezione.

(c) Siano A e B chiusi, non-vuoti e disgiunti: $A \neq \emptyset \neq B$ e $A \cap B = \emptyset$. Dimostrare che esistono aperti disgiunti U, V contenenti A, B rispettivamente:

$$A \subseteq U, \qquad B \subseteq V, \qquad U \cap V = \emptyset.$$

Suggerimento: considerare la funzione $h: X \to \mathbb{R}$ con $h = f_A - f_B$.