Complementi di Matematica 12/09/2011 2 ore

Giustificare tutte le risposte!

1. Vero o falso?

(i) L'insieme di Cantor è compatto.

(ii) Se C è un sottospazio connesso di uno spazio topologico Y e $f\colon X \to Y$ è continua allora $f^{-1}(C)$ è necessariamente connesso.

(ii) L'insieme $\{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(iii) Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}$ con la metrica p-adica (p un numero primo fissato). Allora ogni successione di Cauchy in $\mathbb{Z}$ è definitivamente costante.

(iv) La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(kx)$ converge ad una funzione nello spazio metrico $L^1[0, 2\pi]$.

(v) Sia V lo spazio vettoriale di tutte le successioni reali (x_n) tali che $\sum_{n=1}^{\infty} |x_i|$ sia finita. Allora V è completo relativamente alla norma $\|(x_n)\| = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_i|$.

(vi) Esiste un'applicazione $f\colon [0,1] \to [0,1]$ biiettiva e continua per cui f^{-1} non è continua.

Per le ultime due parti, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ e d è la solita distanza Euclidea.

(viii) Sia Q lo spazio topologico, quoziente di D definito dichiarando equivalenti ogni coppia $(x,y), (-x,-y)$ con $x^2 + y^2 = 1$ (punti antipodali sul bordo). Allora Q è di Hausdorff.

(ix) Ogni applicazione $f\colon D \to D$ che soddisfa $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ ammette un numero infinito di punti fissi.

2. (a) L'applicazione $f(x) = 2x(1-x)$ è una contrazione sull'intervallo $[0,1]$. Vero o falso?

(b) Trovare a, b con $a < b$ per cui l'applicazione

$$f(x) = \frac{2x}{3} + \frac{1}{x^2}$$

sia una contrazione su $[a,b]$ (c'è qualche scelta). Cos'è il valore del punto fisso di f in $[a,b]$?

(c) Sia $X = C[0,1]$ lo spazio delle funzioni continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ con la distanza $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt$. Si consideri l'applicazione $\mathscr{F}\colon X \to X$ dove

$$(\mathscr{F} f)(x) = x + \tfrac{1}{2} \int_0^1 f(t) \sin(xt)\,dt, \qquad x \in [0,1].$$

Verificare che $\mathscr{F}$ è una contrazione. Ammette un punto fisso in X?

3. Sia X uno spazio topologico *compatto* e C_n è una successione (con $n \geqslant 1$) di sottoinsiemi *chiusi* di X tale che $C_n \supseteq C_{n+1}$ per ogni $n \geqslant 1$. Si indichi con

$$C_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

l'intersezione di tutti gli sottoinsiemi C_n.

(a) Considerando $X \setminus C_\infty$, verificare che $C_\infty = \varnothing$ se e solo se $\{X \setminus C_n : n \geqslant 1\}$ è un ricoprimento di X. Dedurre (dalla compatezza di X e il fatto che $X \setminus C_n \subseteq X \setminus C_{n+1}$) che, in questo caso, $C_n = \varnothing$ per qualche n.

Sia Y uno spazio di Hausdorff (con $Y \neq \varnothing$) e sia $f \colon X \to Y$ un'applicazone continua con la proprietà che $f(C_n) = Y$ per ogni n.

(b) Dedurre dal punto (a) che C_∞ non è vuoto.

(c) Si fissi $y \in Y$. Verificare che, per ogni n, il sottoinsieme $f^{-1}(y) \cap C_n$ è chiuso e non-vuoto, e dedurre che $f^{-1}(y) \cap C_\infty \neq \varnothing$. Dedurre che $f(C_\infty) = Y$.

4. (a) Descrivere come si ottiene la bottiglia di Klein K come quoziente del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ identificando punti del bordo. Spiegare che esistono due lacci α, β in K con lo stesso punto base x_0 tale che valga l'equazione

$$[\alpha][\beta][\alpha] = [\beta]$$

nel gruppo fondamentale $\pi_1(K, x_0)$. Dire se questo gruppo è infinito o no, giustificando brevemente la risposta.

(b) Il toro T è lo spazio topologico ottenuto come quoziente del parallelogramma, identificando i punti in parallelo dei lati apposti. Usando questo fatto e il disegno (da copiare), o in un altro modo, spiegare perché T è anche lo spazio ottenuto da un esagono, identificando i punti dei lati apposti nello stesso modo.