Complementi di Matematica 06/07/2011 2 ore

1. Sia $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Si consideri

$$A = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^* = \{x + iy : y \neq 0 \text{ oppure } x = y = 0\}$$

con la topologia indotta da $\mathbb{R}^2$. Dopo aver fatto un disegno, dire se A è

(i) aperto in $\mathbb{R}^2$,

(ii) connesso,

(iii) connesso per archi,

(iv) semplicemente connesso,

(v) omeomorfo a $\mathbb{C}$.

Sia Q il quoziente di A rispetto alla coniugazione complessa (cioè, identificando i due punti $(x, y) \sim (x, -y)$ di A per ogni $y > 0$). Lo spazio topologico Q è Hausdorff?

Giustificare tutte le risposte.

2. Dare la definizione di *completo* per uno spazio metrico.

Quali dei seguenti spazi sono necessariamente completi?

(i) il sottoinsieme $(0, 1)$ di $\mathbb{R}$ con la solita distanza;

(ii) il sottoinsieme $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ di $\mathbb{R}$ con la solita distanza;

(iii) $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$;

(iv) il sottoinsieme $\mathbb{Z}$ di $\mathbb{R}$ con la solita distanza;

(v) il sottoinsieme $\mathbb{Z}$ di $\mathbb{R}$ con la distanza p-adica (p è un numero primo fissato);

(vi) la 'sfera' $\{f \in C[0, 1] : \|f\|_{\sup} = 1\}$ in $C[0, 1]$ con la norma $\|f\|_{\sup} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$;

(vii) un sottoinsieme limitato di $C[0, 1]$ rispetto alla norma $\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(t)|\, dt$;

(viii) un sottoinsieme compatto di $C[0, 1]$ con la norma $\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$.

Giustificare tutte le risposte.

3. (i) Dimostrare che ogni funzione continua $f\colon [0,1] \to [0,1]$ ha almeno un punto fisso. Cosa si può dire dei punti fissi se $|f(x)-f(y)| = |x-y|$ per ogni $x,y \in [0,1]$?

(ii) Dimostrare che se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile con $f(p)=p$ e $f'(p)=0$ allora f definisce una contrazione $[p-\delta, p+\delta] \to [p-\delta, p+\delta]$ per qualche $\delta > 0$.

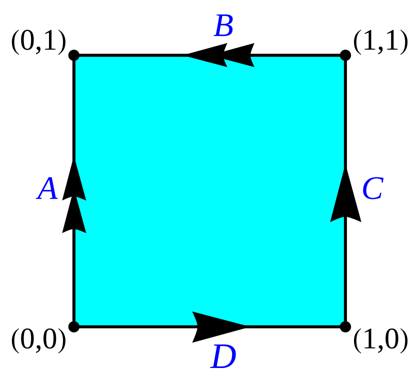
(iii) Verificare (ad esempio, tramite la condizione di Cauchy) che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\cos(kx)$ definisce un elemento di $L^2[0,2\pi]$, e che quest'elemento non appartiene a $C[0,2\pi]$.

(iv) Dimostrare che un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra spazi topologici X, Y tale che

$$f(\,\overline{A}\,) \subseteq \overline{f(A)} \qquad \text{per ogni } A \subset X$$

è necessariamente continua.

4. Sia $X = [0,1] \times [0,1]$. Si consideri il quoziente Q definito partendo da X identificando i lati del bordo: A con B, e C con D, nei modi indicati:



Spiegare perché l'applicazione $\pi\colon X \to Q$ è continua. Spiegare (eventualmente con un disegno) perché ogni punto di Q è contenuto in un (piccolo) aperto omeomorfo a $(0,1) \times (0,1)$.

Cos'è la cardinalità dell'insieme $\pi(\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\})$?

Sia $\alpha\colon [0,1] \to X$ il camino con $\alpha(t) = (0,t)$. Verificare che $\tau = \pi \circ \alpha$ è un laccio in Q e dimostrare che $[\tau]^2 = e$ nell'opportuno gruppo fondamentale.

È vero che Q è omeomorfo al quoziente della solita sfera $S^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{v}\| = 1\}$, identificando ogni punto $\mathbf{v}$ con il punto antipodale $-\mathbf{v}$? Giustificare la risposta.