3.2 Quozienti 06/04/2011

Dato un insieme qualsiasi X, sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X. Indichiamo con $Q = X/\!\sim$ l'insieme delle classi di equivalenza e con $\pi\colon X \to Q$ l'applicazione *suriettiva* che manda un elemento di X nella classe che lo contiene. In questo modo, $\pi^{-1}(q)$ è esattamente il sottoinsieme di X che q rappresenta e

$$X = \bigsqcup_{q\in Q} \pi^{-1}(q).$$

si esprime come unione disgiunta delle classi, cioè la partizione definita da $\sim$.

Quoziente di un gruppo finito. Sia $X = S_4$ il gruppo delle permutazioni di $\{1,2,3,4\}$. Si consideri il sottogruppo

$$V = \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$$

generato da coppie di trasposizioni disgiunte. Scriviamo $x \sim y$ per indicare $x^{-1}y \in V$, equivale $xV = yV$, cioè x, y appartengono allo stesso laterale sinistra. Tali laterali definiscono una partizione del gruppo quindi $\sim$ è una relazione di equivalenza; i laterali sono organizzati colonna per colonna nella tabella. Ogni elemento di $Q = \{xV : x \in S_4\}$ è indicato sotto la rispettiva colonna e π agisce in modo verticale:

$\pi \downarrow$

e	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
(12)(34)	(134)	(234)	(34)	(1234)	(1342)
(13)(24)	(243)	(124)	(1324)	(24)	(1243)
(14)(23)	(142)	(143)	(1423)	(1432)	(14)
eV	$(123)V$	$(132)V$	$(12)V$	$(13)V$	$(23)V$

In realtà, V è un sottogruppo *normale* di S_4 perché (ad esempio)

$$\sigma^{-1}(12)(34)\sigma = (1'\,2')(3'\,4') \in V,$$

dove $1' = 1\sigma$ è l'immagine di 1 applicando σ. Segue che $\sigma^{-1}V\sigma = V$ per ogni $\sigma \in S_4$, equivale a dire $\sigma V = V\sigma$ e non c'è distinzione tra laterale sinistra/destra. Per questo motivo la moltiplicazione degli elementi di S_4 rispetta la partizione sopra in colonne e l'insieme dei sei colonne, cioè Q, acquisisce la struttura di un gruppo.

Esercizio 3.2.1. Verificare che questo quoziente S_4/V è isomorfo a S_3 (la scelta dei rappresentanti dei laterali dovrebbe aiutare!)

Torniamo a considerare uno spazio topologico $(X, \mathscr{T})$.

Lemma/Definizione. La famiglia

$$\mathscr{T}_Q = \{V \subseteq Q : \pi^{-1}(V) \in \mathscr{T}\}$$

è una topologia. Lo spazio topologico $(Q, \mathscr{T}_Q)$ si chiama *quoziente* di X per $\sim$.

Esercizio 3.2.2. Dimostrare il lemma, cioè verificare che tre regole (A1),(A2),(A3) per $\mathscr{T}_Q$.

Se un insieme X ha una certa struttura, è naturale chiedere se un suo quoziente $Q = X/\sim$ ha lo stesso tipo di struttura. Per definire un quoziente di gruppi è necessario che $\sim$ provenga da un *sottogruppo normale*. Per uno spazio topologico invece, 3.2.2 ci dice che il quoziente è sempre dotato da una topologia in modo naturale.

Segue dalla definizione che per ogni V aperto in Q abbiamo $f^{-1}(V)$ aperto in X; quindi π è *continua*. Infatti, di tutte le topologie su Q che rendono π continua, $\mathscr{T}_Q$ è *la più fine*, in cui prendiamo più aperti possibili. Il concetto è analogo a quello usato per definire la topologia indotta su un sottoinsieme $Y \subseteq X$; qui c'è un'applicazione *iniettiva*

$$i\colon Y \to X, \tag{1}$$

ossia l'inclusione. Visto che $i^{-1}(V) = V \cap Y$, la topologia $\mathscr{T}_Y$ è *la meno fine*, in cui prendiamo meno aperti possibili, per rendere i continua.

Quoziente di un gruppo topologico. Sia $X = \mathbb{R}$, con $s \sim t$ che sta per $s-t \in \mathbb{Z}$. Ogni classe di equivalenza è un laterale $t+\mathbb{Z} = \{t+n : n \in \mathbb{Z}\}$ associato al sottogruppo $\mathbb{Z}$ di $(\mathbb{R}, +)$ e Q coincide con il gruppo quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ come insieme. Possiamo identificare Q con la circonferenza

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C},$$

tramite la biiezione $f\colon Q \to \Gamma$ con $f(t + \mathbb{Z}) = e^{2\pi i t}$. Sia $\mathscr{T}_\Gamma$ la topologia indotta su $\Gamma \subset \mathbb{C}$, come spiegato intorno a (1). Allora la biiezione

$$f\colon (Q, \mathscr{T}_Q) \longrightarrow (\Gamma, \mathscr{T}_\Gamma) \tag{2}$$

è un omeomorfismo.

Dimostrazione. Una base per la solita topologia su $\mathbb{C}$ consiste dei dischi $S_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\}$. Segue che una possibile base di $\mathscr{T}_\Gamma$ consiste degli *archi aperti* di tipo $\Gamma_{a,b} = \{e^{2\pi i x} : a < x < b\}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$ e, diciamo, $b - a < \frac{1}{10}$). Visto che

$$\pi^{-1}(f^{-1}(\Gamma_{a,b})) = (a, b) + \mathbb{Z} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} (a + n, b + n),$$

abbiamo $f^{-1}(\Gamma_{a,b}) \in \mathscr{T}_Q$. Quindi, f è continua. Se invece $V \in \mathscr{T}_Q$ allora $\pi^{-1}(V)$ è aperto in $\mathbb{R}$ e sarà un'unione di intervalli (a, b). Segue che $f(V)$ è un'unione di insiemi $\Gamma_{a,b}$ ed è aperto. Quindi f^{-1} è continua. $\square$

Esercizio 3.2.3. Definire una relazione di equivalenza $\sim$ su $[0, 1]$ identificando i punti estremi: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \{0, 1\}$. Si considerino i due quozienti topologici $C = [0, 1]/\sim$, e $Q = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ in (2). Verificare che l'inclusione $i\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definisce un omeomorfismo $j\colon C \to Q$ (nel senso che $j \circ \pi = \pi \circ i$).

3.2.4. In classe abbiamo visto il seguente teorema. Data un'isometria $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ per la solita distanza Euclidea (cioè, $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$), esistono una matrice ortogonale $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ e un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tali che $f(\mathbf{x}) = P\mathbf{x} + \mathbf{v}$. Ri-scrivere la dimostrazione completando i vari passi.