3.1 Prodotti 05/04/2011

Sia $(X, \mathscr{T})$ uno spazio topologico.

Definizione. Una sottofamiglia $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ si chiama una *base* di $\mathscr{T}$ se ogni elemento di $\mathscr{T}$ può essere espresso come un'unione di elementi di $\mathscr{B}$. (Per convenzione, $\varnothing$ è un'unione $\bigcup U_\lambda$ con $\lambda \in \varnothing$!)

Ovviamente $\mathscr{B} = \mathscr{T}$ soddisfa la definizione, ma l'idea è di definire la topologia di X in modo più economico, usando solo una selezione degli aperti disponibili:

Esempio. Sia $\mathscr{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$. Allora $\mathscr{B}$ è una base per la solita topologia di $\mathbb{R}$. (Osservate che $\mathscr{B}$ contiene $\varnothing$ perché possiamo prendere $a > b$, ma non contiene $\mathbb{R}$ soltanto per scelta.) Sappiamo già che ogni aperto in $\mathscr{T}$ è l'unione di intorni sferici di tipo $S_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) \in \mathscr{B}$.

Lemma. Se X è un insieme dotato da una famiglia $\mathscr{B}$ di sottoinsiemi tale che

(B1) X è un'unione di elementi di $\mathscr{B}$;

(B2) $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ implica che $B_1 \cap B_2$ è un'unione di elementi di $\mathscr{B}$ (in prattica vale spesso $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$);
Allora $\mathscr{T} = \{V \subseteq X : V$ è un'unione di elementi di $\mathscr{B}\}$ è una topologia su X.

Osservate che (B1) e (B2) valgono se sappiamo già che $\mathscr{B}$ è una base secondo la definizione. Per la dimostrazione, verifichiamo:

(A1) Certamente X (e per convenzione, $\varnothing$) appartengono a $\mathscr{T}$.

(A2) Un'unione qualsiasi di unioni di elelemnti di $\mathscr{B}$ è sempre un'unione di elementi di $\mathscr{B}$. (Esercizio: scrivere bene quest'affermazione in simboli!)

(A3) Se $U = \bigcup B_\lambda$ e $V = \bigcup B_\mu$,

$$U \cap V = \bigcup_{\lambda,\mu} B_\lambda \cap B_\mu$$

è di nuovo un'unione di elementi di $\mathscr{B}$. □

Esempio. Sia $\mathscr{B} = \{(a,b) \times (c,d) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$. Allora $\mathscr{B}$ è una base per la solita topologia per $\mathbb{R}^2$.

L'ultimo esempio ci permette di definire in modo facile una il prodotto di due spazi topologici. Dati $(X, \mathscr{T}_X), (Y, \mathscr{T}_Y)$, si consideri il prodotto cartesiano

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X,\ y \in Y\},$$

i cui elementi sono coppie ordinate. Allora

$$\mathscr{B} = \{U \times V : U \in \mathscr{T}_X,\ V \in \mathscr{T}_Y\} \tag{1}$$

è una base per una topologia $\mathscr{T}$. Segue facilmente perché è chiuso rispetto alle intersezioni:

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2).$$

Osservare invece che $\mathscr{B}$ non è una topologia perché fallisce l'assioma (A2). In ogni caso, $(X \times Y, \mathscr{T})$ è uno spazio topologico, detto *prodotto* di X e Y.

Esercizio 3.1.1. Potremmo ripetere la definizione della topologia prodotto, prendendo invece una base più economico

$$\mathscr{B}' = \{U \times V : U \in \mathscr{B}_X,\ V \in \mathscr{B}_Y\}$$

dove $\mathscr{B}_X$ è una qualsiasi base per $\mathscr{T}_X$ e $\mathscr{B}_Y$ una base per $\mathscr{T}_Y$. (In realtà, è stato fatto così a lezione, ma rimane da controllare che la topologia che risulta è la stessa.)

Applicata a $X = Y = \mathbb{R}$ con la solita topologia, questa costruzione dà origine a $\mathbb{R}^2$ con la solita topologia. Una costruzione analoga (o per induzione) funziona per $\mathbb{R}^n$. In generale, si può pensare a $U \times V$ come a un 'rettangolo' di $X \times Y$ (anche se, per $X = Y = \mathbb{R}$, sarà un vero rettangolo solo se $U = (a, b)$ e $V = (c, d)$ sono intervalli).

Si considerino le proiezioni

$$\begin{aligned} \pi_X &: X \times Y \to X, \quad (x, y) \mapsto x, \\ \pi_Y &: X \times Y \to Y, \quad (x, y) \mapsto y. \end{aligned}$$

Se U è aperto in X allora $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ appartiene alla base $\mathscr{B}$ definita in (1), e quindi è aperto in $X \times Y$. Come conseguenza, π_X (e per lo stesso motivo, π_Y) è continua.

Supponiamo invece di avere un'altra topologia $\widetilde{\mathscr{T}}$ su $X \times Y$ per cui π_X, π_Y siano continue. Se U è aperto in X e V è aperto in Y allora

$$U \cap V = \pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V) \in \widetilde{\mathscr{T}}.$$

Segue che la topologia prodotto è la topologia *la meno fine* per cui

$$\text{entrambe le applicazioni } \pi_X, \pi_Y \text{ siano continue.} \tag{2}$$

Cioè, prendiamo solo gli aperti necessari per garantire che la validità di (2).

Esercizio 3.1.2. Dimostrare che l'insieme numerabile $\mathscr{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ è una base per la solita topologia di $\mathbb{R}$.

3.1.3. Supponiamo che X, Y sono spazi topologici e che $\mathscr{B}_Y$ è una base per Y. Allora $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se

$$B \in \mathscr{B}_Y \ \Rightarrow\ f^{-1}(B) \in \mathscr{T}_X.$$

Verificare che $f\colon X \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se $f^{-1}(-\infty, c)$ e $f^{-1}(c, \infty)$ sono aperti per ogni $c \in \mathbb{R}$.

3.1.4. Dati due spazi topologici X, Y, dimostrare che l'applicazione

$$f\colon X \times Y \to Y \times X, \qquad (x, y) \mapsto (y, x),$$

è un omeomorfismo per la topologia prodotto.

3.1.5. Dimostrare che $f\colon Z \to X \times Y$ è continua se e solo se $\pi_X \circ f$ e $\pi_Y \circ f$ e lo sono (qui, $X \times Y$ ha la topologia prodotto).