Siano $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici.

Definizione. Questi spazi si dicono *omeomorfi* (scritto $X \approx Y$) se esiste una biiezione $f: X \to Y$ tale che entrambe f ed f^{-1} siano continue. Una tale applicazione f si chiama *omeomorfismo*.

Un omeomorfismo f ha la proprietà che

$$V \text{ aperto} \quad \Rightarrow \quad f(V) \text{ aperto}.$$

perché $f(V) = (f^{-1})^{-1}(V)$. (Attenzione: qui ci sono due usi distinti del simbolo $^{-1}$.) Un omeomorfismo stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli aperti in X e gli aperti in Y.

Segue dalla definizione di continuità (mediante le controimmagini di aperti) che $\approx$ è una relazione di equivalenza, quindi definisce una partizione di spazi topologici in 'classi di omeomorfismi'.

Esempi. 1. Due qualsiasi intervalli aperti in $\mathbb{R}$ (con la solita metrica/topologia) sono omeomorfi. In particolare, $(0,1) \approx \mathbb{R}$ tramite

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}, \qquad f^{-1}(z) = \begin{cases} \dfrac{z-2+\sqrt{z^2+4}}{2z}, & z \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & z = 0. \end{cases}$$

La continuità di f^{-1} segue della regola di L'Hôpital in $z = 0$.

2. Invece $(0,1)$ non è omeomorfo a $[0,1]$ (sempre come sottospazi di $\mathbb{R}$). Il secondo è *compatto*, il primo no, e vedremo nel seguito che la compattezza è una proprietà topologica che deve essere conservata da un omeomorfismo. Un argomento piì 'primitivo' è il seguente. Si consideri il sottoinsieme $A = \{\frac{1}{n} : n = 1,2,3,\ldots\}$ di $(0,1)$. Avendo un omeomorfismo $f: (0,1) \to [0,1]$, otteniamo un insieme infinito $\{f(\frac{1}{n}) : n = 1,2,3,\ldots\}$ che (essendo limitato) deve avere un punto di accumulazione a in $\mathbb{R}$, anzi in $[0,1]$ (l'ultimo essendo chiuso). Quindi ogni aperto che contiene a deve contenere qualche $f(\frac{1}{n})$. Ma $f^{-1}(a)$ (che appartiene in $(0,1)$) non ha la proprietà analoga per A.

3. I sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ rappresentati dai caratteri Q ∝ sono omeomorfi.

Esercizio 2.3.1. Data una funzione continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

il suo grafico. Verificare che $\Gamma_f \approx \mathbb{R}$.

2.3.2. Si consideri il 'disco'

$$D^p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p < 1\}.$$

Fissando p, q con $0 < p < q$, definire un omeomorfismo $D^p \to D^q$ usando le norme $\|(x,y)\|_p, \|(x,y)\|_q$ (che sappiamo già sono funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue).

Proposizione. Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo e sia A un qualsiasi sottoinsieme di X. Allora la restrizione

$$f|_A\colon A \to f(A)$$

è un omeomorfismo tra i sottospazi $A \subseteq X$ e $f(A) \subseteq Y$.

Dimostrazione. Per definizione, gli aperti di A sono gli insiemi $A \cap V$ con $V \in \mathscr{T}_X$. Segue che

$$f(A \cap V) = f(A) \cap f(V)$$

è aperto in $f(A)$. Stessa cosa per f^{-1}. $\square$

Corollario (tipico). Il disco $D^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ non è omeomorfo a $(0, 1)$.

Lo dimostriamo in seguito osservando che D^2 meno l'origine $\mathbf{0}$ è *connesso per archi*, mentre $(0, 1)$ meno un qualsiasi punto non lo è. Dati due punti $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in X = D^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, esiste certamente un'applicazione continua $\gamma\colon [0, 1] \to X$ con $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$ e $\gamma(1) = \mathbf{x}_1$ (se $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ non sono sullo stesso diametro, basta prendere $\gamma(t) = t\mathbf{x}_0 + (1 - t)\mathbf{x}_1$). La composizione

$$f \circ \gamma : [0, 1] \to (0, a) \cup (a, 1), \qquad a = f(\mathbf{0}),$$

con un ipotetico omeomorfismo dà origine ad una contraddizione dal teorema del valore intermedio, se $f(\mathbf{x}_0) < a$ e $f(\mathbf{x}_1) > a$.

Esercizio 2.3.3. Disegnare $X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$. È vero che X (come sottospazio di $\mathbb{R}^2$) è omeomorfo a $\mathbb{R}$? È vero che

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2\}, \qquad \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$$

sono omeomorfi (come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$)?

Definizione. Uno spazio topologico si dice *Hausdorff* o *T2* se qualsiasi due punti distinti x_1, x_2 di X sono contenuti in rispettivi aperti che sono disgiunti:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2,\ \exists V_1, V_2 \in \mathscr{T}_X \text{ con } V_1 \cap V_2 = \varnothing \text{ e } x_i \in V_i.$$

La solita topologia di $\mathbb{R}$ è Hausdorff. Infatti, ogni spazio metrico è Hausdorff: se $\delta = d(x_1, x_2)$ basta definire $V_i = S_{\delta/2}(x_i)$ per avere $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ da (M3).

Esercizio 2.3.4. Abbiamo visto che lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \widetilde{\mathscr{T}})$ del 2.2.4 non è Hausdorff. Dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_{PR})$ non è Hausdorff, quindi non metrizzabile.

2.3.5. Sia $\mathscr{C}$ un cubo con centro l'origine $\mathbf{0}$. Sia G l'insieme delle rotazioni $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con centro $\mathbf{0}$ tali che $R(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. Spiegare perché G è un gruppo (con prodotto la composizione delle rotazioni). Definire un isomorfismo tra G e il gruppo S_4 delle permutazioni di $\{1, 2, 3, 4\}$.