2.2 CONTINUITÀ E CHIUSURA 29/03/2011

Siano $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici. Ricordiamo che $f \colon X \to Y$ è continua se

$$V \in \mathcal{T}_Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X.$$

Esempi: Un'applicazione costante $X \to Y$, per cui $f(X) = \{y\}$ e $f^{-1}(V) = X$ o $\varnothing$. L'applicazione identità $X \to X$ per cui $f^{-1}(V) = V$.

Conseguenza della definizione: Se $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ sono continue, allora la composizione

$$g \circ f \colon X \to Z$$

è continua.

Invece, se $f \colon X \to Y$ è biiettiva e continua, non è detto che f^{-1} sia continua.

Contro-esempi: (i) $X = \mathbb{R}^2$ con la solita topologia, $Y = \mathbb{R}^2$ con $\mathcal{T}_{\mathrm{PR}}$. Allora l'applicazione identità $X \to Y$ è continua, ma quella $Y \to X$ non lo è.
(ii) $X = [0, 2\pi)$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}$, e $Y = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}^2$. Allora $f(t) = (\cos t, \sin t)$ definisce una biiezione continua $X \to Y$. Ma f^{-1} non è continua (perché?).

Possiamo adottare le definizioni di chiusura e derivata già fatte per uno spazio metrico.

Definizione. Dato un qualsiasi sottoinsieme non-vuoto W di X, siano

$$\begin{array}{rcll} \overline{W} & = & \{x \in X : \ x \in V \in \mathcal{T} \ \Rightarrow \ V \cap W \neq \varnothing\} & \supseteq W \\ W' & = & \{x \in X : \ x \in V \in \mathcal{T} \ \Rightarrow \ (V \setminus \{x\}) \cap W \neq \varnothing\} & \subseteq \overline{W} \end{array}$$

Per $\overline{W}$, stiamo chiedendo se $V \cap W$ è non-vuoto per *ogni* aperto V che contiene x.

Lemma.
(i) $\overline{W}$ è chiuso.
(ii) $\overline{W} = \bigcap \{F \text{ chiuso } : \ W \subseteq F\}$.
(iii) W è chiuso se e solo e $W = \overline{W}$.

Dimostrazioni. (i) Data $x \in A = X \setminus \overline{W}$, esiste $V_x \in \mathcal{T}$ tale che

$$x \in V_x \quad \text{ma} \quad V_x \cap W = \varnothing$$

(se no, x soddisfa la condizione che caratterizza $\overline{W}$). Visto che $V_x \in \mathcal{T}$ e $V_x \cap W = \varnothing$, possiamo affermare che nessun elemento di V_x appartiene a $\overline{W}$. Quindi, $V_x \subseteq A$. Segue che $A = \bigcup_{x \in A} V_x$ è aperto, essendo un'unione di aperti.

(ii) Sia $\mathcal{I}$ l'intersezione a destra. Dato un chiuso F che contiene W, $V = X \setminus F \in \mathcal{T}$ e $V \cap W = \varnothing$; segue che nessun punto di V appartiene a $\overline{W}$ e $\overline{W} \subseteq F$. Quindi $\overline{W} \subseteq \mathcal{I}$. Per verificare che $\mathcal{I} \subseteq \overline{W}$, basta osservare che $\overline{W}$ è chiuso, quindi è uno degli insiemi F di cui si fa l'intersezione.

(iii) Se $W = \overline{W}$, è chiuso! Invece, se W è chiuso, è uno degli insieme di cui si fa intersezione in (ii), quindi $\overline{W} = \mathscr{I} \subseteq W$. Ma $W \subseteq \overline{W}$ sempre, quindi $W = \overline{W}$. □

Esercizio 2.2.1. Sia $(X, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Dedurre dal Lemma che $\overline{\overline{W}} = \overline{W}$ per ogni sottoinsieme W di X (facile!), e anche che $\overline{W} = W \cup W'$.

2.2.2. Sia $W_p = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^p}) : n = 1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{R}^2$. Trovare $\overline{W_0}, \overline{W_1}, \overline{W_2}$ relativo alla topologia $\mathscr{T}_{\mathrm{PR}}$ della §2.1. Le tre chiusure sono distinte?

Abbiamo visto che f è continua se e solo se

$$C \text{ è chiuso in } Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(C) \text{ è chiuso in } X.$$

Ad esempio, se $Y = \mathbb{R}$ e $\mathscr{T}$ è la solita topologia, $\{y\}$ è sempre chiuso e quindi $f^{-1}(y)$ è sempre chiuso in X se f è continua. Questo fatto vale più in generale se Y è un cosiddetto *spazio di Hausdorff*.

Mentre continuità è definita in termini di *controimmagini*, la seguente proprietà riguarda le *immagine* di sottoinsiemi arbitrari.

Proposizione. f è continua se e solo se

$$f(\,\overline{A}\,) \subseteq \overline{f(A)} \quad \text{per ogni sottoinsieme } A \text{ di } X.$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua. Sia $W = \overline{f(A)}$. Allora $f^{-1}(W)$ è chiuso e contiene A. Segue che $\overline{A} \subseteq f^{-1}(W)$ (ricordiamo che $\overline{A}$ è il *più piccolo* chiuso che contiene A) e quindi $f(\,\overline{A}\,) \subseteq W$.

Esercizio 2.2.3. Il viceversa della proposizione! Sia C chiuso in Y; per mostrare che $f^{-1}(C)$ sia chiusa, si ponga $A = f^{-1}(C) \ldots$ □

2.2.4. Sia $X = \mathbb{R}$. Si consideri una topologia non-standard

$$\widetilde{\mathscr{T}} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$$

(è facile verificare le condizioni sulle intersezioni di due elementi e sulle unioni arbitrarie). Dato $a \in \mathbb{R}$, la chiusura $\overline{\{a\}}$ deve essere uguale a $[a, \infty)$. Usare la proposizione per concludere che un'applicazione continua

$$f \colon (\mathbb{R}, \widetilde{\mathscr{T}}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T})$$

è necessariamente costante.