2.1 SPAZI TOPOLOGICI 23/03/2011

Una *topologia* su un insieme è una dichiarazione di quali sottoinsiemi sono aperti:

Definizione. Uno *spazio topologico* consiste in un insieme non-vuoto X e una famiglia (cioè, insieme) di sottoinsiemi $\mathscr{T}$ (gli 'aperti') tale che

(A1) $X, \varnothing \in \mathscr{T}$;
(A2) $\{V_\alpha\} \subseteq \mathscr{T} \;\Rightarrow\; \bigcup V_\alpha \in \mathscr{T}$;
(A3) $V_1, V_2 \in \mathscr{T} \;\Rightarrow\; V_1 \cap V_2 \in \mathscr{T}$.

Segue che un'intersezione finita di aperti è aperto, mentre un'unione (eventualmente non numerabile) di aperti è aperto.

Una metrica d su X induce una topologia $\mathscr{T}$ ponendo

$$\mathscr{T} = \{V \subseteq X \;:\; \forall x \in V \;\; \exists \delta > 0 \;\text{ t.c. } S_\delta(x) \subseteq V\},$$

ma diverse metriche possono indurre la stessa topologia. In particolare, la solita topologia di $\mathbb{R}^n$ è quella compatibile con la p-norma per ogni p con $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

Esercizio 2.1.1. Siano d, d' metriche su X per cui esistono costanti $0 < c_1 < c_2$ tali che

$$c_1 d(x,y) \leqslant d'(x,y) \leqslant c_2 d(x,y), \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Dimostrare che un sottoinsieme V è aperto relativo a d se e sole se è aperto relativo a d'. Si può dire che d, d' sono *topologicamente equivalenti*.

Dato un insieme X con almeno due elementi, la topologia 'stupida' $\mathscr{T} = \{X, \varnothing\}$ non è *metrizzabile*, cioè non proviene da nessuna metrica. Invece, la topologia $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$ ugualmente estrema che contiene *ogni* sottoinsieme è indotta dalla metrica discreta (quella per cui $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$).

Sia $(X, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Come per uno spazio metrico, un sottoinsieme C di X si dice *chiuso* se $X \setminus C \in \mathscr{T}$. Si può specificare uno spazio topologico dando la famiglia di chiusi che soddisfano le condizioni (C 1,2,3) elencate nella §1.5.

Esempio. Sia $X = \mathbb{R}^2$. Allora

$$\mathscr{T}_{\mathrm{PR}} = \{\mathbb{R}^2 \setminus C : \; C \text{ è un'unione finita di punti e rette}\} \cup \{\mathbb{R}^2, \varnothing\}$$

definisce una topologia *meno fine* di quella solita $\mathscr{T}$, nel senso che $\mathscr{T}_{\mathrm{PR}} \subsetneq \mathscr{T}$.

Sia $(X, \mathscr{T})$ uno spazio topologico e sia Y un sottoinsieme qualsiasi di X. Allora

$$\mathscr{T}_Y = \{V \cap Y \;:\; V \in \mathscr{T}\}$$

soddisfa (A 1,2,3) per Y al posto di X. Otteniamo il *sottospazio topologico* $(Y, \mathscr{T}_Y)$. Se $\mathscr{T}$ è indotta da una metrica d allora $\mathscr{T}_Y$ è indotta dalla metrica ristretta $d|_Y$.

Il contesto di spazio topologico è quello giusto per parlare della continuità :

Definizione. Siano $(X, \mathscr{T}_X)$, $(Y, \mathscr{T}_Y)$ due spazi topologici. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ si dice *continua* se

$$V \in \mathscr{T}_Y \;\;\Rightarrow\;\; f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X.$$

Abbiamo visto che questa è consistente con quello che succede tra spazi Euclidei.