1.5. Insiemi chiusi e convergenza 22/03/2011

Sia (X, d) uno spazio metrico, con $A \subseteq X$.

Definizione. La *chiusura* di A è l'insieme

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \;\; S_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing\} \supseteq A.$$

Esempio: Se $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$, allora $A = \{0\} \cup A$.

Ricordiamo che $C \subseteq X$ si dice *chiuso* se $X \setminus C$ è aperto. Il seguente risultato spiega il nome di $\overline{A}$.

Proposizione. C è chiuso se e solo se $C = \overline{C}$.

Dimostrazione. Supponiamo che C sia chiuso. Sia $x \in X \setminus C$, un sottoinsieme aperto. Esiste $\delta > 0$ tale che $S_\delta(x) \subseteq X \setminus C$, da cui segue e $x \notin \overline{C}$. Quindi $C = \overline{C}$.
Viceversa, supponiamo che $C = \overline{C}$. Sia $x \in X \setminus C$. Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $S_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus C$, perché altrimenti $x \in \overline{C}$. Quindi C è chiuso. $\square$

Esercizio 1.5.1. Usando la definizione in termini di complementi, mostrare che la famigla di insiemi chiusi gode le seguenti proprietà:
(C1) X e $\varnothing$ sono chiusi;
(C2) una qualsiasi intersezione (anche infinita) di insiemi chiusi è chiuso;
(C3) se C_1, C_2 sono chiusi, anche $C_1 \cap C_2$ è chiuso.
Dimostra (C2) e (C3) anche partendo della proposizione sopra.

1.5.2. Dato A, la sua chiusura è l'insieme chiuso più piccolo che contiene A, cioè (i) $\overline{A}$ è chiuso e (ii) $A \subseteq B$ con B chiuso implica $\overline{A} \subseteq B$. Inoltre,

$$\overline{A} = \bigcap \{B : \overline{A} \subseteq B, \;\; B \text{ chiuso }\}.$$

Definizione. L'insieme dei *punti di accumulazione* di A è

$$A' = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \;\; (S_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing\} \subseteq \overline{A}.$$

Esempi: Se $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$, allora $A' = \{0\}$.
Se $A = \mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0\}$, allora $A' = \mathbb{R} = \overline{A}$.
Vedremo che, in generale, $\overline{A} = A \cup A'$ e A' è sempre chiuso.

Possiamo caratterizzare A' in termini di convergenza. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme di numeri 'naturali', con o senza 0 (non importa). Una *successione* nello spazio metrico X è una funzione $a \colon \mathbb{N} \to X$, solo che scriviamo a_n al posto di $a(n)$. Quindi a è determinato dalla seguenza $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ se cominciamo con $n = 1$. Mentre c'è un numero infinito di tali valori, l'*insieme* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ può essere finito.

Esempio: Se $X = (\mathbb{C}, |z-w|)$ e $a_n = i^n$, allora

$$\begin{aligned}
(a_n) &= (\, i\,, -1, -i,\, 1\,,\, i\,, -1, -i,\, 1\,,\, i\,,\, \ldots \qquad),\\
\{a_n\} &= \{\, i\,, -1, -i,\, 1\,\} = \{\,1\,, -1,\, i\,, -i\}.
\end{aligned}$$

Definizione. Una successione (a_n) *converge* se esiste $\ell \in X$ tale che, *per ogni* $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geqslant N \;\Rightarrow\; a_n \in S_\varepsilon(\ell).$$

Equivale a dire che

$$d(a_n, \ell) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Si scrive: $a_n \to \ell$ per $n \to \infty$. Il limite ℓ è unica: se $a_n \to \ell$ e $a_n \to \ell'$ allora

$$d(\ell, \ell') \leqslant d(\ell, a_n) + d(a_n, \ell') \to 0,$$

da cui segue che $\ell = \ell'$.

Esempio: Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}.$$

Siano $a_0 = 1$ e $a_n = f(a_{n-1})$ per $n \geqslant 1$. Allora $a_n \to \sqrt{2}$; a 50 posti decimali:

$$\begin{aligned}
a_6 &= 1.41421356237309504880168872420969807856967187537772\\
\sqrt{2} &= 1.41421356237309504880168872420969807856967187537769
\end{aligned}$$

Se $a_0 < 0$ allora $a_n \to -\sqrt{2}$ velocemente.

A questo punto, è facile verificare A' è l'insieme dei *punti limiti* di A in questo senso: x appartiene a A' se e solo se esiste una successione (a_n) in A tale che $a_n \to x$. Inoltre, C è chiuso se e solo se $\ell \in C$ per ogni successione (c_n) in C con $c_n \to \ell$.

Esercizio 1.5.3. Dimostrare che: (i) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$, e anche (ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.5.4. Dato un sottoinsieme A di uno spazio metrico (X, d), definiamo

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Allora $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

1.5.5. Sia A un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che anche $\overline{A}$ è convesso.

1.5.6. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione tra spazi metrici. Allora f è continua se e solo se, per ogni successione (x_n) in X, abbiamo

$$x_n \to \ell \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(\ell).$$

1.5.7. Sia A l'insieme degli zeri della funzione $\sin\Big(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}\Big)$. Descrivere A', $A'' = (A')'$ e verificare che $A''' = (A'')'$ sia vuoto.