1.4 La metrica p-adica 16/03/2011

Sia X = $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Si fissi un numero primo p. Ogni $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, si scrive in modo unico

$$x = p^r \frac{a}{b}, \qquad r, a, b, \in \mathbb{Z},\ b > 0.$$

In questo modo possiamo definire una funzione $\nu\colon \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ ponendo $\nu(x) = r$, e un tipo di 'norma' algebrica

$$\left| x \right| = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ p^{-\nu(x)} & x \neq 0, \end{cases}$$

allo scopo di introdurre la metrica p-adica $d(x, y) = \left| x - y \right|$.

Lemma. Valgono le seguenti proprietà :
(V1) $\left| x \right| = 0$ se e solo se $x = 0$;
(V2) $\left| xy \right| = \left| x \right| \left| y \right|$;
(V3) $\left| x + y \right| \leqslant \max(\left| x \right| , \left| y \right|)$.

La (V1) è immediata, anche la (V2) segue facilmente dalla definizione. Dimostriamo la (V3). Prima controlliamo un 'sottolemma' che dice che

$$\left| x \right| , \left| y \right| \leqslant 1 \ \Rightarrow \ \left| x + y \right| \leqslant 1.$$

Siano $x = p^r a/b$, $y = p^s a/d$ con $r, s \geqslant 0$. Se (ad esempio) $r \leqslant s$, abbiamo

$$x + y = p^r \Big(\frac{a}{b} + p^{s-r} \frac{c}{d} \Big) = p^r \Big(\frac{ad + p^{s-r} bc}{bd} \Big).$$

Visto che $p \nmid (bd)$, abbiamo $\left| x + y \right| \leqslant p^{-r}$ e vale il sottolemma.

In generale, se $\left| x \right| \leqslant \left| y \right|$, usando (N2)

$$\left| \frac{x}{y} \right| \left| y \right| = \left| x \right| \ \Rightarrow \ \left| \frac{x}{y} \right| \leqslant 1.$$

Quindi,

$$\left| \frac{x}{y} + 1 \right| \leqslant 1, \quad \text{e da (V2)} \quad \left| x + y \right| \leqslant \left| y \right| ,$$

da cui segue (V3).

È una conseguenza di (V3) che la metrica p-adica d soddisfa la regola

$$d(x, z) \leqslant \max \Big\{ d(x, y), d(y, z) \Big\}$$

di una cosiddetta *ultra-metrica*. Questa è più forte di (M3) perché $\max(a, b) \leqslant a + b$ per $a, b \geqslant 0$.

Adottando la metrica d, troviamo delle strane conseguenze. Ad esempio, definiamo d per $p = 7$. Allora

$$\frac{1}{3} = 5 + \sum_{n=1}^{\infty} 4.7^n. \tag{1}$$

Quest'equazione afferma che un certo limite esiste, ossia

$$\lim_{N\to\infty} d\Big(5 + \sum_{n=1}^{N} 4.7^n,\ \frac{1}{3}\Big) = 0,$$

equivalentemente

$$\left|5 + \sum_{n=1}^{N} 4.7^n - \frac{1}{3}\right| \to 0 \quad \text{per} \ \ N \to \infty.$$

Visto che $|3| = 1$, la (N2) implica

$$\left|5 + \sum_{n=1}^{N} 4.7^n - \frac{1}{3}\right| = \left|15 + \sum_{n=1}^{N} 12.7^n - 1\right|,$$

ma questo si riduce a $|2.7^{N+1}| = 2/7^{N+1}$ e di fatto tende a zero.

Per lo stesso motivo, possiamo dire che una qualsiasi serie

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n p^n, \qquad k \geqslant 0,\ \ a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, p\}$$

converge rispetto a d. La serie si chiama un *numero p-adico* o (se $a_n = 0$ per $n < 0$) un *intero p-adico*. È noto che ogni numero razionale è un intero p-adico nel senso che ammette uno sviluppo come quello di $1/3$ in (1) con $p = 7$.

Esercizio 1.4.1. Sia d la metrica 3-adica, cioè con $p = 3$. Trovare la successione (a_n), con $a_n \in \{0, 1, 2\}$, tale che

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^n. \tag{2}$$

Quest'equazione rappresenta una successione di congruenze

$$1 \equiv 2 \sum_{n=0}^{N} a_n 3^n \mod 3^{N+1}, \qquad N = 0, 1, 2, \ldots$$

L'intero p-adica rappresenta dalla serie in (2) è una soluzione simultanea a tutte queste congruenze, e si può trovare $a_0, a_1, a_2, \ldots$ per induzione. Ad esempio, a_0 è l'inversa di 2 modulo 3, quindi $a_0 = 2$.

1.4.2. Esprimere $1/5$ come un intero 7-adica.