9.3 ESERCIZI FINALI 21/06/2011

9.3.1. Vediamo adesso che, se X è connesso per archi, la scelta di x_0 non ha un grosso significato. Fissati $x_0, x_1 \in X$, sia $\sigma\colon [0,1] \to X$ un camino con $\sigma(0) = x_0$ e $\sigma(1) = x_1$. Dato un laccio γ basato in x_0, definire

$$\gamma^\sigma(t) = \begin{cases} \sigma(1-3t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3} \\ \gamma(3t-1) & \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3} \\ \sigma(3t-2) & \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

un tipo di concatenazione $\widetilde{\sigma} \star \gamma \star \sigma$. Verificare che

$$F\colon \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_1), \qquad F([\gamma]) = [\gamma^\sigma]$$

determina un *isomorfismo di gruppi*.

9.3.2. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua con la proprietà che $f(x_0) = y_0$. Dimostrare che l'applicazione 'indotta'

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \qquad f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma],$$

è un *omomorfismo* dei rispettivi gruppi. Dedurre che

$$X \text{ e } Y \text{ sono omeomorfi} \quad \Rightarrow \quad \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0).$$

Dare un esempio di due spazi X, Y connessi, ma *non* omeomorfi, per cui $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$.

9.3.3. Vedremo che l'insieme delle matrici 3×3 ortogonali con determinante 1 si può identificare con l'insieme $\mathscr{R}$ delle rotazioni in $\mathbb{R}^3$ che fissano l'origine. Sia $X \in \mathbb{R}^{3,3}$ ortogonale (cioè $({}^tX)X = I$) con $\det X = +1$.

(i) Verificare che $\det(X - I) = 0$ (come primo passo, rimpiazzare I con $({}^tX)X$.) Dedurre che esiste una base ortonormale $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ (che si può scegliere con $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$) tale che $X\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$.

(ii) Dimostrare che esiste $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che

$$X\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cos\theta + \mathbf{v}_3 \sin\theta, \quad X\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_2 \sin\theta + \mathbf{v}_3 \cos\theta.$$

Dedurre che X rappresenta un elemento di $\mathscr{R}$.

9.3.4. Infine, studiamo la topologia di $\mathscr{R}$.

(i) Usando l'esercizio precedente, identificare $\mathscr{R}$ con un sottospazio di $\mathbb{R}^9$ e verificare (tramite il teorema di Heine-Borel) che $\mathscr{R}$ (con la topologia indotta) è compatto.

(ii) Dimostrare che $X \mapsto X\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ determina un'applicazione continua

$$f\colon \mathscr{R} \longrightarrow S^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{v}\| = 1\}.$$

Descrivere la controimmagine $f^{-1}(\mathbf{v})$ per un generico versore $\mathbf{v} \in S^2$.

(iii) Lo spazio topologico $\mathscr{R}$ è connesso? È semplicemente connesso?