9.2 Esempi di gruppi fondamentali 15/06/2011

Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$, e fissiamo $x_0 = 1 = e^0$.

Teorema. $\pi_1(S^1, 1)$ è isomorfo al gruppo ciclico $(\mathbb{Z}, +)$.

Sia $\gamma\colon [0,1] \to S^1$ un laccio con $\gamma(0) = 1 = \gamma(1)$. Il teorema si deduce dai seguenti due risultati.

Lemma 1. Dato γ, esiste un'unica funziona continua $\Gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $\Gamma(0) = 0$ e $\gamma(t) = \exp(i\,\Gamma(t))$.

In breve, siano

$$J_+ = \Big(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\Big), \qquad J_- = \Big(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\Big);$$

abbiamo $S^1 = \exp(iJ_+) \cup \exp(iJ_-)$. Per ogni $t \in [0,1]$ esiste un intervallo A_t, aperto in $[0,1]$, tale che $\gamma(A_t)$ sia contenuto in $\exp(iJ_+)$ oppure $\exp(iJ_-)$. Quindi abbiamo un srcf (sotto-ricoprimento finito)

$$[0,1] = A_1 \cup \cdots \cup A_n, \qquad \gamma(A_k) \subseteq \exp(iJ_\pm).$$

Possiamo costruire il 'sollevamento' Γ di γ, partendo da

$$A_1 \subseteq \exp(iJ_+) \overset{\approx}{\to} J_+,$$

scegliendo

$$A_2 \subseteq \exp(iJ_-) \overset{\approx}{\to} J_- \ \text{ oppure } \ J_- - 2\pi,$$

in modo che le due mappe coincidano in $A_1 \cap A_2$, e così via. □

Lemma 2. La mappa

$$\phi\colon\ \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}, \quad [\gamma] \mapsto \tfrac{1}{2\pi}\Gamma(1)$$

è ben definita e definisce un isomorfismo di gruppi.

È prima necessario controllare che $\gamma_0 \sim \gamma_1$ implica che $\Gamma_0(1) = \Gamma_1(1)$. Il motivo è chiaro: un'omotopia H definisce γ_s e $\Gamma_s(1)/2\pi$ che dipende da s in modo continuo, quindi non può saltare tra due interi! (Per verificare questo in modo rigoroso si deve 'sollevare' H ad una mappa $[0,1]^2 \to S^1$.)

È ovvio che ϕ sia suriettiva: basta definire $\gamma(t) = (e^{2\pi i t})^n$ per avere $\phi[\gamma] = n$ perché in questo caso $\Gamma(t) = 2\pi n t$.

Si consideri un prodotto $[\alpha][\beta] = [\gamma]$ dove $\gamma = \alpha \star \beta$. Se

$$\alpha(t) = \exp(iA(t)), \qquad \beta(t) = \exp(iB(t)),$$

con A, B continue e $A(0) = 0 = B(0)$ allora

$$\gamma = \exp(i\Gamma(t)), \qquad \Gamma(t) = A(t) * (t \mapsto A(1) + B(t)),$$

e $\Gamma(1) = A(1) + B(1)$. Quindi $\phi([\gamma]) = (\phi[\alpha])(\phi[\beta])$ e ϕ è un omomorfismo di gruppi.

Se invece $\phi[\gamma] = 0$ allora Γ è un *laccio* in $\mathbb{R}$ basato in 0; inoltre

$$\gamma_s(t) = \exp(is\Gamma(t))$$

definisce un'omotopia tra il laccio costante e γ, e $[\gamma] = e$. Quindi, ϕ è iniettiva. □

Corollario 1 ('Teorema fondamentale dell'algebra'). Ogni polynomiale $p(z)$ di grado almeno uno, con coefficienti complessi, possiede una radice in $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Supponiamo che $p(z)$ non abbia radice, e che

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + 1$$

(per avere $p(0) = 1$ basta moltiplicare p per $1/a_0$. Fissando un numero reale $c > 1$ si definisca $\gamma_r\colon [0,1] \to S^1$ scrivendo

$$\gamma_r(t) = \frac{p(rce^{2\pi it})/p(rc)}{|\,p(rce^{2\pi it})/p(rc)\,|}. \tag{1}$$

Visto che p non ha radici, γ_r è continua e la ricetta (1) definisce un'omotopia tra il laccio costante γ_0 e il laccio γ_1 definito dai valori di p sulla circonferenza $|z| = c$. Dall'altra parte, se c è sufficientemente grande, il termine z^n domina $p(z)$ e, come conseguenza, γ_1 è omotopo a $t \mapsto (e^{2\pi it})^n$, quindi $[\gamma_1] \neq 0$ in $\pi_1(S^1, 1)$.

Per controllare l'ultimo pezzo, sia $c > |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + 1$ e definire

$$p_s(z) = z^n + s(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + 1).$$

Segue (esercizio) che $p_s(z)$ non è mai zero se $s \in [0,1]$ e $|z| = c$. Sostituendo $r = 1$ e p_s al posto di p in (1) otteniamo l'omotopia che vogliamo, ossia che γ_1 (ponendo $s = 1$) è omotopo a $t \mapsto e^{2\pi int}$ (ponendo $s = 0$). $\square$

Corollario 2 (Teorema di Brouwer). Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ il disco chiuso. Ogni applicazione $f\colon D \to D$ possiede un punto fisso: $f(p) = p$ con $p \in D$.

Dimostrazione. Il bordo di D è S^1. Se non esiste un punto fisso, possiamo definire un'applicazione $F\colon D \to S^1$ dove $F(z), z, f(z)$ appaiono in ordine lungo una retta (disegno fatto a lezione). Se $z \in S^1$ è gia' sul bordo allora $F(z) = z$. È chiaro che F è *continua*. Abbiamo $F(0) = e^{ic}$ per qualche $c \in (-\pi, \pi]$. Allora

$$\gamma_s(t) = F(se^{2\pi it})e^{ic(s-1)}.$$

determina un'omotopia tra $\gamma_0 \equiv 1$ e $\gamma_1(t) = e^{2\pi it}$, assurdo. $\square$

Esercizio 9.2.1. (a) Sia $S^2 = \{\mathbf{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{v}\| = 1\}$ la solita sfera. Si fissi il polo nord $x_0 = (0,0,1)$. Verificare che

$$u + iv = w \mapsto \Big(\frac{2u}{|w|^2+1}, \frac{2v}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\Big)$$

è un omeomorfismo $\mathbb{C} \to S^2 \setminus \{x_0\}$.

(b) Sia $x_1 \in S^2 \setminus \{x_0\}$. Dimostrare che ogni laccio $\gamma\colon [0,1] \to S^2$ basato in x_0 è omotopo ad un laccio δ basato in x_0 per cui $\delta([0,1]) \subseteq S^2 \setminus \{x_1\}$. (Seguire l'indizio a lezione: se U è un intorno aperto di x_1 allora $\gamma^{-1}(U)$ è un'unione di intervalli aperti di cui un numero finito copre l'insieme compatto $\gamma^{-1}(x_1)$.)

(c) Dedurre che $\pi_1(S^2, x_0) = \{e\}$, cioè che la sfera è semplicemente connesso.