9.1 Il gruppo fondamentale 14/06/2011

Sia X uno spazio topologico. Si fissi un 'punto di base' $x_0 \in X$; vedremo che questa scelta non è importante se X è connesso per archi.

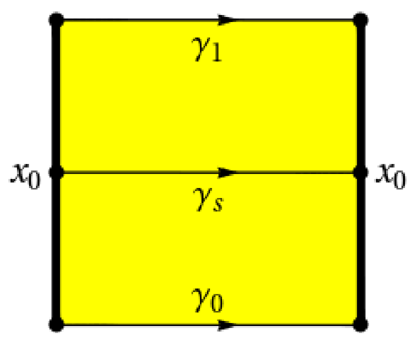
Definizioni. Un laccio (cappio) basato in x_0 è un'applicazione continua $\gamma\colon [0,1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$. Due lacci γ_0, γ_1, si dicono *omotopi relativo a* x_0, scritto $\gamma_0 \sim \gamma_1$, se esiste

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathrm{X}, \qquad (t,s) \mapsto H(t,s)$$

tale che

$$\gamma_0(t) = H(t,0), \quad \gamma_1(t) = H(t,1) \quad \forall t$$
$$H(0,s) = x_0 = H(1,s) \quad \forall s.$$

Il laccio $\gamma_s\colon t \mapsto H(t,s)$ definisce una 'deformazione' tra γ_0 e γ_1. Le varie condizioni si ricordano guardando il dominio di H :



Proposizione. $\sim$ è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. Come spiegato a lezione, per la transitività, siano $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to X$ lacci tutti basati in x_0 tali che

$$\alpha \sim \beta \ \text{ tramite un'omotopia } H', \quad \beta \sim \gamma \ \text{ tramite un'omotopia } H''.$$

Per verificare che $\alpha \sim \gamma$, si costruisca un'omotopia $H\colon [0,1]^2 \to X$ tale che

$$H(t,0) = \alpha(t), \quad H(t,1) = \gamma(t); \qquad H(0,s) = H(1,s) = x_0 \quad \forall s \in [0,1],$$

mettendo il dominio di H'' 'sopra' quello di H', cambiando poi la scala verticale.

Esempio. Dati due qualsiasi lacci γ_0, γ_1 in $X = \mathbb{R}^n$, possiamo sempre definire

$$H(t,s) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t);$$

quindi $\gamma_0 \sim \gamma_1$. In particolare, un laccio γ qualsiasi è omotopo al *laccio costante* tramite $\gamma_s(t) = (1-s)\gamma(t) + s\mathbf{x}_0$

Definizione. Uno spazio topologico X si dice *semplicemente connesso* se è connesso e se ogni laccio $[0,1] \to X$ è omotopo a quello costante $\gamma(t) = \mathbf{x}_0$.

Per uno spazio X in generale, il problema è quello di descrivere le classi di equivalenza di lacci $\gamma\colon [0,1] \to X$ basati in x_0.

Esempi: $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso per ogni n, quindi esiste solo una classe, quella banale. Qualsiasi sottoinsieme convesso o stellato di $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.

Anche (ma questo fatto è più difficle dimostrare in modo rigoroso), la sfera S^n è semplicemente connesso per $n \geqslant 2$. Invece, la sfera $X = S^0 = \{-1, 1\}$ non è nemmeno connessa. Se $X = S^1$ è una circonferenza, vedremo che le classi sono parametrizzate da $\mathbb{Z}$. In $X = P$, il piano proiettivo, è noto che esiste un laccio non omotopo ad uno costante (spiegato a lezione), ma ci sono solo due classi.

Definizione. Il gruppo fondamentale di X relativo a x_0 consiste dell'insieme

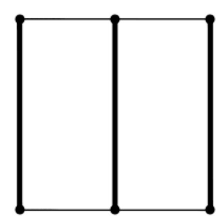
$$\pi_1(X, x_0) = \{[\gamma] : \gamma \text{ è un laccio basato in } x_0\}$$

delle classe di equivalenza (omotopia relativo a x_0). Il prodotto è definito nel seguente modo:

$$[\gamma][\delta] = [\gamma \star \delta],$$

dove l'operazione di *concatenazione* è definita da

$$(\gamma \star \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$



È ovvio che $\gamma \star \delta$ è continua, ma si deve verificare che

$$\gamma \sim \gamma', \quad \delta \sim \delta' \quad \Rightarrow \quad \gamma \star \delta \sim \gamma' \star \delta' :$$

L'elemento neutro e (o l'identità) del gruppo è la classe $[x_0]$ dove qui x_0 indica il laccio costante $[0,1] \to X$ con imagine $\{x_0\}$. Si deve verificare che

$$\gamma \star x_0 \sim \gamma \sim x_0 \star \gamma.$$

L'inversa $[\gamma]^{-1}$ è la classe $[\widetilde{\gamma}]$ dove $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ è γ percorso 'tornando indietro'. Si deve verificare che

$$\gamma \star \widetilde{\gamma} \sim x_0 \sim \widetilde{\gamma} \star \gamma$$

Infine, ci vuole l'associatività, equivale a

$$(\alpha \star \beta) \star \gamma \sim \alpha \star (\beta \star \gamma). \tag{1}$$

I rispettivi diagrammi erano disegnati a lezione. Ad esempio per verificare (1):

$$H(t,s) = \begin{cases} ? & 0 \leqslant t \leqslant \frac{s+1}{4} \\ \beta\Big(4\Big(t - \frac{s+1}{4}\Big)\Big) & \frac{s+1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{s+2}{4} \\ ? & \frac{s+2}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$