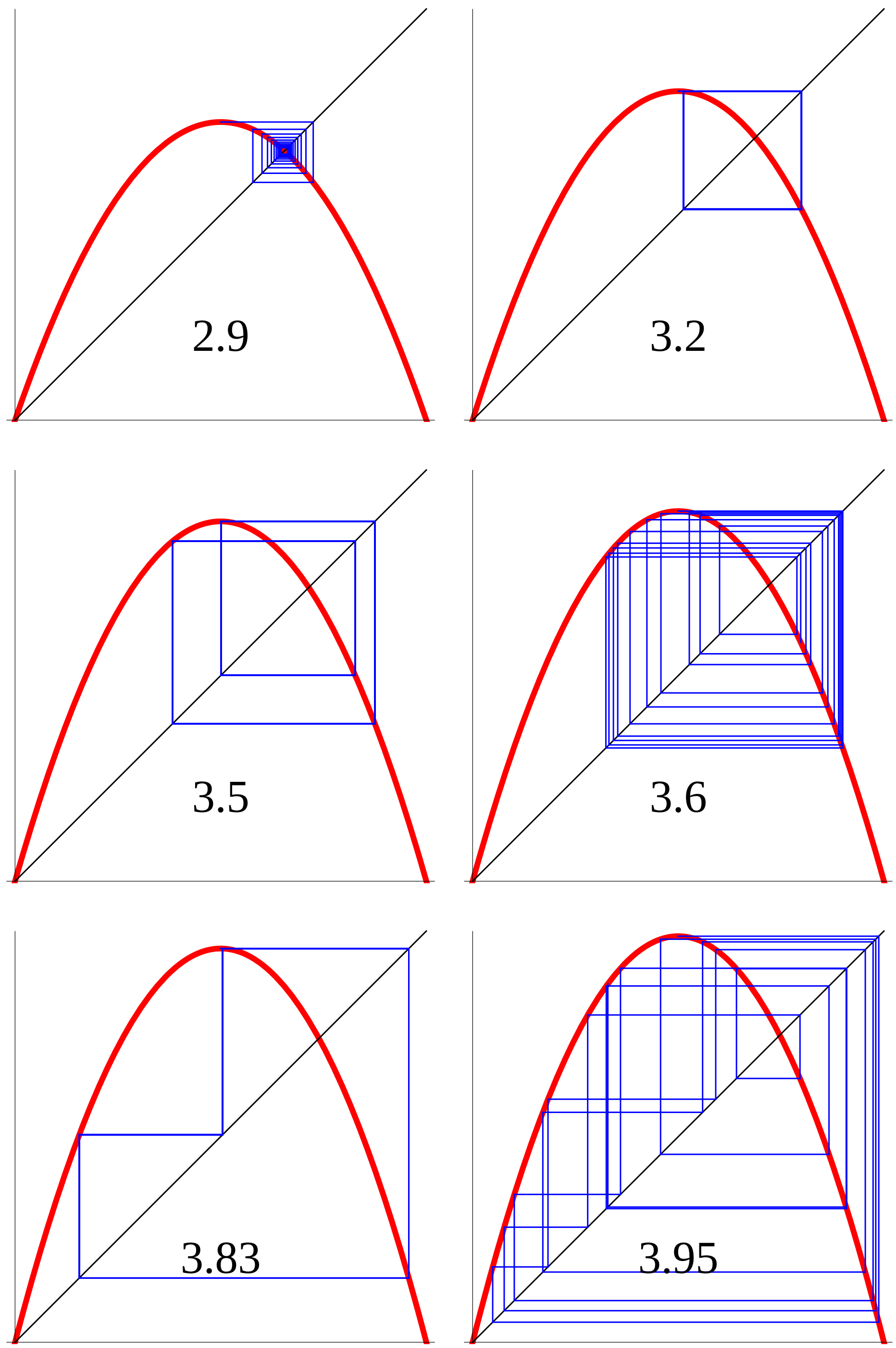
8.3 Esempi di iterazioni

$^{01}_{07}$/06/2011

La mappa logistica. Qui vediamo il comportamento della successione (x_n) partendo da $x_0 = \frac{1}{2}$ dove

$$x_n = f(x_{n-1}), \qquad f(x) = bx(1-x),$$

per sei valori di b. In ciascun caso sono indicate 20 iterazioni, ma in tre casi la convergenza di sottosuccessioni è veloce quindi le rette si sovrapongono.



Ad esempio, per $b = 3,83$ i termini della successione (x_n) fino a $n = 26$ sono

x_{3n}	x_{3n+1}	x_{3n+2}
0.5	0.9575	0.155857
0.503896	0.957442	0.156061
0.504433	0.957425	0.156121
0.504592	0.957419	0.15614
0.504642	0.957417	0.156146
0.504658	0.957417	0.156148
0.504664	0.957417	0.156149
0.504666	0.957417	0.156149
0.504666	0.957417	0.156149

Dopo cerca 20 iterazioni, l'esagono del quinto grafico sarà esatto fino a 5 decimali.

Esecizio 8.3.1. Approfondire i seguenti argomenti con una piccola ricerca online:
(i) L'uso della mappa f in biologia per studiare l'incremento di una populazione, come alternativa più accurata alla crescita esponenziale.
(ii) La definizione della costante di Feigenbaum.

Un'applicazione esponenziale. Si consideri la funzione

$$f(x) = a^x = e^{x \log a},$$

dove a è un parametro (che giocherà lo stesso ruolo di b sopra) con $0 < a < 2$. Si definisca la successione con $x_0 = 1$ e poi $f(x_n) = f(x_{n-1})$:

$$(x_n) = (1,\ a,\ a^a,\ a^{a^a},\ a^{a^{a^a}},\ \ldots\ ,\ x_n = a^{\uparrow n},\ \ldots) \tag{1}$$

Fissando a per il momento, supponiamo che p sia un punto fisso di f, cioè $a^p = p$. Ne segue che $a = \alpha(p)$, dove

$$\alpha(p) = p^{1/p}.$$

Si verifica facilmente che $\alpha(p) \to 0$ per $p \to 0$ e che α assume un massimo per $p = e$. Come conseguenza, α definisce una biiezione $(0, e) \to (0, e^{1/e})$. La funzione inversa $\beta = \alpha^{-1}$ esiste su $(0, e)$ e recupera il punto fisso dal valore di a:

$$\beta(\alpha(p)) = p, \qquad 0 < a < e^{1/e}.$$

Nel disegno che segue, la curva verde è il grafico di della funzione β fino al puntino in alto.

Teorema (Euler). Se $a \in [e^{-e},\ e^{1/e}]$, la successione (1) converge a $\beta(a)$.

Dimostrazione. L'idea è la seguente. Se $a = p^{1/p}$, abbiamo

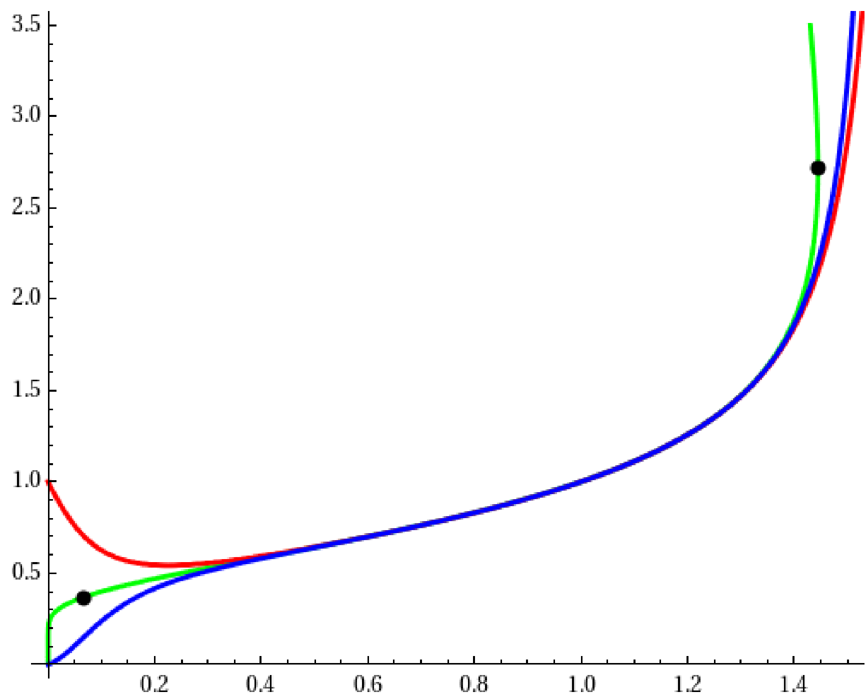
$$f'(p) = (\log a)a^p = (\log p^{1/p})p = \log p.$$

Segue che $|f'(p)| < 1$ se $p \in (e^{-1}, e)$, cioè se a appartiene a

$$J = (e^{-e},\, e^{1/e}).$$

In questo caso, f è una contrazione sul qualche intervallo intorno a $p = \beta(a)$, e (1) converge al punto fisso $\beta(a)$ se $a^{\uparrow n}$ arriva sufficientemente vicino a p per qualche n.

Il disegno dimostra i grafici di $a^{\uparrow 9}$ e $a^{\uparrow 10}$ insieme al grafico di β che contiene i puntini (e^{-e}, e^{-1}) e $(e^{1/e}, e)$.



Si può concludere la dimostrazione nel seguente modo. Sia

$$A = \{a \in \overline{J} : a^{\uparrow n} \to \beta(a)\}.$$

Sia (a_m) una successione in A con limite $\ell \in \mathbb{R}$. Abbiamo $\lim\limits_{n\to\infty} (a_m)^{\uparrow n} = \beta(a_m)$ per ogni m, e $\ell^{\uparrow n} \to \beta(\ell)$. Quindi A è chiuso in $\mathbb{R}$.

In realtà, A è anche aperto in $\overline{J}$. Questo fatto è basata sul fatto che la condizione

$$|f'(p)| < 1$$

è 'aperta': se vale per la funzione $f\colon a \mapsto a^x$ vale per la funzione $x \mapsto b^x$ con b sufficientemente vicino a a.

Ovviamente $1 \in A$. Visto che J sia connesso, segue che $A = \overline{J}$. $\square$

Esercizio 8.3.2. Usare il teorema di dimostrare i seguente fatto. Sia $m = \frac{1}{2}$. Allora $m^{\uparrow n} \to 1/x$ dove x è una radice dell'equazione $x^x = 2$. Verificare a mano che $x > 1{,}5$, e poi calcolare $u = 1/m^{\uparrow 10}$ e u^u.