8.2 EQUAZIONI INTEGRALI

Adesso vediamo un'applicazione di §8.1 all'esistenza di soluzioni di un'equazione differenziale con condizione iniziale

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Avendo una soluzione $y = y(x)$ di (1), possiamo integrare per dedurre che

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{y_0} f(t,\, y(t))\, t. \tag{2}$$

Dall'altra parte se $y = y(x)$ è una soluzione continue dell'equazione integrale (2), y è anche differenziable (segue dal teorema fondamentale) e $y'(x) = f(x,\, y(x))$. Quindi vale (1).

Teorema (Picard-Lindelöf). Sia $R = [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo che contiene (x_0, y_0) come punto interno. Si supponga che $f\colon R \to \mathbb{R}$ sia definita su R, insieme con la seconda derivata parziale $f_y = \partial f/\partial y$, e che f, f_y sono entrambe continue su R. Esiste una funzione continua $y = y(x)$ che soddisfa (2) (e quindi (1)) in qualche intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Dimostrazione. Si scelgano M, N tale che

$$|f(x,y)| \leqslant M, \quad |f_y(x,y)| \leqslant N, \qquad \forall (x,y) \in R.$$

Sia

$$I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a,b],$$

dove δ è da definire. Lavoriamo nello spazio metrico

$$X = \{\phi\colon I \to [c,d] : \phi \text{ è continua}\},$$

con la norma

$$\|\phi\| = \|\phi\|_{\sup} = \sup\{|\phi(x)| : x \in I\}.$$

Essendo un sottoinsieme chiuso di $C(I)$, lo spazio X è *completo*.

Si definisca un'applicazione

$$\mathscr{F}\colon X \to X,$$

pondendo

$$(\mathscr{F}\phi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))\, dt.$$

Abbiamo

$$|(\mathscr{F}\phi)(x) - y_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi(t)|\, dt \leqslant M\delta.$$

Possiamo scegliere δ in modo che $\mathscr{F}(\phi)(x) \in [c,d]$, confermando che $\mathscr{F}(X) \subseteq X$.

Applicando il teorema del valore medio all seconda derivata parziale di f,

$$\begin{aligned}
|(\mathscr{F}\phi)(x) - (\mathscr{F}\psi)(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t))|\,dt \\
&= \int_{x_0}^{x} |f_y(t,\theta)(\phi(t)-\psi(t))|\,dt \\
&\leqslant N\int_{x_0}^{x} |\phi(t)-\psi(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\|\mathscr{F}\phi - \mathscr{F}\psi\| \leqslant N\delta\|\phi - \psi\|.$$

Scegliamo δ ancora più piccolo (se necessario) tale che $N\delta = K < 1$. Allora $\mathscr{F}$ è una *contrazione* con costante K. Come conseguenza, esiste un unico punto fisso in X, cioè una funzione continua $y = y(x)$ che soddisfa (2). □

Esercizio 8.2.1. Siano $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $(x_0,y_0) = (0,0)$. In questo caso, la curva soluzione di (1) è stata disegnata a lezione. Partendo con $f_0 \equiv 0$, trovare

$$f_1 = \mathscr{F}(f_0), \qquad f_2 = \mathscr{F}(f_1).$$

Disegnare il grafico di $f_2(x)$ per $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

8.2.2. Si consideri l'applicazione $\mathscr{F}\colon C[0,1] \to C[0,1]$ con $\mathscr{F}(f) = \hat{f}$ dove

$$\hat{f}(x) = x + \tfrac{1}{2}\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,dt, \qquad x \in [0,1].$$

Verificare che

$$|\hat{f}(x) - \hat{g}(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt.$$

e che

$$\text{(i)}\ \|\hat{f} - \hat{g}\|_{\sup} \leqslant \tfrac{1}{2}\|f - g\|, \qquad \text{(ii)}\ \|\hat{f} - \hat{g}\|_{L^2} \leqslant \tfrac{1}{2}\|f - g\|_{L^2}.$$

Dedurre che la sucessione $(\mathscr{F}^{(n)}(f))$ converge ovunque ad una funzione rispetto alla norma L^2.