8.1 Contrazioni e punti fissi 31/05/2011

Sia $f\colon X\to X$ un'applicazione. Un *punto fisso* è un elemento $x\in X$ tale che $f(x)=x$.

Esempi. Ogni funzione continua $f\colon[0,1]\to[0,1]$ ammette un punto fisso. Basta applicare il teorema del valore intermedio (l'immagine di un connesso è connesso!) alla funzione continua $g(x)=x-f(x)$ tenendo conto che $g(0)\leqslant 0$ e $g(1)\geqslant 0$.

Sia $X=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$ il disco chiuso nel piano. Un famoso theorema di Brouwer afferma che ogni funzione continua $f\colon X\to X$ ammette almeno un punto fisso. (Vale, più in generale, quando $X\subset\mathbb{R}^n$ è compatto e convesso.)

Esercizio 8.1.0. Sia X l'insieme finito $\{1,2,\dots,n\}$. Sia d_n il numero delle $n!$ biiezioni che *non* hanno punto fisso (così $d_1=0$, $d_2=1$, $d_3=2$, $d_4=9$, ecc). Spiegare perché ci sono $\binom{n}{k}d_{n-k}$ biiezioni di X_n con esattamente k punti fissi. Dimostrare che $d_n/n!\to e^{-n}$ per $n\to\infty$.

D'ora in poi, X è uno spazio metrico. Ricordiamo che $f\colon X\to X$ è un'*isometria* se $d(f(x),f(y))=d(x,y)$ per ogni $x,y\in X$. Abbiamo classificato le isometrie $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ per la distanza Euclidea. Invece,

Definizione. Un'applicazione $f\colon X\to X$ è una *contrazione* se esiste $K<1$ tale che

$$d(f(x),f(y))\leqslant K\,d(x,y),\qquad \forall x,y\in X. \tag{1}$$

Osservazioni. Una contrazione è ovviamente continua. Se $X=[a,b]$, la condizione (1) vale se f è differenziabile con $|f'(x)|\leqslant K<1$ per ogni $x\in[a,b]$ per il teorema di Lagrange. Ad esempio, $x\mapsto bx(1-x)$ è una contrazione su $[0,1]$ se $b<1$.

Teorema. Sia X uno spazio di metrico *completo*. Data una contrazione $f\colon X\to X$, esiste un'*unico* punto fisso $p\in X$.

Dimostrazione. L'unicità è facile: se $f(p)=p$ e $f(q)=q$ allora

$$d(f(p),f(q))\leqslant K\,d(p,q)\quad\Rightarrow\quad(1-K)d(p,q)\leqslant 0,$$

e $d(p,q)=0$. Per la costruzione, si scelga $x_0\in X$ in modo arbitrario, e si ponga

$$x_n=f(x_{n-1}),\qquad n\geqslant 1. \tag{2}$$

Vedremo che la successione (x_n) è Cauchy. Infatti, per $n<m$,

$$d(x_{n+1},x_n)\leqslant K\,d(x_n,x_{n-1})\leqslant\,\cdots\,\leqslant K^n\,d(x_1,x_0).$$

Ne segue

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leqslant d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{m-1},x_m)\\ &\leqslant (K^n+K^{n+1}+\cdots+K^{m-1})d(x_1,x_0)\\ &= \frac{K^n}{1-K}d(x_1,x_0), \end{aligned}$$

e tende a 0 per $n,m\to\infty$. Quindi (x_n) è Cauchy e converge ad un punto $p\in X$. Da (2), per la continuità di f, otteniamo $f(p)=p$. □

Corollario. Con le stesse ipotesi,

$$d(x,p) \leqslant \frac{1}{1-K} d(f(x),x), \qquad \forall x \in X.$$

(Basta prendere $n = 0$, $x = x_0$ e lasciare $m \to \infty$.)

Esercizio 8.1.1 (Iterazione di Newton-Raphson). Sia f una funzione definita sul un intervallo $I = (a,b)$ che contiene una soluzione p dell'equazione $f(x) = 0$. Si supponga che f'' esiste ed è continua su I e che $f'(p) \neq 0$. Calcolare la derivata di

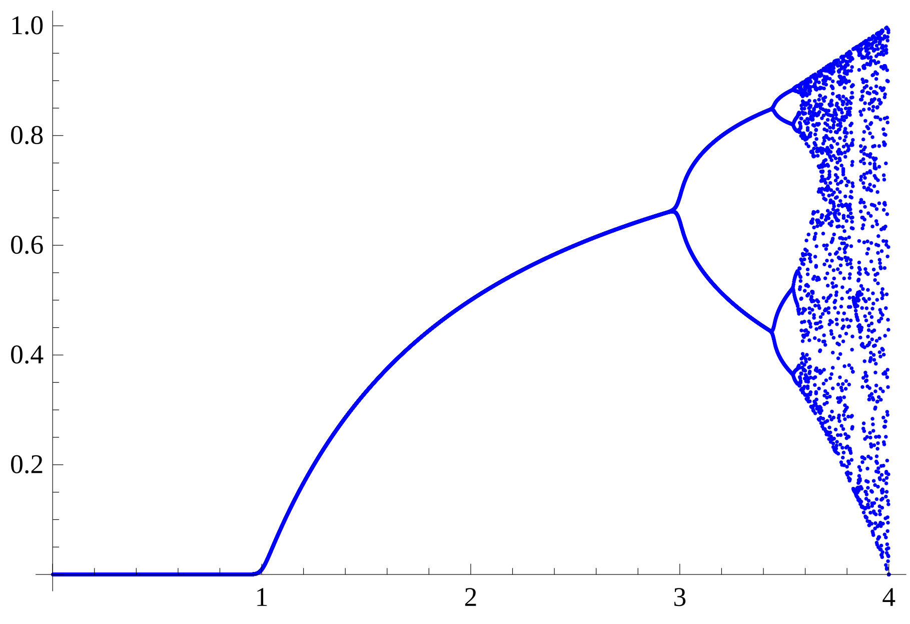
$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

e verificare che $g'(p) = 0$. Dedurre (come spiegato a lezione) che esiste $\delta > 0$ tale che

(i) $g(J) \subseteq J$ dove $J = [p-\delta, p+\delta]$,

(ii) la restrizione di g è una contrazione $J \to J$.

8.1.2. Sia $f(x) = bx(1-x)$ dove $0 < b < 4$. Sia $A = \{x_n : n \geqslant 0\}$, definito ponendo $x_0 = \frac{1}{2}$ e $x_n = f(x_{n-1})$. L'immagine illustra i punti di accumulazione (asse verticale) di A relativo a b (asse orizzontale). Posto $g = f \circ f$, calcolare e semplificare $g'(1-\frac{1}{b})$. Fissato $b \in (1,3)$, dedurre che g è una contrazione su qualche intervallo intorno a $1 - 1/b$.



8.1.3. Sia X uno spazio metrico *compatto*. Sia $f\colon X \to X$ un'applicazione tale che

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

Osservare che f ammette al massimo *un* punto fisso. Dimostrare che esiste $x_0 \in X$ tale che

$$\inf\{d(f(x),x) : x \in X\} = d(f(x_0), x_0)$$

(controllando prima che $x \mapsto d(f(x),x)$ sia continua). Dedurre che f ha un punto fisso (osservando che l'ipotesi $d(f(x_0),x_0) > 0$ porta ad un assurdo).