7.1 Spazi (s)connessi 24/05/2011

Sia $(X, \mathscr{T})$ uno spazio topologico.

Definizione. $(X, \mathscr{T})$ è *connesso* se gli unici sottoinsiemi di X con la proprietà di essere simultaneamente aperto e chiuso ('clopen') sono $\varnothing$ e X.

Si ricordi che 'A chiuso' vuol dire 'X $\setminus A$ aperto'. Quindi X è *sconnesso* se e solo se esistono $A, B \in \mathscr{T}$ tali che

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \varnothing, \qquad A \neq \varnothing \neq B.$$

Scriviamo $X = A \sqcup B$ per indicare l'unione disgiunta.

Naturalmente, un sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice connesso se lo spazio $(Y, \mathscr{T}_Y)$ è connesso dove $\mathscr{T}_Y = \{Y \cap V : V \in \mathscr{T}\}$ è la topologia indotta. Seguendo la logica, un insieme-punto $\{y\}$ è sempre connesso, come anche $\varnothing$ (certamente non è sconnesso!)

Esempi: (i) In $X = \mathbb{R}$ con la solita topologia, $Y = (1,2) \cup [3,4]$ e $Y' = (-\infty, 1) \cup (1,4]$ sono emtrambi sconnessi. Si osservi che (ad esempio) $[3,4]$ è *aperto* in Y, essendo uguale a $Y \cap (\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$; è anche *chiuso* in Y contenendo tutti i punti limiti.
(ii) In $X = \mathbb{R}^2$ con la solita topologia, si considerino

$$A = \{(x,y) : 0 < \tfrac{1}{x} \leqslant y\}, \qquad B = \{(x,y) : y \leqslant 0\},$$

A essendo la regione 'sopra' l'iperbole nel primo quadrante compreso la curva stessa. Entrambi A, B sono chiusi in $\mathbb{R}^2$, da cui segue che $Y = A \sqcup B$ è sconnesso.

Lo scopo principale di questa sezione è di dimostrare il

Teorema. Sia Y un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (con la solita topologia) che contiene almeno due punti. Allora Y è connesso se e solo se Y è un intervallo.

Invece di elencare i vari tipi di intervalli (limitati, non limitati, chiusi, aperti,...), possiamo caratterizzarli con il

Lemma. Un sottoinsieme $J \subseteq \mathbb{R}$ è in intervallo se e solo se

$$a, b \in J, \quad a < c < b \quad \Rightarrow \quad c \in J. \tag{1}$$

Dimostrazione. Se J è qualsiasi tipo di intervallo, certamente soddisfa (1).

Viceversa, supponiamo che valga (1). Siano $i = \inf J$ e $s = \sup J$. Se $i, s \in \mathbb{R}$, abbiamo $J \subseteq [i, s]$. Dato $c \in (i, s)$ esistono a, b tali che

$$i \leqslant a < c < b \leqslant s$$

(questo dalle definizioni di inf e sup). L'ipotesi (1) implica che $c \in J$. In questo modo, abbiamo verificato che $(i, s) \subseteq J$. Riassumendo,

$$(i, s) \subseteq J \subseteq [i, s],$$

qiundi J è un intervallo, eventualmente semi-chiuso. È facile modificare l'argomento nel caso in cui a, b non siano entrambi finiti per concludere che J è un intervallo semi-infinito (o $\mathbb{R}$). □

Dimostrazione del teorema. Sia $Y \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme con almeno due punti.

Se Y non è un intervallo, segue (dal lemma) che esistono a, b, c con $a < c < b$ tali che $a, b \in Y$ e $c \notin Y$. Come conseguenza,

$$Y = A \sqcup B, \quad \text{dove} \quad A = Y \cap (-\infty, c), \ \ B = Y \cap (c, \infty),$$

e Y è sconnesso. Quindi, 'connesso' implica 'intervallo'.

Viceversa, supponiamo che J sia un intervallo. Seguiamo il libro di Sutherland. Se J è sconnesso, $J = A \sqcup B$ con A, B aperti in J e scelti in modo che $a \in A$, $b \in B$ e $a < b$. Segue dal lemma che $I = [a, b] \subseteq J$. Inoltre,

$$[a, b] = A' \sqcup B', \qquad A' = A \cap I, \ \ B' = B \cap I, \tag{2}$$

dove gli insiemi A', B' sono entrambi chiusi in $\mathbb{R}$. (Ad esempio, se $A = J \cap U$ con U aperto in $\mathbb{R}$, allora $B = J \cap U^c$ e

$$(B')^c = (J \cap U^c \cap I)^c = (U^c \cap I)^c = U \cup I^c \ \in \ \mathscr{T}_{\mathbb{R}},$$

dove S^c sta per il complemento $\mathbb{R} \setminus S$.) Essendo anche limitati, A', B' sono compatti in $\mathbb{R}$, e segue (da un teorema) che $A' \times B'$ è compatto in $\mathbb{R}^2$.

Si consideri l'applicazione continua

$$f \colon A' \times B' \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto |x - y|.$$

L'immagine

$$S = f(A' \times B') = \{|x - y| : x \in A', \ y \in B'\}$$

è compatto e quindi chiuso in $\mathbb{R}$. Visto che S non contiene 0 (perchè $A' \cap B' = \varnothing$) abbiamo

$$0 < \delta = \inf S \in S,$$

quindi esistono $x_0 \in A'$ e $y_0 \in B'$ tali che $|x_0 - y_0| = \delta$. Infine, sia $c = \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \in I$, che implica

$$|c - y_0| = \tfrac{1}{2}\delta = |x_0 - c|.$$

Ne segue che $c \notin A'$ e $c \notin B'$, che contraddice (2). □

Esercizio 7.1.1. Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione continua, con X connesso. Mostrare che $f(X)$ è connesso (come sottoinsieme di Y).

7.1.2. Dedurre il seguente corollario. Sia $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $f(a) < f(b)$. Allora f assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$.

7.1.3. Siano X, Y due spazi topologici connessi. Dimostrare che il prodotto $X \times Y$ è connesso, seguendo i seguenti passi. Fissato $x_1 \in X$, verificare che l'applicazione

$$Y \mapsto X \times Y, \qquad y \mapsto (x_1, y)$$

è continua. Si supponga che $X \times Y = A \sqcup B$ con A, B entrambi non-vuoti e aperti in $X \times Y$. Si scelgano $(x_1, y_1) \in A$ e $(x_2, y_2) \in B$. Spegare perché

$$\{(x_1, y) : y \in Y\} \subseteq A, \qquad \{(x, y_2) : x \in X\} \subseteq B,$$

e dedurre che $X \times Y$ è connesso.