In questo foglio, p, q sono numeri reali tali che $p, q > 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, cioè $(p-1)q = p$. Fissando un qualsiasi intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione continua $f \colon I \to \mathbb{R}$, indichiamo con $\int f$ l'integrale di f su I. La funzione f è *convessa* se

$$\lambda, \mu > 0, \;\; \lambda + \mu = 1, \;\; x, y \in I \quad \Rightarrow \quad f(\lambda x + \mu y) \leqslant \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Questa disuguaglianza vale, ad esempio, se $f''(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in I$.

Esercizio 6.4.1. Considerando la funzione $x \mapsto e^x$ e ponendo $a^p = e^x$ e $b^q = e^y$, dimostrare che

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad a, b > 0. \tag{1}$$

Siano $f, g \in C(I)$. Fissando $x \in I$, si considerino $a = |f(x)|/\|f\|_p$, $b = |g(x)|/\|g\|_q$. Applicando (1), dedurre la disuguaglianza di Hölder

$$\int |fg| \;\leqslant\; \|f\|_p \|g\|_q. \tag{2}$$

6.4.2. Siano $f, g \in C(I)$ tali che $\int |f|^p < \infty$ e $\int |g|^p < \infty$. Considerando la funzione $x \mapsto x^p$, dimostrare che $|\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g|^p \leqslant \frac{1}{2}(|f|^p + |g|^p)$. Dedurre non solo che $|f+g| \in L^p(I)$ ma anche che $|f+g|^{p-1} \in L^q(I)$. Applicare (2) ai due termini a destra di

$$|f+g|^p \;\leqslant\; |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$$

per verificare che

$$\int |f+g|^p \;\leqslant\; (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int |f+g|^p \right)^{1/q}.$$

Dedurre (subito) la disuguaglianza di Minkowski

$$\|f+g\|_p \;\leqslant\; \|f\|_p + \|g\|_p.$$