Dato un intervallo aperto $J = (a, b)$ con $a < b$ sia $\ell(J) = b - a$ la sua 'misura'.

Definizione. Un sottoinsieme N di $\mathbb{R}$ si dice *nullo* o di *misura nulla* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una successione (J_n) di intervalli aperti $J_n = (a_n, b_n)$ o $\varnothing$ tale che

$$N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) < \varepsilon. \tag{1}$$

Esempi. $\mathbb{N}$ è nullo; basta definire $J_n = (n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}})$ con misura 2^{-n-1}. Con lo stesso argomento, ogni insieme numerabile è nullo, compreso $\mathbb{Q}$!

Ma $[a, b]$ non è nullo; dato (1) si potrebbe prendere un srcf $J_{n_1} \cup \cdots \cup J_{n_k}$ e dedurre che $\varepsilon \geqslant 1$. Segue che nessun intervallo con misura positiva è nullo.

Dall'altra parte l'insieme di Cantor (studiato a lezione) è nullo ma non numerabile.

Sia I un intervallo qualsiasi, compreso $\mathbb{R}$.

Definizione A. $L^p(I)$ è il completamento dello spazio metrico

$$\left\{ f \in C(I) : \int_I |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

rispetto alla (distanza associata alla) norma $\|f\|_{L^p} = \left(\int |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$, $p \geqslant 1$.

Quindi

$$L^p(I) = \widehat{C(I)_{L^p}} = \frac{\{\text{successioni } (f_n) \text{ in } C(I) \text{ che sono } L^p\text{-Cauchy}\}}{\sim}$$

dove $(f_n) \sim (g_n)$ vuol dire $\|f_n - g_n\|_{L^p} \to 0$ per $n \to \infty$.

Esempio. Sia $f_n(x) = x^n$. Allora (f_n) è L^p-Cauchy in $C[0, 1]$ per ogni $p \geqslant 1$. In qualche senso, (f_n) è rappresentato, come elemento di $L^p(I)$, dal limite punctuale

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

che non è però una funziona continua.

Esercizio 6.2.1. Si consideri la somma parziale

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \sin(kx),$$

della serie di Fourier per $-t/2$ su $[-\pi, \pi]$. Verificare che (f_k) è L^2-Cauchy.

Per procedere ci serve un risultato che segue dal famoso *teorema della convergenza monotona* (di H. Lebesgue, B. Levi ed altri, formulato nel periodo 1902–06):

Teorema. Sia (ϕ_k) una successione in $C(I)$ tale che $\sum_{k=1}^{\infty} \|\phi_k\|_{L^p} < \infty$. Allora $\sum \phi_k$ converge puntualmente su $I \setminus N$ per qualche sottoinsieme nullo N di I.

L'ipotesi implica che le somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^{n} \phi_k$ definiscono una successione L^p-Cauchy, ma la tesi afferma che esiste una funzione $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \phi(x), \qquad \forall x \in I \setminus N.$$

Per non citare N esplicitamente, si dice

s_n *converge a* ϕ *quasi ovunque*, oppure $s_n(x)$ *converge a* $\phi(x)$ *per quasi tutti* $x \in I$.

La funzione ϕ sarà la nostra scelta per rappresentare l'elemento (s_n) di $L^p(I)$, ma non tutte le successioni di Cauchy sono del tipo (s_n).

Corollario 1. Sia (f_n) è una successione in $C(I)$ tale che $\|f_n\|_{L^p} \to 0$. Allora una *sottosuccessione* (f_{n_k}) converge a 0 quasi ovunque.

Dimostrazione. Per ipotesi, possiamo trovare $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tali che $\|f_{n_k}\| < 2^{-k}$. Applicando il teorema a $\phi_k = f_{n_k}$, possiamo dire che $\sum_k f_{n_k}(x)$ converge per *quasi tutti* $x \in I$, da cui segue che $f_{n_k}(x) \to 0$ per gli stessi x. □

Corollario 2. Sia (f_n) è una successione L^p-Cauchy in $C(I)$. Allora una *sottosuccessione* (f_{n_k}) converge quasi ovunque.

Dimostrazione (molto simile). Questa volta, possiamo trovare $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tali che $\|f_{n_k} - f_m\| < 2^{-k}$ per ogni $m \geqslant n_{k+1}$. In particolare, $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}$, e la successione (f_{n_k}) è Cauchy 'in modo veloce'. Applicando il teorema a $\phi_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$, concludiamo che

$$f_{n_{k+1}} - f_1 = (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) + (f_{n_k} - f_{n_{k-1}}) + \cdots + (f_2 - f_1)$$

converge quasi ovunque per $k \to \infty$, stessa cosa f_{n_k}. □

Questi corollari ci permettono di identificare l'elemento del completamento $L^p(I)$ determinata da (f_n) con il limite di qualsiasi sottosuccessione che converge quasi ovunque. Il limite è definito almeno di un insieme nullo ed è indipendente dalle scelte (almeno di un insieme nullo). Otteniamo quindi un'equivalente

Definizione B.

$$L^p(I) = \frac{\{\text{funzioni } f\colon I \to \mathbb{R} \text{ che sono i limiti q.o. di successioni } L^p\text{-Cauchy}\}}{\equiv},$$

dove $f \equiv g$ vuol dire '$f = g$ quasi ovunque'.

Per semplicità, si supponga adesso che $p = 1$. Se (f_n) è una successione L^p-Cauchy, la successione $(\int f_n)$ di numeri reali sarà Cauchy. Se una sottosuccessione di (f_n) converge a f su $I \setminus N$ con N nullo, si può definire

$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx.$$

È una conseguenza delle definizioni che quest'integrale è indipendente dalle scelte, e anche che

$$f \equiv g \quad \Leftrightarrow \quad \int_I |f(x) - g(x)|\,dx = 0.$$

Lo spazio $L^1(I)$ contiene (grosso modo) tutte le funzioni definite su I per cui è possibile definire l'integrale $\int_I f$, e per cui inoltre $\int_I |f| < \infty$.