1.2 Sottoinsiemi aperti 16/03/2011

Sia (X, d) uno spazio metrico. Dato $x \in X$ e $\delta > 0$ possiamo considerare il *intorno sferico*

$$S_\delta(x) = \Big\{ y \in X : d(x, y) < \delta \Big\}.$$

Ad esempio, nel piano (con la solita metrica $d = d_2$) un intorno sferico è un disco senza bordo centrato in x. Per la metrica discreta abbiamo $S_1(x) = \{x\}$.

Definizione. Un sottoinsieme $U \subseteq X$ di dice *aperto* se, per ogni $u \in U$, esiste $\delta > 0$ tale che $S_\delta(u) \subseteq U$.

Ad esempio, una 'regione' nel piano con un bordo ben definito, ma tolto, è aperto per la solita metrica.

Per ogni $x \in X$ e $\delta > 0$, l'intorno $S_\delta(x)$ è sempre aperto. Per verificare questo in modo rigoroso, si scelga $u \in S_\delta(x) = U$. Sia $\delta' = d(x, u) < \delta$, e sia $\varepsilon = \delta - \delta'$. Allora, usando (M3),

$$y \in S_\varepsilon(u) \quad \Rightarrow \quad d(y, x) \leqslant d(y, u) + d(u, x) < \varepsilon + \delta' = \delta.$$

Quindi $S_\varepsilon(u) \subseteq U$.

Dato un aperto U in uno spazio metrico, per ogni $u \in U$ possiamo scegliere $\delta = \delta(u)$ tale che $S_{\delta(u)}(u) \subseteq U$. Segue che

$$U = \bigcup_{u \in U} S_{\delta(u)}(u).$$

Corollario. Ogni aperto U è un'unione di intorni sferici.

La famiglia di sottoinsiemi aperti di uno spazio metrico gode le seguenti proprietà.

Proposizione. In uno spazio metrico:
(A1) X e $\varnothing$ sono aperti;
(A2) una qualsiasi unione (anche infinita) is aperti è un aperto;
(A3) se U_1, U_2 sono aperti, anche $U_1 \cap U_2$ è aperto.

NB. È ovvio che X stesso è aperto. Invece, $\varnothing$ si dichiara aperto perché logicamente la condizione è verificata, non essendo punti u da controllare.

Esempi. In $\mathbb{R}$ con la solita distanza $d(x, y) = |x - y|$, gli intorni sferici sono intervalli 'aperti' $(x - \delta, x + \delta)$ e sicuramente sono aperti nel nostro senso sopra. Abbiamo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}, 1) = (0, 1), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + \frac{1}{n}) = (0, 1],$$

e l'intersezione infinita a destra non è aperto. Questa spiega la distinzione tra (A2) e (A3). L'ultima è equivalente a

(A3′) un'intersezione di un numero finito di aperti è aperto.

Nel seguito, sarà sviluppata una teoria di insiemi 'chiusi':

Definizione. Un sottoinsieme C di X è chiuso se $X \setminus C$ è aperto.

Esercizio 1.2.1. Un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale V si chiama *convesso* se dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ tutto il segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ sia contenuto in C. Equivalentemente,

$$\lambda \in [0,1],\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in C.$$

Sia d la metrica associata ad una norma su V. Verificare che ogni intorno sferico $S_r(x)$ è convesso.

1.2.2. Disegnare i bordi

$$\left\{ (x_1, x_2) : |x_1|^p + |x_2|^p = 1 \right\}$$

degli intorni sferici $S_1((0,0))$ rispetto a d_p, per vari valori della potenza p. Verificare che d_p non è una distanza se $p = \frac{1}{2}$ trovando $(x,0), (0,y)$ con $0 < x, y < 1$ tale che $\sqrt{x/2} + \sqrt{y/2} > 1$.

1.3 Applicazioni continue (in breve)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. La caratterizzazione della continuità per funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in termini di ε e δ ci porta alla

Definizione. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ di dice *continua* se, fissato $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(S_\delta(x)) \subseteq S_\varepsilon(f(x)).$$

Abbiamo dimostrato che è equivalente alla

Definizione elegante. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ si dice *continua* se

$$U \text{ aperto in } Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(U) \text{ aperto in } X.$$

Esercizio 1.3.1. Dimostrare che f è continua se e solo se

$$C \text{ chiuso in } Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(C) \text{ chiuso in } X.$$

Trovare un'applicazione continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che l'immagine $f(\mathbb{R})$ di f non sia chiusa (nonostante il fatto che $\mathbb{R}$ sia chiuso).

1.3.2. Sia V uno spazio vettoriale con una norma $\|\cdot\|$. Verificare che

$$\Big| \|v\| - \|w\| \Big| \leqslant \|v - w\|,$$

e dedurre che la funzione $V \to \mathbb{R}$ definita da $v \mapsto \|v\|$ è continua.