Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $I = [a, b]$ e $C(I)$ l'insieme delle funzioni continue $f : I \to \mathbb{R}$. Definiamo

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad f \in C(I).$$

Le condizioni (N1),(N2),(N3) valgono per $p \geqslant 1$, e abbiamo definito la cosiddetta *norma L^p*. Ad esempio, la potenza $1/p$ garantisce che $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, la (N2).

Per dimostrare la (N1), cioè $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$, è essenziale la *continuità* di f: se esiste $c \in I$ per cui $f(c) \neq 0$ allora esistono $\delta, \varepsilon > 0$ tale che

$$x \in (c - \delta,\, c + \delta) \cap I \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \geqslant \varepsilon$$

(vale anche se $c = a$ o $c = b$). Segue che

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} \varepsilon^p \, dx \quad \Rightarrow \quad (\|f\|_p)^p \geqslant 2\delta\varepsilon^p > 0. \tag{1}$$

In conclusione: $\|f\|_p = 0$ soltanto se f è la funzione nulla.

Per $p = 1$, abbiamo

$$\|f + g\|_1 = \int_a^b |f(x) + g(x)| \, dx \leqslant \int_a^b (|f(x)| + |g(x|) \, dx \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Qui abbiamo usato la *linearità* dell'integrale e la disuguaglianza fondamentale

$$\forall x \in [a, b] \quad h(x) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b h(x) \, dx \geqslant 0. \tag{2}$$

(In realtà, dovremmo usare (2) per giustificare meglio (1). Nel secondo integrale di (1), si rimpiazzi ε con una funzione continua g tipo 'tenda' per cui $|f(x)| \geqslant g(x)$ per ogni $x \in I$, poi si applichi (2) con $h = |f| - g$.)

Il caso $p = 2$ è particolare, perché la norma L^2 proviene da un *prodotto scalare*:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx,$$

nel senso che $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Questo, esattamente come la solita norma in $\mathbb{R}^n$ proviene dal prodotto scalare tra due vettori riga, ossia $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}({}^t\mathbf{w})$. Usando sempre la norma L^2, si consideri

$$\begin{aligned} p(\lambda) \;=\; \|f + \lambda g\|^2 \;&=\; \langle f + \lambda g,\, f + \lambda g \rangle \\ &=\; \|f\|^2 + 2\lambda \langle f, g \rangle + \lambda^2 \|g\|^2. \end{aligned}$$

Il fatto che non ci sono valori di λ per cui il polinomio quadratico $p(\lambda)$ sia negativa implica $(2\langle f, g \rangle)^2 - 4\|f\|^2\|g\|^2 \leqslant 0$, da cui segue la

Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Se $f, g \in C(I)$ allora
$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2.$$

Inoltre, usando sempre la norma L^2,
$$\|f+g\|^2 = p(1) \leqslant \|f\|^2 + 2|\langle f, g\rangle| + \|g\|^2 \leqslant (\|f\| + \|g\|)^2.$$
Quindi,
$$\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

La stessa affermazione vale per ciascun $p \geqslant 1$:

Disuguaglianza di Minkowski. Se $f, g \in C(I)$ e $p \geqslant 1$ allora
$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

È una conseguenza dalla

Disuguaglianza di Hölder. Siano $p, q > 1$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (equivale $pq = p + q$), esempio $p = q = 2$. Allora
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

Si osservi che, per $p = 2$, Hölder segue da Cauchy-Schwartz (ma applicata alle funzioni $|f|, |g|$ al posto di f, g).

Esempi. Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$. Allora
$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = 2.$$
Possiamo dire che $\|f\|_1 = 2$ anche se $f \notin C[0,1]$. Invece, $\|f\|_2$ non è finito.

Se $g \in C[a, b]$,
$$\|g\|_1 = \int_a^b |g(x).1|\,dx \leqslant \|g\|_2\|1\|_2 = \sqrt{b-a}\,\|g\|_2.$$
Quindi se $\|g\|_2 < \infty$ allora $\|g\|_1 < \infty$.

Esercizio 6.2.1. Sia $\phi(x) = 1/(1 + x^2 + x^4 + x^6)$. Verificare che $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx < \infty$. È possibile calcolare quest'integrale?

6.2.2. Si consideri
$$\psi(x) = \begin{cases} (\sin x)/x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$
Spiegare perché $\psi \in C(\mathbb{R})$ (cioè, ψ è continua in ogni punto di $\mathbb{R}$). Mostrare che
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx < \infty \quad \text{mentre} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|\,dx = \infty.$$