Definizione. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$. Una successione (f_n) di funzioni $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente* ad una funzione f se, *per ogni* $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geqslant N,\ x \in D \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1}$$

È importante osservare che N non dipende da x: la convergenza uniforme è più forte della convergenza puntuale.

Esercizi 6.1.1. Dire se le seguenti convergono uniformemente su $D = (0,1)$:

(i) $f_n(x) = x^{-1} + n^{-1}$;

(ii) $g_n(x) = x^n$;

(iii) $h_n(x) = xe^{-nx}$ (calcolare prima $h_n'(s)$).

In generale, evitiamo di parlare di funzioni non limitati su D. Anzi, per usare il linguaggio degli spazi metrici, prendiamo $D = [a,b]$ intervallo chiuso e limitato (con $a < b$). Consideriamo la distanza definita dalla norma 'sup'

$$d_{\mathrm{s}}(f,g) = \|f - g\|_{\mathrm{s}} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Studiamo adesso lo spazio $C[a,b]$ delle funzioni continue $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dotato della distanza d_{s}.

Lemma. Una successione (f_n) è Cauchy relativo a d_{s} se e solo se (f_n) converge uniformemente a qualche funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Se (f_n) converge in modo uniforme allora, dato $\varepsilon > 0$, si scelga N tale che (1) valga con $\varepsilon/2$ al posto di ε. Se $m, n \geqslant N$, allora

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Come conseguenza, $d_{\mathrm{s}}(f_n, f_m) \leqslant \varepsilon$ che è sufficiente per concludere che (f_n) è di Cauchy. (In realtà, $d_{\mathrm{s}}(f_n, f_m) < \varepsilon$, perché?)

Viceversa, si supponga che (f_n) sia d_{s}-Cauchy. Ne segue che, per ogni x fissato, la successione $(f_n(x))$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$. Quindi (completezza di $\mathbb{R}$) converge ad un numero reale che chiamiamo $f(x)$. In questo modo, abbiamo definito una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Inoltre, esiste N tale che

$$n, m \geqslant N,\ x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Fissando n abbiamo

$$n \geqslant N,\ x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

che è esattamente la condizione (1). $\square$

Nel lemma non abbiamo affermando che la funzione limite f sia continua. Ma è vero, e ci porta al

Corollario. Lo spazio metrico $(C[a,b],d)$ è completo.

Dimostrazione. Data una successione (f_n) di Cauchy, sappiamo già che converge in modo uniforme ad una funzione f. Dimostriamo che f è continua, cioè continua in ogni punto $c \in [a,b]$.

Dato $\varepsilon > 0$, vogliamo usare la disugualianza

$$|f(x) - f(c)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)|. \tag{3}$$

Si può scegliere n tale che $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ per ogni x (compreso $x = c$). Ma poi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon/3 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Quindi, f è continua in c.

Visto che $f \in C[a,b]$ possiamo usare la terminologia $d_s(f_n, f)$. La definizione di convergenza uniforme implica che $d_s(f_n, f) \to 0$. A parole, la nostra successione di Cauchy converge ad un elemento dello spazio $C[a,b]$ relativo alla distanza 'sup'. □

Esercizio 6.1.2. Sia (f_n) una successione di funzioni in $C[a,b]$ che converge uniformemente a f (quindi $f \in C[a,b]$). Verificare che

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx, \qquad n \to \infty, \tag{4}$$

usando la disuguaglianza nota $|\int g(x)dx| \leqslant \int |g(x)|\,dx$ per gli integrali. Trovare un esempio per mostrare che (1) può fallire se la convergenza è solo puntuale.

6.1.3 (fatto a lezione). Uno *spazio di Banach* è uno spazio vettoriale V con una norma completa (cioè, tale che ogni sucessione Cauchy converga in V), come $(C[a,b], \|\cdot\|_s)$. Mostrare che in uno spazio di Banach,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_n \quad \text{converge in } V.$$

6.1.4. Sia $w_n = e^{in} = \cos n + i \sin n$ e si consideri il sottoinsieme

$$W = \{w_n : n = 1, 2, 3 \ldots\}$$

della circonferenza in $\mathbb{C}$. Si fissi $N \in \mathbb{N}$. Spiegare perché

(i) esistono interi n, m con $1 \leqslant m < n \leqslant N + 1$ tale che $|w_n - w_m| < 2\pi/N$;

(ii) (per gli stessi n, m) $w_{n-m} \in S_\varepsilon(1)$ dove $\varepsilon = 2\pi/N$;

(iii) $1 \in \overline{W}$.

Calcolare $\sin 710$. Trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che $|\sin n| < |\sin 710|$ e $\cos n > 0$!

(iv) Dimostrare che $\overline{W}$ è tutta la circonferenza.