Teorema. Lo spazio metrico $(\widehat{M}, \widehat{d})$ costruito nella §5.3 è *completo*: una successione in $\widehat{M}$, Cauchy rispetto a $\widehat{d}$, converge ad un elemento di $\widehat{M}$.

Dimostrazione. Sia

$$([a^k_\bullet]) = ([a^1_\bullet], [a^2_\bullet], [a^3_\bullet], \dots) \tag{1}$$

una successione in $\widehat{M}$ di questo tipo. Per ogni valore del soprascritto k si tratta di un punto in $\widehat{M}$ e si può approssimare $[a^k_\bullet]$ con la successione costante $i(x_k) = [x_k]$ dove $x_k \in M$ (in prattica, $x_k = a^k_{n_k}$) in modo tale che

$$\widehat{d}([a^k_\bullet], [x_k]) < \frac{1}{k}.$$

La successione (x_k) così definita è Cauchy in M perché, dato $\varepsilon > 0$,

$$\begin{array}{rcl} d(x_k, x_\ell) & = & \widehat{d}([x_k], [x_\ell]) \\ & \leqslant & \widehat{d}([x_k], [a^k_\bullet]) + \widehat{d}([a^k_\bullet], [a^\ell_\bullet]) + \widehat{d}([a^\ell_\bullet], [x_\ell]) \\ & < & \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{\ell} \; < \; \varepsilon \end{array}$$

per k, ℓ sufficientemente grandi. Quindi (x_k) *definisce un elemento* $[x_\bullet]$ *di* $\widehat{M}$. Inoltre (1) converge a $[x_\bullet]$ perché

$$\widehat{d}([x_\bullet], [a^k_\bullet]) \;\leqslant\; \widehat{d}([x_\bullet], [x_k]) + \widehat{d}([x_k], [a^k_\bullet]) \;=\; \widehat{d}([x_\bullet], [x_k]) + \frac{1}{k}$$

tende a 0 per $k \to \infty$ (perché $\widehat{d}([x_\bullet], [x_k]) = \lim_{\ell \to \infty} d(x_\ell, x_k)$ dalla definizione di $\widehat{d}$.) □

Riassunto. Partendo da un qualsiasi spazio metrico (M, d), abbiamo costruito uno spazio metrico completo $(\widehat{M}, \widehat{d})$ che contiene (tramite un'isometria i) M come un *sottospazio metrico* con chiusura $\overline{M} = \widehat{M}$.

La costruzione (anche se diversa e più complicata) è analoga alla costruzione del *campo delle frazioni* da un *dominio di integrità* (come $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{Z}$). In ogni caso, applicata a $\mathbb{Q}$ (con la distanza euclidea $|x - y|$) produce $\mathbb{R}$ con tutte le sue solite proprietà.

Esercizi 5.4.1. Applicata invece a $\mathbb{Q}$ con la distanza p-adica, produce il campo

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ x = \sum_{i=n}^{\infty} a_i p^i \;:\; a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\},\; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

dei numeri p-adici. Cercare di capire che:

(i) Il completamento del sottospazio metrico $\mathbb{Z}$ produce il sottoanello

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : d_p(x, x) \leqslant 1, \text{cioè } n \geqslant 0\}$$

degli *interi* p-adici. (Con la distanza p-adica, a differenza di $|x - y|$, elementi di $\mathbb{Z}$ possono essere molto vicini, e.g. $d_3(1, 730) = 3^{-6}$.)

(ii) $\mathbb{Z}_p$ è anche un dominio di integrità ($xy = 0 \Rightarrow x = 0$ o $y = 0$) e $\mathbb{Q}_p$ è il suo campo delle frazioni.