5.3 La costruzione di $\mathbb{R}$ 10/05/2011

Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi e $\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$. L'insieme

$$\mathscr{C} = \{(a_n)\ :\ |a_n - a_m| \text{“}\to\text{”}\ 0\}$$

delle successioni di Cauchy in $\mathbb{Q}$ diventa un *anello* con le seguenti operazioni:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \qquad (a_n)(b_n) = (a_n b_n).$$

La moltiplicazione è commutativo e la successione costante $(1) = (1, 1, 1, , \ldots)$ è l'identità: $(a_n)(1) = (a_n)$. Il fatto che $(a_n b_n) \in \mathscr{C}$ segue dall'Esercizio 5.1.1(iii).

Lemma. L'insieme delle "successioni nulle"

$$\mathscr{N} = \{(a_n) : a_n \to 0\},$$

cioè quelli che convergono con limite 0, è un'ideale di $\mathscr{C}$.

A questo punto, possiamo identificare (o definire) $\mathbb{R}$ con l'anello quoziente

$$\mathscr{C}/\mathscr{N} = \{(a_n) + \mathscr{N} : (a_n) \in \mathscr{C}\};$$

Così, un elemento di $\mathbb{R}$ è una classe di equivalenza in $\mathscr{C}$ per la relazione

$$\begin{aligned} (a_n) \sim (b_n) &\iff (a_n) - (b_n) \in \mathscr{N} \\ &\iff a_n - b_n \to 0 \\ &\iff |a_n - b_n| \to 0, \text{ cioè } d(a_n, b_n) \to 0. \end{aligned}$$

Ad esempio, $(a_n) \sim (a_n + \frac{1}{n})$, e anche $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \sim (a_{101}, a_{102}, a_{103}, \ldots)$; la seconda equivalenza perché $a_n - a_{100+n} \to 0$.

Proposizione. $\mathbb{R}$ è un campo.

Dimostrazione. Dobbiamo controllare che ogni elemento non-nullo ha un inverso moltiplicativo. (Equivale a dire che $\mathscr{N}$ è un'ideale *massimale*.) Sia $(a_n) \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{N}$. Allora (esercizio) esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $n \geqslant N \Rightarrow a_n \neq 0$. A questo punto, si può definire

$$b_n = \begin{cases} 0 & n < N \\ 1/a_n & n \geqslant N. \end{cases}$$

Ne segue che $(a_n)(b_n) - 1 = (a_n b_n - 1) \in \mathscr{N}$, quindi $(b_n) + \mathscr{N}$ è l'inversa di $(a_n) + \mathscr{N}$.

Possiamo pensare a $\mathbb{Q}$ come sottoanello di $\mathbb{R}$. Più precisamente, definiamo

$$i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \qquad i(a) = (a) + \mathscr{N},$$

dove $(a) = (a, a, a, \ldots)$ è la succesione costante. È chiaro che i è iniettiva: $i(a) = i(b)$ implica che $(a - b) \in \mathscr{N}$, quindi $a = b$.

Invece di dimostrare che $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico e topologico, faremo la stessa cosa per uno spazio metrico qualsiasi M al posto di $\mathbb{Q}$.

Sia (M, d) uno spazio metrico. Allora esiste uno spazio metrico *completo* $(\widehat{M}, \widehat{d})$ che contiene M come sottospazio, cioè esiste un'applicazione iniettiva $i\colon M \subseteq \widehat{M}$ tale che
$$\widehat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y), \qquad x, y \in M.$$
Se M è completo i è suriettiva, ma in generale $\overline{i(M)} = \widehat{M}$ (il lemma sotto).

Per costruire $\widehat{M}$, partiamo delle successioni $(x_n), (y_n)$ di Cauchy in M. Se entrambe convergono con lo stesso limite $\ell \in M$ allora
$$d(x_n, y_n) \to 0, \qquad \text{per } n \to \infty. \tag{1}$$
Ma scriviamo $(x_n) \sim (y_n)$ quando succede (1) anche se ℓ non esiste. È facile verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Sia $\widehat{M}$ l'insieme delle classi di equivalenza.

D'ora in poi, scriviamo $[a_\bullet]$ *al posto della classe di equivalenza che contiene* (a_n).

Quindi
$$\widehat{M} = \{[x_\bullet] : (x_n) \text{ è Cauchy in } M\}.$$
Vogliamo definire
$$\widehat{d}([x_\bullet], [y_\bullet]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n),$$
ma dobbiamo verificare che questo limite esiste e non dipende dalle scelte delle successioni $(x_n), (y_n)$. Il limite esiste perché $(\lambda_n) = (d(x_n, y_n))$ è di Cauchy e $\mathbb{R}$ è completo. 'Cauchy' segue dalla disuguaglianza
$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$$
che vale per qualsiasi scelta di quattro punti in uno spazio metrico: basta osservare che $d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$ e poi scambiare $m \leftrightarrow n$. È facile verificare l'indipendenza dalle scelte $(x_n), (y_n)$.

Esercizio 5.3.1. $\widehat{d}$ soddisfa le condizioni (M1),(M2),(M3) della §1.1 e definisce una distanza su $\widehat{M}$.

Copiando quello che abbiamo fatto per $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, definiamo
$$i\colon\ M \to \widehat{M}, \qquad i(m) = [m],$$
dove $[m] = [m, m, m, \ldots]$ indica una successione costante. La notazione $[a_\bullet]$ è per evitare confusione con
$$i(a_n) = [a_n] = [a_n, a_n, a_n, \ldots].$$

Lemma. $i(M)$ è *denso* in $\widehat{M}$, cioè $\overline{i(M)} = \widehat{M}$.

Dimostrazione. Sia $[a_\bullet] \in \widehat{M}$ e si fissi n. Allora
$$d([a_\bullet], i(a_n)) = \lim_{m\to\infty} d(a_m, a_n)$$
e il limite a destra converge ad un numero reale $\ell_n \in \mathbb{R}$. Adesso, lasciamo $n \to \infty$. Allora $\ell_n \to 0$ e quindi ogni intorno sferico di $[a_\bullet]$ contiene un elemento di $i(\mathbb{Q})$. $\square$