Il concetto di compattezza si esprime in un terzo modo:

Lemma. Sia M uno spazio metrico per cui ogni successione ammette una ssc. Allora *per ogni* $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme finito $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq M$ tale che

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} S_\varepsilon(x_i). \tag{1}$$

Dimostrazione. Fissato ε, si supponga che *non* esista un ricoprimento finito del tipo (1). Cominciamo con $x_1 \in M$ arbitario. Certamente $S_\varepsilon(x_1) \neq M$, quindi esiste $x_2 \in M$ con $d(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Ma $S_\varepsilon(x_1) \cup S_\varepsilon(x_2) \neq M$, quindi esiste $x_3 \in M$ tale che $d(x_i, x_3) \geqslant \varepsilon$ for $i = 1, 2$. Andando avanti in questo modo, possiamo costruire una successione infinita (x_i) tale che $d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ per ogni i, j. Questa successione non è di Cauchy quindi non converge, contraddizione. □

Un spazio metrico per cui esiste, *per ogni* $\varepsilon > 0$, un ricoprimento del tipo (1) si chiama *totalmente limitato*.

Eserczio 5.2.1. Uno spazio metrico è *limitato* se esiste $D \in \mathbb{R}$ (il 'diametro') tale che

$$x, y \in M \;\Rightarrow\; d(x, y) \leqslant D$$

(meglio questa definizione!). Verificare che 'totalmente limitato' implica 'limitato'. Dimostrare che vale il viceversa in $\mathbb{R}^n$ (con la solita metrica).

5.2.2. Sia M uno spazio metrico completo. Verificare che un sottoinsieme (con la stessa metrica) di M è chiuso se e solo se è completo.

Teorema. Sia M uno spazio metrico. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. M è compatto (per ricoprimenti);
2. M è sequenzialmente compatto;
3. M è totalmente limitato e completo.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$. Per dimostrare $3 \Rightarrow 1$, l'idea è la seguente (i dettagli erano spiegati a lezione). Si comincia con un ricoprimento $\mathscr{V}$ di M che non ammette nessun srcf. Usando l'ipotesi 'totalmente limitato' si costruisce per induzione una seguenza di intorni $U_n = S_{1/2^n}(x_n)$ di raggi $1/2^n$ per cui $U_n \cap U_{n+1} \neq \varnothing$ and tale che $\{V \cap U_n : V \in \mathscr{V}\}$ non ammetta nessuna srcf. La successione (x_n) è Cauchy e quindi converge a $\ell \in M$. Ma se $\ell \in V \in \mathscr{V}$, si dimostra che esiste n tale che $U_n \subseteq V$, assurdo. □

Esercizio 5.2.3. Sia M lo spazio metrico $(C[0,1], d_s)$. Spiegare con tutti i dettagli perché $W = \{f \in C[0,1] : \|f\|_s = 1\}$ è limitato ma non totalmente limitato.