5.1 Convergenza in spazi metrici 03/05/2011

Definizione. Uno spazio metrico si dice *sequenzialmente compatto* se ogni successione (a_n) ammette una sottosuccessione convergente (ssc).

Abbiamo già dimostrato la parte più facile del

Teorema. Uno spazio metrico è sequenzialmente compatto *se e solo se* è compatto nel senso topologico. In altre parole:

$$\text{compatto per successioni} \quad \overset{f \quad d}{\Longleftrightarrow} \quad \text{compatto per ricoprimenti.} \tag{1}$$

La parte difficile del teorema sfrutta la

Definizione. Una successione (a_n) di uno spazio metrico è *Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$m, n \geqslant N \;\Rightarrow\; d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Essere Cauchy è una condizione necessario (fatto in classe) ma non sufficiente per la convergenza. È un test 'interno' che si può applicare alla successione senza sapere un eventuale limite ℓ.

Proposizione. Sia M uno spazio metrico <u>compatto</u>. Qualsiasi successione di Cauchy converge (quindi ad un punto $\ell \in M$).

Dimostrazione. Sia (a_n) una successione di Cauchy. Sappiamo che possiede una sottosuccessione (a_{n_k}) con $a_{n_k} \to \ell$ per $k \to \infty$. Il punto chiave è che la condizione di Cauchy forza *tutta* la successione a convergere con lo stesso limite.

Più precisamente, dato $\varepsilon > 0$, si scelgano $K, N \in \mathbb{N}$ tali che

$$\begin{aligned} k \geqslant K \;&\Rightarrow\; d(a_{n_k}, \ell) < \varepsilon/2 \\ m, n \geqslant N \;&\Rightarrow\; d(a_m, a_n) < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Prendendo $k \in \mathbb{N}$ tale che $k \geqslant K$ e $n_k \geqslant N$, otteniamo

$$n \geqslant N \;\Rightarrow\; d(a_n, \ell) \leqslant d(a_n, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, \ell) < \varepsilon.$$

Quindi (a_n) converge. □

Definizione. Uno spazio metrico M si dice *completo* se ogni successione di Cauchy converge ad un punto di M.

Esempi. Con la solita metrica, $\mathbb{Q}$ non è completo. Una successione (a_n) in $\mathbb{Q}$ tale che $a_n \to \sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ è Cauchy, ma non converge in $\mathbb{Q}$.

Sia $C[0,1]$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Dotato della norma e della metrica

$$\|f\|_s = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \qquad d_s(f,g) = \|f - g\|_s,$$

è completo. (Questo è un teorema che dimostreremo in seguito; nel frattempo si osservi che $d_s(f_n, g) \to 0$ equivale a dire che f_n tende a g in modo *uniforme*.)

Esercizi 5.1.1. (i) Uno spazio metrico dotato della metrica discreta è sempre completo. Descrivere le sue successioni di Cauchy.

(ii) Con la metrica p-adica, $\mathbb{Q}$ non è completo.

(iii) Con la solita metrica, $\mathbb{R}$ è completo. Dimostrare prima che una successione (a_n) di Cauchy è necessariamente limitata. Di conseguenza, (a_n) è contenuta in qualche intervallo $[c, d]$ compatto dove converge.

5.1.2. Verificare che $W = \{f \in C[0,1] : \|f\|_s \leqslant 1\}$ è chiuso rispetto alla topologia di d_s. Costruire una successione (f_n) di funzioni tale che

$$\|f_n\| = 1 = \|f_m - f_n\|, \qquad \forall m, n, \;\; m \neq n.$$

Dedurre che W non è compatto, nonostante il fatto che sia chiuso e limitato.

Si può controllare che

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \qquad d_p(f, g) = \|f - g\|_p$$

definisce una norma e una distanza su $C[0,1]$ per $p \geqslant 1$. (I casi $p = 1$ e $p = 2$ sono quelli più facili.) Ma lo spazio metrico che risulta non è completo:

5.1.3 Si consideri la funzione continua

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \qquad n \geqslant 3,$$

disegnata a lezione. Descrivere la funzione g, definita puntualmente da

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad \text{per ogni } \; x \in [0,1],$$

e dimostrare che $d_1(f_n, g) \to 0$ (ha senso perché g è integrabile). Dedurre che (f_n) è di Cauchy relativo alla distanza d_1 e dimostrare che non esiste una funzione h *continua* per cui $d_1(f_n, h) \to 0$.

5.1.4. Considerare le funzioni $g_n(x) = x^n$ e $h_n(x) = xe^{-nx}$ on $C[0,1]$. Dire che le successioni (g_n), (h_n) sono Cauchy e/o convergente per le metriche d_s e d_1 (quattro domande!)