Sia $\mathbb{N}$ l'insieme di numeri 'naturali', con o senza 0 (non importa). Sia (M, d) uno spazio metrico. Una successione in M è una funzione $a\colon \mathbb{N} \to M$, solo che scriviamo a_n al posto di $a(n)$. Quindi a è determinato dalla seguenza

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots), \qquad \text{se cominciamo con } n = 1.$$

Mentre c'è un numero infinito di tali valori, l'*insieme* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ può essere finito.

Definizione. Una successione (a_n) *converge* se esiste $\ell \in M$ tale che $d(a_n, \ell) \to 0$.

Il limite ℓ è unica; è facile verificare che se $a_n \to \ell$ e $a_n \to \ell'$ per $n \to \infty$ allora $\ell = \ell'$.

Se (a_n) converge in ℓ allora vale la stessa cosa per ogni *sottosuccesione* (b_k) dove

$$b_k = a_{n_k}, \qquad n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

è definito 'saltando' dei valori di a (e qui $k \to \infty$). Ma si incontrano spesso successioni non-convergenti che ammettono sottosuccessioni che convergono.

Vedremo in seguito un fenomeno più significativo: *qualsiasi* sucessione in $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ammette una sottosuccessione convergente (ssc). Questa è una conseguenza del

Lemma. Sia M uno spazio metrico *compatto* (cioè, la topologia $\mathscr{T}$ generata degli insiemi $S_r(x)$ è compatta). Ogni successione (a_n) in M ammette una ssc.

Dimostrazione. Sia $A = \{a_n\} \subseteq M$ l'insieme $\operatorname{Im} a$ dei valori di a. Se A è finito, qualche valore a_{n_1} sarà repetito ad infinitum nella successione dando origine ad una sottosuccessione costante e quindi convergente.

Possiamo supporre che A non sia finito. Affermiamo che A possiede un punto di accumulazione in M, cioè $A' \neq \varnothing$. Se no, per ogni $x \in M$ esiste un aperto

$$U_x = S_{\varepsilon(x)}(x) \quad \text{con} \quad U_x \cap A = \begin{cases} \{x\} & \text{se } x \in A, \\ \varnothing & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La compattezza di M implica che il ricoprimento $\{U_x : x \in M\}$ ammette un srcf e

$$A \subseteq M = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}.$$

Ma l'unione a destra contiene al massimo k elementi di A, assurdo.

Dimostriamo che una successione (a_n) con punto di accumulazione ammette una ssc. Questo fatto è quasi ovvio, ma *scrivere* una dimostrazione è più difficile. Dato $\ell \in A'$, possiamo trovare degli elementi

$$a_{n_k} \in S_{1/k}(\ell) \setminus \{\ell\}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

con la proprietà $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Ad esempio, avendo trovato $a_{n_1} \in S_1(\ell)$, si scelga r uguale al numero positivo più piccolo nell'elenco

$$\tfrac{1}{2},\ d(a_1, \ell),\ d(a_2, \ell),\ \ldots\ ,\ d(a_{n_1}, \ell)$$

e si cerchi $a_{n_2} \in S_r(\ell) \subseteq S_{1/2}(\ell)$. E così via. $\square$