4.2 HEINE-BOREL 19/04/2011

Supponiamo che Y sia un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$. Il ricoprimento formato dagli insiemi

$$(-n, n) \cap Y$$

deve contenere un sotto-ricoprimento finito (scrf), cioè esiste n tale che $Y \subseteq (-n, n)$. Quindi Y è *limitato*.

Possiamo dire che $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è *limitato* se esiste $N > 0$ tale che $Y \subseteq S_N(\mathbf{0})$. Essere 'limitato' ha senso anche in uno spazio metrico, ma non in uno spazio topologico in generale.

Teorema di Heine-Borel. Un sottoinsieme Y di $\mathbb{R}^n$ (Y con la topologia indotta da quella solita di $\mathbb{R}^n$) è *compatto* se e solo se Y è *chiuso* e *limitato*.

Lavoriamo dentro $\mathbb{R}$ con la solita topologia $\mathscr{T}$. Ricordiamo che $V \in \mathscr{T}$ se e solo se per ogni $x \in V$ abbiamo $(x - \delta,\ x + \delta) \subseteq V$ per qualche $\delta > 0$. Inoltre, Y è compatto se e solo se ogni suo ricoprimento con aperti di $\mathbb{R}$ ammettte un srcf in questo senso:

$$Y \subseteq \bigcup V_\alpha \quad \Rightarrow \quad Y \subseteq V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_k}.$$

La parte essenziale del teorema di Heine–Borel è incorporata nel

Lemma. Ogni intervallo $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) è compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}$ un ricoprimento arbitrario di Y con $V_\alpha \in \mathscr{T}$. Per definizione, $\mathscr{V}$ ricopre non solo $[a, b]$ ma ogni intervallo $[a, c]$ con $a < c < b$.

Si considerino

$$F = \{c \in [a, b] : \mathscr{V} \text{ ammettte un srcf per } [0, c]\}, \qquad s = \sup F.$$

Il punto a è contenuto in qualche $V_{\alpha_1} \in \mathscr{V}$, da cui segue (utilizzando il srcf che consiste solo di V_{α_1}) che $s > a$. Inoltre, se $c \in F$ allora $[a, c] \subseteq F$.

Supponiamo che $s < b$. Il punto s è contenuto in qualche $V_{\beta_1} \in \mathscr{V}$, ed esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(s - \varepsilon,\ s + \varepsilon) \subseteq V_{\beta_1} \cap [a, b]$. Certamente $s - \frac{1}{2}\varepsilon \in F$, altrimenti $s \neq \sup F$; segue che

$$[a,\ s + \tfrac{1}{2}\varepsilon] \subseteq V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_k} \cup V_{\beta_1},$$

e quindi $s + \frac{1}{2}\varepsilon \in F$, contraddizione.

Quindi $s = b$ e (osservando che anche b è ricoperto da un aperto in $\mathscr{V}$) possiamo ripetere lo stesso argomento per concludere che $b \in F$, cioè che $\mathscr{V}$ ammette un srcf relativo a tutto $[a, b]$. $\square$

Adesso, vogliamo dedurre che *ogni* sottoinisieme Y chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ (non solo un intervallo di tipo $[a,b]$) è compatto. Se Y è limitato, allora $Y \subseteq [a,b]$ per qualche $a,b \in \mathbb{R}$. Se Y è chiuso nello spazio topologico $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ allora

$$[a,b] \setminus Y \;=\; (\mathbb{R} \setminus Y) \cap [a,b] \;\in\; \mathscr{T}_{[a,b]},$$

e Y è anche chiuso nello spazio $[a,b]$. Il fatto che lo spazio topologico Y sia compatto segue dal

Proposizione. Un sottoinsieme $\underline{\text{chiuso}}$ Y di uno spazio $\underline{\text{compatto}}$ X è $\underline{\text{compatto}}$.

Dimostrazione. Dato un ricoprimento

$$Y \;\subseteq\; \bigcup V_\alpha, \qquad \{V_\alpha\} = \mathscr{V} \subseteq \mathscr{T}_X,$$

possiamo aggiungere l'aperto $X \setminus Y$ per ottenere un ricoprimento $\mathscr{V}^+$ di X. Per ipotesi, $\mathscr{V}^+$ ammette un scrf, diciamo

$$X \;\subseteq\; V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_k} \cup (X \setminus Y).$$

Ne segue che $Y \subseteq V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_k}$ e $\mathscr{V}$ ammettte un srcf relativo a Y. □

Possiamo usare lo stesso argomento per dimostrare che un sottoinsieme Y chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ è compatto. In questo caso,

$$Y \subseteq S_N(\mathbf{0}) \subseteq [-N,N]^n = [-N,N] \times \cdots \times [-N,N],$$

e basta sapere che $[-N,N]^n$ è compatto. Questo fatto è una conseguenza dal seguente risultato (che non dimostriamo qui):

Teorema. Se X, Y sono spazi topologici compatti, il prodotto $X \times Y$ (con la topologia definita in §3.1) è compatto.

Per quanto riguarda Heine-Borel, rimane da dimostrare che un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ è necessariamente chiuso. Più in generale, abbiamo la

Proposizione. Un sottoinsieme $\underline{\text{compatto}}$ Y di uno spazio $\underline{\text{Hausdorff}}$ X è $\underline{\text{chiuso}}$.

Dimostrazione. Si fissi $x \in X \setminus Y$. Basta costruire un aperto U tale che $x \in U \subseteq X \setminus Y$ (questo dimostra che $x \notin \overline{Y}$).

Per ogni $y \in Y$, esistono $V_y, W_y \in \mathscr{T}_X$ tali che $y \in V_y$, $x \in W_y$ e $V_y \cap W_y = \varnothing$. Chiaramente, $\{V_y : y \in Y\}$ è un ricoprimento di Y e quindi ammette un srcf:

$$Y \;\subseteq\; V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_k}.$$

L'aperto cercato è l'intersezione finita

$$U = W_{y_1} \cap \cdots \cap W_{y_k}.$$

Non esiste alcun $u \in U \cap Y$ perché altrimenti $u \in U \cap V_{y_i} \subseteq W_{y_i} \cap V_{y_i} = \varnothing$. □