3.3 Segue 13/04/2011

Riassunto:

Definizione su un campo $\mathbb{F}$ dello spazio proiettivo $\mathbb{FP}^n = \dfrac{(\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\})}{\sim}$.

Il piano di Fano $\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$ ha 7 punti e 7 'rette'.

Il piano proiettivo $P = \mathbb{RP}^2$ visualizzato come la sfera con un 'crosscap'.

Una corrispondenza biunivoca tra il gruppo $\{X \in \mathbb{R}^{3,3} : {}^t X\, X = I,\ \det X = 1\}$ delle rotazioni e lo spazio topologico $\mathbb{RP}^3$.

4.1 Definizione di compattezza

Il concetto di compattezza è collegato alla possibilità di affermare l'esistenza di punti limiti. In particolare, se W è un sottoinsieme infinito di uno spazio metrico compatto, vedremo che la derivata W' non può essere vuoto. Ma la definizione è fatta in termini di *ricoprimento*.

Sia $(X, \mathscr{T}_X)$ uno spazio topologico. Diciamo che una famiglia di sottoinsiemi *ricopre* X se la sua unione è uguale a tutto X.

Definizione. Un *ricoprimento aperto* di X è una famiglia $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq \mathscr{T}_X$ tale che
$$X = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha,$$
cioè: $\forall x \in X \ \ \exists \alpha \in A$ con $x \in V_\alpha$.

D'ora in poi, con la parola 'ricoprimento' intendiamo sempre 'ricoprimento aperto'. Spesso non servono tutti gli elementi di $\mathscr{V}$: in particolare, diciamo che $\mathscr{V}$ ammette un *sottoricoprimento finito* (scriviamo *srcf*) se esiste una sottofamiglia finita di $\mathscr{V}$ che ricopre X:
$$X = V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_k}, \qquad V_{\alpha_i} \in \mathscr{V}.$$
Attenzione: ogni spazio X ammette un ricoprimento finito, ad esempio $\{X\}$ che consiste solo di X stesso, ma quello che vogliamo sapere è se un *dato* ricoprimento ne *contiene* uno finito. Questo è il punto della

Definizione. Lo spazio $(X, \mathscr{T}_X)$ si dice *compatto* se *ogni* ricoprimento di X ammette un sottoricoprimento finito.

Esempio. Con la solita topologia, $\mathbb{R}$ non è compatto perché
$$\mathscr{V} = \{(-n, n) : n = 1, 2, 3, \ldots\}$$
è un ricoprimento senza srcf.