3.3 COSTRUZIONI DI SUPERFICI 12/04/2011

Sia $(X, \mathscr{T})$ uno spazio topologico, e $\pi\colon X \twoheadrightarrow Q$ un'applicazione suriettiva. La topologia quoziente *indotta* su Q è

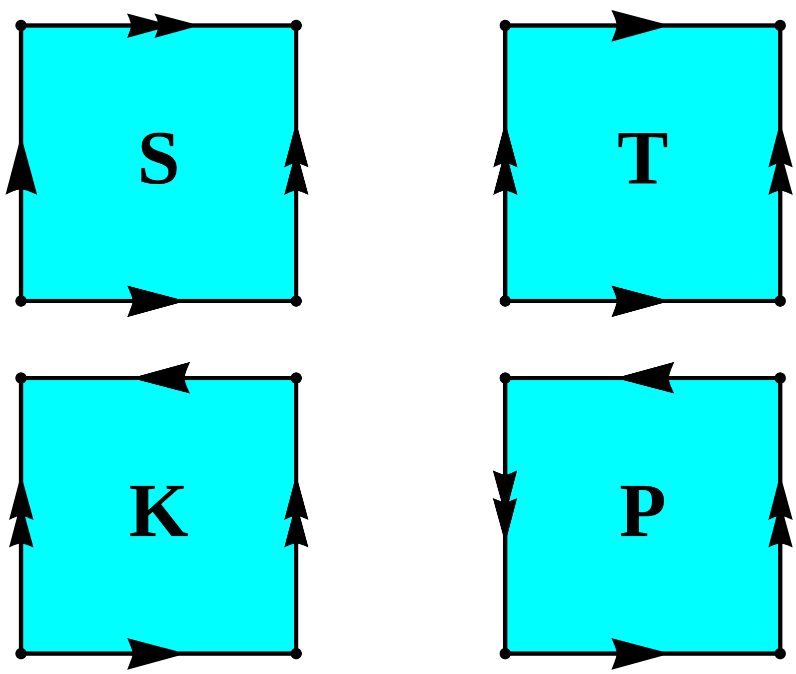
$$\mathscr{T}_Q = \{U \subseteq Q : \pi^{-1}(U) \in \mathscr{T}_X\}.$$

Quindi per controllare se U è aperto in Q, basta guardare la sua controimmagine. Applichiamo questo concetto alla costruzione di superfici cominciando con

$$X = [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1] = \{(s,t) : 0 \leqslant s, t \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

identificando i lati in modo che Q non abbia più bordo. Studieremo i quattro esempi indicati in cui Q assume il nome

Sfera	**T**oro
Bottiglia di **K**lein	Piano **P**roiettivo.



Per capire il primo quoziente $S = X/\!\sim$, ogni punto interno del quadrato rappresenta un'unica classe di equivalenza mentre i lati sono identificati nel seguente modo:

$$(s,0) \sim (0,s) \quad \forall s \in [0,1], \qquad (1,t) \sim (t,1) \quad \forall t \in [0,1].$$

Usando questa relazione, S diventa una 'calzone' omeomorfa alla sfera

$$S^2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

con la sua topologia indotta da $\mathbb{R}^3$.

Un modello 'ciambella' del quoziente T si otteniene dall'applicazione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$(s,t) \mapsto (x,y,z) = \Big((2+\cos 2\pi t)\cos 2\pi s,\ (2+\cos 2\pi t)\sin 2\pi s,\ \sin 2\pi t\Big).$$

L'immagine $f(\mathbb{R}^2)$ è la superficie di rotazione ottenuta ruotando la circonferenza $(y,z) = (2+\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t)$ intorno all'asse z. Visto la periodicità di cos e sin, abbiamo $f(\mathbb{R}^2) = f(X)$; inoltre, f induce un'applicazione biiettiva

$$F\colon\ T = X/\!\sim\ \longrightarrow\ f(X).$$

Una rappresentazione alternativa di T si ottiene da $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$(s,t) \mapsto \Big(\cos 2\pi s,\ \sin 2\pi s,\ \cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t\Big), \tag{1}$$

che induce una biiezione

$$G\colon\ T\ \longrightarrow\ g(X)$$

con $g = G \circ \pi$.

Esercizio 3.1.1. Dimostrare che $g(\mathbb{R}^2)$ è

(i) contenuta nella sfera $S^3 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : \|\mathbf{v}\| = 1\}$;

(ii) omeomorfo al prodotto di due circonferenze (ciasuno in $\mathbb{R}^2$).

3.1.2. Dimostrare l'esistenza della biiezione G e il fatto che G è un omeomorfismo tra T (con la topologia quoziente) e $g(T)$ (con la topologia indotta da $\mathbb{R}^4$).

3.1.3. Si consideri la base ortonormale

$$\{\ \mathbf{e}_1 = (\tfrac{3}{5},0,\tfrac{4}{5},0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,0,1),\quad \mathbf{e}_4 = (\tfrac{4}{5},0,-\tfrac{3}{5},0)\ \}$$

di $\mathbb{R}^4$. La proiezione ortogonale

$$p\colon\ g(T) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) \cong \mathbb{R}^3$$

avrà componenti $g(s,\,t)\cdot \mathbf{e}_i$ per $i = 1,2,3$. Usando (1), dire se p è iniettiva e (eventualmente) disegnare l'immagine $p(g(T))$ con il computer.

Il quoziente K rappresenta la *bottiglia di Klein*. Si può dimostrare che non esiste nessun'applicazione iniettiva continua $K \hookrightarrow \mathbb{R}^3$; nel solito disegno della bottiglia si usa un'applicazione $k\colon K \to \mathbb{R}^3$ in cui un tubo passa dentro se stesso prima di identificare i bordi-circonferenze. Questo dà origine ad una circonferenza C in $\mathbb{R}^3$ per cui $f^{-1}(C) = C_1 \sqcup C_2$ consiste di due circonferenze disgiunte nella superficie astratta K, mentre la restrizione di k a $K \setminus f^{-1}(C)$ è iniettiva.

Esercizio 3.1.4. Completare la descrizione del quarto quoziente P, scrivendo esplicitamente una biiezione tra P (espresso come $D/\!\sim$ dove $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1\}$) e l'insieme delle rette passande per l'origine in $\mathbb{R}^3$.