1.1 Definizione di uno spazio metrico 15/03/2011

Sia X un insieme.

Definizione. Una *metrica* o *distanza* su X è una funzione

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$

tale che, per ogni $x, y, z \in X$, abbiamo
(M1) $d(x,y) \geqslant 0$, e $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$;
(M3) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Esempi:
(1) $X = \mathbb{R}^2$ e

$$d((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \tag{1}$$

la solita distanza nel piano. In questo caso, (M3) afferma che la lunghezza di un lato di un triangolo è sempre minor o uguale alla somma delle lunghezze degli altri due. Per questo motivo, (M3) si chiama in generale la *disuguaglianza triangolare*.

Più in generale, per $X = \mathbb{R}^n$ abbiamo la distanza Euclidea

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2}.$$

Per $n = 1$, non è altro che il valore assoluto: $d(x,x') = |x - x'|$. Per $n = 2$, (1) coincide con il modulo

$$|z - z'| \quad \text{se scriviamo} \quad z = x + iy,\ z' = x' + iy' \in \mathbb{C}.$$

(Si ricordi che $|z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2$.)

(2) Per qualsiasi insieme X, definiamo

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

Questa è la *metrica banale* o la *distanza discreta*, che ha un significato teorico.

(3) Sia $X = C[a,b]$, l'insieme delle funzioni continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Sia

$$d(f,g) = \sup \Big\{ |f(x) - g(x)| : x \in [a,b] \Big\}.$$

Allora (esercizio) d è una distanza su X.

(4) Fissato un paese, sia $X = \{\text{tutte le stazioni ferroviarie}\}$ e $d(A,B)$ il costo di un biglietto del treno da A in B. È vero che d è una distanza? Forse dipende dal paese. (Con gli aeroporti, sicuramente, no!)

Negli esempi (1) e (3), l'insieme X è uno spazio vettoriale è la distanza proviene dalla seguente

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale (non necessariamente di dimensione finita). Una *norma* è una funzione
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$
tale che, per ogni $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo

(N1) $\|v\| \geqslant 0$, e $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$.

(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$;

(N3) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

È faile verificare che, data una norma, $d(x, y) = \|x - y\|$ definise una distanza.

Ad esempio, per dimostrare la proprietà (M3) per la distanza
$$d(z, z') = |z - z'|, \qquad z, z' \in \mathbb{C},$$
basta dimostrare la (N3) per il modulo. Abbiamo
$$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{z}\, z').$$
Ovviamente $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$, quindi $\mathrm{Re}(\overline{z}\, z') \leqslant |\overline{z} z'| = |\overline{z}||z'| = |z||z'|$, e
$$|z + z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2,$$
da cui segue (N2).

Proposizione (esercizio). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subseteq X$. Definiamo una distanza d_Y per restrizione:
$$d_Y(y, y') = d(y, y'), \qquad y, y' \in Y.$$
Allora d_Y è una distanza su Y.