0. Introduzione

Questo corso è dedicato alla *topologia*, un linguaggio che unisce

(i) la logica,
(ii) l'analisi reale,
(iii) l'analisi complessa,
(iv) l'analisi vettoriale, e
(v) la geometria.

Daremo qualche esempio di questi legami, anche se le lezioni tenderanno a sottolineare (ii) con l'enfasi sulla *continuità* e la *convergenza*. Comunque, la logica è rilevante perché la topologia ha iniziato con lo studio (prima del 1900) di sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$. Qualsiasi trattamento rigoroso dell'argomento ha bisogno della teoria degli insiemi e della logica.

Per quanto riguarda (ii), sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $a < b$. Ricordiamo i seguenti teoremi:

A. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.
B. L'estremo $s = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ è finito e esiste $c \in [a, b]$ t.c. $s = f(c)$.

Capiremo meglio questi teoremi nel contesto delle definizioni (in seguito) di *insieme connesso* e *insieme compatto*, rispettivamente. Sono entrambi conseguenze di

C. L'immagine $f([a, b])$ è un intervallo chiuso limitato $[i, s]$,

che segue della continuità di f, e porta alla definizione di *spazio topologico*.

Il concetto di connettività si presenta nel seguente problema in analisi complessa: determinare per quali regioni $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e per quali curve chiuse γ vale il teorema di Cauchy

$$f\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ analitica} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Vale se Ω è *semplicemente connesso* e γ è *semplice*, ma più in generale dipende della classe di *omologia* di γ. Collegato a questo discorso è il *teorema della curva di Jordan*.

Ci sono versioni dello stesso problema nello studio degli operatori vettoriali grad, rot, div. È ben noto che, per ogni funzione differenziabile $f(x, y, z)$ e per ogni campo vettoriale $\mathbf{A}(x, y, z)$, abbiamo sempre

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) \equiv \mathbf{0}, \qquad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \mathbf{A}) \equiv 0.$$

Una domanda più sottile è: dato un campo vettoriale $\mathbf{B}$ definito su un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ con $\mathrm{rot}\, \mathbf{B} \equiv \mathbf{0}$, esiste f tale che $\mathbf{B} = \mathrm{grad}\, f$? La risposta dipende dalla forma di Ω. Analogamente, se $\mathrm{div}\, \mathbf{B} \equiv 0$ esiste $\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\, \mathbf{A}$?

Per quanto riguarda (v), possiamo citare la classificazione di *superfici*. Il cosiddetto *toro* T^2 si ottiene identificando i lati (in coppie) del quadro

$$Q = [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$$

per definire prima il cilindro e poi la ciambella come *quozienti* dello spazio topologico Q. Cambiando però il modo in cui si identificano i lati, si può costruire delle superfici (la bottiglia di Klein e il piano proiettivo) più complicate che non si vedono bene in $\mathbb{R}^3$.