

**Über Untermannigfaltigkeiten von  
komplexen Raumformen**

Inaugural-Dissertation  
zur  
Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität zu Köln

vorgelegt von

**Jürgen Berndt**

aus Wolfenbüttel

Köln 1989

Berichterstatter: Prof. Dr. H. Reckziegel  
Prof. Dr. P. Dombrowski

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Februar 1989

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
Bezeichnungen	5
<b>§1 Grundlagen aus der Theorie komplexer Mannigfaltigkeiten</b>	<b>6</b>
1.1 Komplexe Mannigfaltigkeiten	6
1.2 Die komplexe Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit	6
1.3 Holomorphe Abbildungen	7
1.4 Hermitesche Mannigfaltigkeiten	7
1.5 Kähler-Mannigfaltigkeiten	8
1.6 Komplexe Raumformen	8
1.7 Der Krümmungstensor einer komplexen Raumform	8
1.8 Kählerwinkel und Schnittkrümmung in komplexen Raumformen	9
1.9 Der komplexe Zahlraum $\mathbb{C}^m$	9
1.10 Der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^m$	9
1.11 Der komplex hyperbolische Raum $\mathbb{C}H^m$	10
1.12 Die Standardräume konstanter holomorpher Schnittkrümmung	11
1.13 Komplexe freie Beweglichkeit	12
<b>§2 Untermannigfaltigkeiten von komplexen Raumformen</b>	<b>13</b>
2.1 Allgemeines	13
2.2 Beispiele	15
2.3 Codazzi-Untermannigfaltigkeiten	18
2.4 Total-geodätische Untermannigfaltigkeiten	18
2.5 Total-nabelsche und sphärische Untermannigfaltigkeiten	19
<b>§3 Untermannigfaltigkeiten und die Hopf-Abbildung</b>	<b>23</b>
3.1 Pseudo-Riemannsche Submersionen	23
3.2 Die Levi-Civita-Ableitung bei pseudo-Riemannschen Submersionen	25
3.3 Projektionen von Geodätischen	26

§4 Röhren und Fokalfächen	31
4.1 $M$ -Jacobifelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten	31
4.2 $M$ -Jacobifelder in lokal-symmetrischen Räumen	33
4.3 Brennpunkte	35
4.4 Die Eigenwerte des Formoperators von Röhrenabbildungen	42
4.5 Parallel- und Fokalabbildungen von Hyperflächen	47
§5 Reelle Hyperflächen von komplexen Raumformen	55
5.1 Allgemeines	55
5.2 Hopf-Hyperflächen	56
5.3 Klassifikation der Hopf-Hyperflächen mit konstanten Hauptkrümmungen	65
5.4 Reelle Hyperflächen mit Sasaki-Struktur	76
5.5 Kontakt-Hyperflächen	78
§6 Zur Geometrie der Hopf-Hyperflächen von $\mathbb{C}P^m$ und $\mathbb{C}H^m$ mit konstanten Hauptkrümmungen	80
6.1 Die Integralkurven des Hopf-Feldes $U$	80
6.2 Homogenität	84
6.3 Integrabilität der Eigenbündel	85
6.4 Diffeomorphie- bzw. Isometrietypen	89
6.5 Über einige Quotientenräume $M/RU$	90
6.6 Modifizierte Hopf-Abbildungen auf $\mathbb{C}P^m$	92
6.7 Geodätische	93
6.8 Zur Geometrie der Röhren um $\mathbb{C}P^k$ und $\mathbb{C}H^k$	94
6.9 Familien mit konstanten Hauptkrümmungen	98
6.10 Integral-Untermannigfaltigkeiten des Kontaktbündels	101
Literaturverzeichnis	103

## Einleitung

Aus der klassischen Differentialgeometrie von Kurven und Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum entwickelte sich nach Einführung der Riemannschen Mannigfaltigkeiten die allgemeinere Differentialgeometrie von Untermannigfaltigkeiten. Zunächst untersuchte man überwiegend die Geometrie von Untermannigfaltigkeiten in Räumen konstanter Krümmung, insbesondere im euklidischen Raum beliebiger Dimension, in der Sphäre und im reell hyperbolischen Raum. Erst in jüngster Zeit beschäftigte man sich intensiver mit Untermannigfaltigkeiten auch in anderen Räumen, beispielsweise in Kähler-Mannigfaltigkeiten oder in symmetrischen Räumen. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Differentialgeometrie von Untermannigfaltigkeiten in Kähler-Mannigfaltigkeiten konstanter holomorpher Schnittkrümmung, den sogenannten komplexen Raumformen, liefern. Im Vordergrund stehen hierbei die beiden nicht-euklidischen Standardräume konstanter holomorpher Schnittkrümmung, also der komplex projektive Raum und der komplex hyperbolische Raum.

In §1 fassen wir Grundlagen aus der Theorie komplexer Mannigfaltigkeiten zusammen. Ferner geben wir die bekannte Konstruktion des  $m$ -dimensionalen komplex projektiven Raumes  $\mathbb{C}P^m$  bzw. des  $m$ -dimensionalen komplex hyperbolischen Raumes  $\mathbb{C}H^m$  mit Hilfe der Hopf-Abbildung von der Sphäre  $S^{2m+1}$  auf  $\mathbb{C}P^m$  bzw. vom anti-de Sitter Raum  $H^{2m+1}$  auf  $\mathbb{C}H^m$  an.

§2 enthält zunächst einige Grundlagen über Untermannigfaltigkeiten von komplexen Raumformen (Bezeichnungen, Definitionen, fundamentale Gleichungen, Beispiele). Wir klassifizieren dann in 2.4 bzw. 2.5 die total-geodätischen bzw. sphärischen Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{C}P^m$  und von  $\mathbb{C}H^m$ . Diese Klassifikationen sind zwar im wesentlichen bereits wohlbekannt, jedoch ist unsere Herleitung hier elementar und in dieser Form in der bekannten Literatur nicht zu finden.

In §3 untersuchen wir das Verhalten der Geodätischen von Untermannigfaltigkeiten in  $S^{2m+1}$  bzw.  $H^{2m+1}$  unter der Hopf-Abbildung (Theorem 3.3). Dabei erhalten wir neue Charakterisierungen gewisser Klassen von Untermannigfaltigkeiten in  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  (Satz 1 in 3.3). Weiterhin zeigen wir, daß eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  genau dann geodätisch vollständig ist, wenn ihr Urbild unter der Hopf-Abbildung geodätisch vollständig ist (Satz 2 in 3.3). Die Herleitung von Theorem 3.3 basiert auf Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen den Levi-Civita-Ableitungen bei pseudo-Riemannschen Submersionen beschreiben (Theorem 3.2). Diese Gleichungen verallgemeinern die bekannten Formeln von O'Neill [ON1].

In §4 befassen wir uns mit Röhren und Fokalfächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Bekanntlich bilden Röhren um Untermannigfaltigkeiten eine wichtige Klasse von (immersierten) Hyperflächen in der Riemannschen Geometrie. Wir erörtern hier eine Möglichkeit zur Berechnung der Hauptkrümmungen

solcher Röhren, die auf einer Diskussion sogenannter  $M$ -Jacobifelder (4.1) beruht. Zunächst stellen wir das Differential von Röhrenabbildungen mit  $M$ -Jacobifeldern dar (Theorem 4.1). Als geometrische Anwendung erhalten wir eine Charakterisierung der Brennpunkte von Untermannigfaltigkeiten (Satz 4.3). Ist eine Röhrenabbildung um eine Untermannigfaltigkeit eine Immersion, so lassen sich theoretisch die Hauptkrümmungen der induzierten Röhre mit  $M$ -Jacobifeldern beschreiben (Satz 4.4). Praktisch durchführen läßt sich eine Berechnung der Hauptkrümmungen nur dann, wenn die  $M$ -Jacobifelder explizit bekannt sind, also zum Beispiel in lokal-symmetrischen Räumen (4.2 und Korollar 4.4). Auf ähnliche Weise untersuchen wir in 4.5 die Hauptkrümmungen von Fokalfächen. Die theoretischen Ergebnisse erläutern wir anhand von Beispielen, insbesondere an den Röhren um total-geodätische Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$ .

Reelle Hyperflächen von komplexen Raumformen sind der Gegenstand von §5. Wir führen zunächst den Begriff der Hopf-Hyperfläche ein. Seien  $M$  eine reelle Hyperfläche einer Kähler-Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$ ,  $J$  die komplexe Struktur von  $\bar{M}$  und  $TM$  bzw.  $\perp M$  das Tangential- bzw. Normalenbündel von  $M$  (in  $\bar{M}$ ). Die 1-dimensionale Blätterung von  $M$  durch die Integral-Mannigfaltigkeiten des Untervektorbündels  $J(\perp M)$  von  $TM$  nennen wir die Hopf-Blätterung von  $M$ . Wir sagen,  $M$  ist eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$ , wenn die Hopf-Blätterung von  $M$  total-geodätisch ist. In diesem Sinne ist  $S^{2m-1}$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}^m$ ; ihre Hopf-Blätterung besteht gerade aus den Fasern der klassischen Hopf-Abbildung  $S^{2m-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{m-1}$ . Ist  $M$  orientierbar und  $\xi$  ein globales Einheitsnormalenfeld auf  $M$ , so nennen wir das Vektorfeld  $U := -J\xi$  das Hopf-Feld von  $M$  (bezüglich  $\xi$ ).

In 5.2 studieren wir Hopf-Hyperflächen  $M$  von komplexen Raumformen  $\bar{M}$ . Von fundamentaler Bedeutung ist die Tatsache, daß eine orientierbare reelle Hyperfläche  $M$  von  $\bar{M}$  genau dann eine Hopf-Hyperfläche ist, wenn das Hopf-Feld  $U$  in jedem Punkt eine Hauptkrümmungsrichtung von  $M$  ist (Satz 1). Im Falle nicht-euklidischer komplexer Raumformen ist dann die zugehörige Hauptkrümmungsfunktion lokal konstant (Theorem 1); geometrisch bedeutet dies insbesondere, daß die Integralkurven von  $U$  sphärische Kurven in  $\bar{M}$  sind. Als Konsequenz erhält man interessante Informationen über die Hauptkrümmungen von Hopf-Hyperflächen (Theorem 2). Weiterhin untersuchen wir Fokalfächen von Hopf-Hyperflächen (Theorem 3) und geben Charakterisierungen dafür an, daß ihre Hopf-Blätterung Riemannsch ist (Theorem 4).

Zu einem interessanten Klassifikationsproblem gelangt man bei der Frage nach Hyperflächen mit konstanten Hauptkrümmungen; in Räumen konstanter Krümmung ist dieses Problem äquivalent zum bekannten Klassifikationsproblem isoparametrischer Hyperflächen (vgl. [Ca]). Diese sind bereits vollständig klassifiziert worden im euklidischen Raum von Levi-Civita [Le] und Segre [Se] sowie im reell hyperbolischen Raum von E.Cartan [Ca]; in der Sphäre dagegen steht eine vollständige Klassifikation noch aus. In 5.3 befassen wir uns mit diesem Problem in  $\bar{M} = \mathbb{C}P^m$  bzw.  $\bar{M} = \mathbb{C}H^m$ , wobei wir uns aufgrund der

“mangelnden Isotropie” von  $\bar{M}$  auf Hopf-Hyperflächen beschränken müssen. Im Jahr 1986 hat Kimura [Ki2] die reellen Hyperflächen  $M$  mit konstanten Hauptkrümmungen in  $\mathbb{C}P^m$  klassifiziert unter der zusätzlichen Voraussetzung: “Für jeden Einheitsnormalenvektor  $\xi$  von  $M$  ist  $J\xi$  eine Hauptkrümmungsrichtung von  $M$ ” (Theorem 1); wie bereits gesagt, charakterisiert diese Bedingung die Hopf-Hyperflächen von  $\mathbb{C}P^m$ . Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit ist die Klassifikation der Hopf-Hyperflächen mit konstanten Hauptkrümmungen im komplex hyperbolischen Raum (Theorem 2). Zunächst einmal besitzen folgende Hopf-Hyperflächen von  $\mathbb{C}H^m$  konstante Hauptkrümmungen:

- a) die Röhren um die kanonisch eingebetteten total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten  $\mathbb{C}H^k$  in  $\mathbb{C}H^m$ ,  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ ;
- b) die Röhren um die kanonisch eingebettete total-geodätische Untermannigfaltigkeit  $\mathbb{R}H^m$  in  $\mathbb{C}H^m$ ;
- c) die Horosphären in  $\mathbb{C}H^m$ .

Es zeigt sich nun, daß hiermit bereits die vollständige Klassifikation angegeben ist, d.h. genauer: Alle weiteren Hopf-Hyperflächen von  $\mathbb{C}H^m$  mit konstanten Hauptkrümmungen sind (bis auf holomorphe Isometrie) offene Teile dieser “Modellräume”. Kimuras Beweis basiert auf einem Resultat von Münzner [Mü] über die mögliche Anzahl verschiedener Hauptkrümmungen isoparametrischer Hyperflächen in der Sphäre sowie der Klassifikation der homogenen reellen Hyperflächen in  $\mathbb{C}P^m$  von Takagi [Ta1]. Da entsprechende Resultate im anti-de Sitter Raum bzw. in  $\mathbb{C}H^m$  nicht bekannt sind, läßt sich Kimuras Beweis offensichtlich nicht von  $\mathbb{C}P^m$  auf  $\mathbb{C}H^m$  übertragen. Der wesentliche Punkt in unserem Beweis ist eine Gleichung für komplexe Raumformen (Theorem 3), die E.Cartans “Fundamentalformel” [Ca] in Räumen konstanter Krümmung entspricht. Mit Hilfe dieser Gleichung können wir die maximale Anzahl verschiedener Hauptkrümmungen abschätzen.

Als Anwendung der Resultate in 5.3 klassifizieren wir in 5.4 die reellen Hyperflächen von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$ , deren kanonische fast-kontakt metrische Struktur homothetisch zu einer Sasaki-Struktur ist, sowie in 5.5 die Kontakt-Hyperflächen von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$ .

In §6 untersuchen wir die Geometrie der Modellräume, die in 5.3 bei den Klassifikationen der Hopf-Hyperflächen mit konstanten Hauptkrümmungen in  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  vorkommen. Aufgrund dieser Klassifikationen kann man diese Modellräume als die “einfachsten” reellen Hyperflächen von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  bezeichnen. Daher ist es interessant zu sehen, welchen Einfluß die “fehlende Isotropie” des umgebenden Raumes auf die Geometrie dieser Modellräume hat. Betrachten wir zum Beispiel eine geodätische Hypersphäre (Abstandssphäre)  $M$  vom Radius  $r$  in  $\bar{M} \in \{\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}^m, \mathbb{C}H^m\}$ , wobei  $r \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  im projektiven Fall und  $r \in \mathbb{R}_+$  in den beiden anderen Fällen gilt.  $M$  ist eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$ , und es gilt:

- a) Die Hopf-Blätterung  $L$  von  $M$  besteht aus Kreisen von jeweils gleichem Umfang (vgl. 6.1).
- b) Der Raum der Blätter  $M/L$  ist ein komplex projektiver Raum und die kanonische Projektion  $\pi : M \rightarrow M/L$  eine Riemannsche Submersion (vgl. 6.5).
- c) Die horizontalen Geodätischen von  $M$  (bezüglich  $\pi$ ) sind ebenfalls Kreise von jeweils gleichem Umfang (vgl. 6.7). Das Verhältnis des Umfangs der Hopf-Kreise zu dem der horizontalen Kreise ist gleich

$$\begin{array}{ll} \cos(r) & , \text{ im projektiven Fall} \\ 1 & , \text{ im euklidischen Fall} \\ \cosh(r) & , \text{ im hyperbolischen Fall} \end{array}$$

(vgl. 6.1 und 6.7).

Also sehen wir, daß auch in den nicht-euklidischen Fällen "modifizierte" Hopf-Abbildungen auf den komplex projektiven Raum vorliegen (vgl. 6.6). Allerdings hat die Anisotropie von  $\mathbb{C}P^m$  und  $\mathbb{C}H^m$  zur Folge, daß die Sphäre  $M$  in Richtung der Hopf-Kreise verzerrt ist. Von den weiteren Ergebnissen in §6 erwähnen wir hier noch, daß im Gegensatz zur Situation in Räumen konstanter Krümmung die Eigenbündel zu konstanten Hauptkrümmungen nicht immer integrabel sind (vgl. 6.3). Dennoch gilt, daß in diesen Modellräumen Geodätische bereits Krümmungslinien sind, wenn sie an einer Stelle in einer Hauptkrümmungsrichtung verlaufen; solche Geodätische sind stets sphärische Kurven im umgebenden Raum (vgl. 6.7).

Nach Beendigung meines Studiums möchte ich zum Ausdruck bringen, daß ich hier in Köln mit Freude Mathematik studiert habe. Hierzu hat die gute Atmosphäre in unserer Differentialgeometriegruppe wesentlich beigetragen. Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Reckziegel, der mein Interesse an der Differentialgeometrie geweckt und mich durch zahlreiche Gespräche, vor allem während der Entstehung dieser Arbeit, gefördert hat. Ich danke auch Herrn Professor Dombrowski, der mit Interesse mein mathematisches Arbeiten verfolgt und mich durch wertvolle Anregungen unterstützt hat; beispielsweise ist der Begriff der Hopf-Hyperfläche eine seiner Anregungen.

## Bezeichnungen

Für eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M$  bezeichnen wir mit  $TM$  das Tangentialbündel von  $M$ , mit  $T_pM$  den Tangentialraum von  $M$  in  $p \in M$ , mit  $C^\infty(M)$  die  $\mathbb{R}$ -Algebra aller  $C^\infty$ -Funktionen auf  $M$  und mit  $\mathcal{X}(M)$  den  $C^\infty(M)$ -Modul aller  $C^\infty$ -Vektorfelder auf  $M$ . Ist  $\mathcal{D}$  ein Untervektorbündel von  $TM$ , so ist  $\Gamma(\mathcal{D})$  der  $C^\infty(M)$ -Modul aller zu  $\mathcal{D}$  tangentialen Vektorfelder aus  $\mathcal{X}(M)$ . Differenzierbar ist im folgenden gleichbedeutend mit  $C^\infty$ . Wenn nicht anders erwähnt, werden Mannigfaltigkeiten, Vektorfelder, Abbildungen, Kurven etc. stets als differenzierbar vorausgesetzt. Die Tangentialabbildung einer Abbildung  $f$  zwischen zwei Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir mit  $f_*$ . Pseudo-Riemannsche Metriken auf Mannigfaltigkeiten und Skalarprodukte in euklidischen Vektorräumen werden stets mit  $\langle, \rangle$  bezeichnet. Weiterhin sei  $\partial$  das kanonische Einheitsvektorfeld von  $\mathbb{R}$ .

Seien  $M$  und  $N$  zwei Mannigfaltigkeiten. Ist  $M$  ein topologischer Teilraum von  $N$ , und ist die Inklusion  $M \hookrightarrow N$  eine Immersion, so heißt  $M$  eine (reguläre) Untermannigfaltigkeit von  $N$ . Eine Untermannigfaltigkeit  $M$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $N$  wird stets als Riemannsche Untermannigfaltigkeit aufgefaßt, d.h.  $M$  wird mit der von  $N$  induzierten Riemannschen Metrik versehen. Wir bezeichnen dann mit  $\perp M$  das Normalenbündel von  $M$  in  $N$ , mit  $\perp^1 M$  das Einheitsnormalenbündel von  $M$  in  $N$  und mit  $\perp_p M$  den Normalenraum von  $M$  in  $p \in M$ .

## §1: Grundlagen aus der Theorie komplexer Mannigfaltigkeiten

In diesem Paragraphen werden wesentliche Begriffe und Aussagen aus der Theorie komplexer Mannigfaltigkeiten zusammengestellt; für Beweise verweisen wir auf die Literatur zu diesem Thema (z.B. [Gr] und [KN2], Chapter IX).

### 1.1 Komplexe Mannigfaltigkeiten

Sei  $M$  ein topologischer Raum. Ein *holomorpher Atlas*  $A$  von  $M$  ist eine Menge von Karten  $(U, x)$  von  $M$  mit den Eigenschaften (1)-(3):

- (1) Für alle Karten  $(U, x) \in A$  ist  $U$  offen in  $M$  und  $x : U \rightarrow x(U)$  ein Homöomorphismus von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $x(U)$  von  $\mathbb{C}^m$  ( $m \in \mathbb{N}_+$ ).
- (2) Für alle  $p \in M$  existiert eine Karte  $(U, x) \in A$  mit  $p \in U$ .
- (3) Für alle Karten  $(U, x)$  und  $(V, y)$  aus  $A$  mit  $U \cap V \neq \emptyset$  ist

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$$

eine biholomorphe Abbildung im Sinne der Funktionentheorie, d.h.  $(U, x)$  und  $(V, y)$  sind holomorph verträglich.

Der maximale holomorphe Atlas von  $M$ , der  $A$  enthält, heißt die von  $A$  erzeugte *holomorphe Struktur* von  $M$ . Ein parakompakter Hausdorffraum zusammen mit einer holomorphen Struktur heißt *komplexe Mannigfaltigkeit*. Ist  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit, so heißt die natürliche Zahl  $m$  aus Eigenschaft (1) die *komplexe Dimension* von  $M$ .

- Bemerkungen:** a) Jede komplexe Mannigfaltigkeit ist orientierbar, hat eine gerade reelle Dimension und ist in kanonischer Weise eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.  
b) Bei komplexen Mannigfaltigkeiten und bei komplexen Vektorräumen geben wir stets die komplexe Dimension an.

### 1.2 Die komplexe Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Die holomorphe Struktur von  $M$  induziert ein  $(1,1)$ -Tensorfeld  $J$  auf  $M$  mit

$$J \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \quad \text{und} \quad J \frac{\partial}{\partial y_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k = 1, \dots, m)$$

für alle holomorphen Karten  $(U, z)$  von  $M$ , wobei  $z = (x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)$ .  $J$  heißt die (durch die holomorphe Struktur von  $M$  induzierte) *komplexe Struktur* von  $M$ .

**Bemerkungen:** a) Es gilt  $J^2 = -id_{TM}$ .

b) Für  $0 \neq v \in TM$  bezeichnen wir mit  $\mathbb{C}v$  den von  $v$  und  $Jv$  aufgespannten 1-dimensionalen komplexen Vektorraum.

### 1.3 Holomorphe Abbildungen

Seien  $M, N$  komplexe Mannigfaltigkeiten und  $f : M \rightarrow N$  eine stetige Abbildung.  $f$  heißt *holomorph*, wenn die Koordinatendarstellungen von  $f$  holomorph sind, d.h. wenn für jede holomorphe Karte  $(U, x)$  von  $M$  und jede holomorphe Karte  $(V, y)$  von  $N$  die Abbildung

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{C}^n \quad (n = \dim_{\mathbb{C}} N)$$

holomorph ist im Sinne der Funktionentheorie.

**Bemerkung:** Ist  $f : M \rightarrow N$  differenzierbar, so ist  $f$  genau dann holomorph, wenn  $f_* \circ J^M = J^N \circ f_*$  gilt. Hierbei ist  $J^M$  bzw.  $J^N$  die komplexe Struktur von  $M$  bzw.  $N$ .

### 1.4 Hermitesche Mannigfaltigkeiten

Sei  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit mit komplexer Struktur  $J$ . Eine Riemannsche Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $M$  heißt *Hermitesche Metrik*, wenn

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$$

für alle  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  gilt. Eine komplexe Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Hermiteschen Metrik heißt *Hermitesche Mannigfaltigkeit*.

**Bemerkungen:** a) Auf jeder komplexen Mannigfaltigkeit existiert eine Hermitesche Metrik.

b) Die komplexe Struktur  $J$  einer Hermiteschen Mannigfaltigkeit ist schief-symmetrisch, d.h. es gilt  $\langle JX, Y \rangle = -\langle X, JY \rangle$  für alle  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .

c) Seien  $M$  eine  $m$ -dimensionale Hermitesche Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ .

1) Seien  $v_1, \dots, v_m \in T_p M$ . Ist  $v_1, Jv_1, \dots, v_m, Jv_m$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$ , so heißt  $v_1, \dots, v_m$  eine *komplexe Orthonormalbasis* von  $T_p M$ .  $T_p M$  besitzt stets eine komplexe Orthonormalbasis.

2) Seien  $V$  ein Untervektorraum von  $T_p M$  und  $V^\perp$  das orthogonale Komplement von  $V$  in  $T_p M$ .  $V$  heißt

<i>komplex</i>	, wenn	$JV = V$
<i>total-reell</i>	, wenn	$JV \subset V^\perp$
<i>anti-holomorph</i>	, wenn	$JV^\perp \subset V$

### 1.5 Kähler-Mannigfaltigkeiten

Sei  $M$  eine Hermitesche Mannigfaltigkeit mit komplexer Struktur  $J$ . Durch

$$\omega(X, Y) := \langle JX, Y \rangle$$

wird auf  $M$  eine 2-Form  $\omega$  definiert, die sogenannte *Kählerform* von  $M$ . Eine Hermitesche Metrik auf einer komplexen Mannigfaltigkeit heißt *Kähler-Metrik*, wenn die zugehörige Kählerform  $\omega$  geschlossen ist, d.h. wenn  $d\omega = 0$  gilt. Eine komplexe Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Kähler-Metrik heißt *Kähler-Mannigfaltigkeit*.

**Bemerkung:** Eine Hermitesche Mannigfaltigkeit  $M$  ist genau dann eine Kähler-Mannigfaltigkeit, wenn die komplexe Struktur von  $M$  parallel ist bezüglich der Levi-Civita-Ableitung von  $M$ .

### 1.6 Komplexe Raumformen

Sei  $M$  eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit komplexer Struktur  $J$  und Riemannscher Schnittkrümmung  $K$ . Ist  $\sigma$  ein 1-dimensionaler komplexer Untervektorraum von  $T_p M$  für ein  $p \in M$ , so heißt  $K(\sigma)$  die *holomorphe Schnittkrümmung von  $M$  bezüglich  $\sigma$* . Eine zusammenhängende Kähler-Mannigfaltigkeit mit konstanter holomorpher Schnittkrümmung heißt *komplexe Raumform*.

### 1.7 Der Krümmungstensor einer komplexen Raumform

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale komplexe Raumform der holomorphen Schnittkrümmung  $c \in \mathbb{R}$  mit komplexer Struktur  $J$ . Dann hat der Krümmungstensor  $R$  von  $M$  die explizite Darstellung

$$R(X, Y)Z = \frac{c}{4}(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y + \langle JY, Z \rangle JX - \langle JX, Z \rangle JY - 2\langle JX, Y \rangle JZ) .$$

**Bemerkungen:** a) Jede komplexe Raumform ist ein lokal-symmetrischer Raum (denn mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $J$  ist auch  $R$  parallel).

b) Für den Riccitenor  $Ric$  und die Skalarkrümmung  $s$  von  $M$  gilt

$$Ric(X, Y) = \frac{c}{2}(m+1)\langle X, Y \rangle , \\ s = cm(m+1) .$$

Insbesondere ist also jede komplexe Raumform eine Einstein-Mannigfaltigkeit.

### 1.8 Kählerwinkel und Schnittkrümmung in komplexen Raumformen

Sei  $M$  eine komplexe Raumform der holomorphen Schnittkrümmung  $c \in \mathbb{R}$ . Ist  $\sigma$  ein 2-dimensionaler Untervektorraum von  $T_p M$  ( $p \in M$ ), so ist der *Kählerwinkel*  $\alpha(\sigma) \in [0, \frac{\pi}{2}]$  von  $\sigma$  definiert durch

$$\alpha(\sigma) := \inf \{ \sphericalangle(u, w) \mid u \in \sigma, w \in J\sigma, u, w \neq 0 \} ,$$

wobei  $\sphericalangle(u, w)$  der nicht-orientierte Winkel zwischen  $u$  und  $w$  ist. Ist  $u, v$  eine Orthonormalbasis von  $\sigma$ , so gilt:

$$\cos(\alpha(\sigma)) = |\langle Ju, v \rangle| .$$

Für die Schnittkrümmung  $K(\sigma)$  von  $M$  bezüglich  $\sigma$  gilt dann nach 1.7:

$$K(\sigma) = \frac{c}{4}(1 + 3 \cos^2(\alpha(\sigma))) .$$

Die Schnittkrümmung von  $M$  nimmt daher nur Werte zwischen  $c/4$  und  $c$  an, und im Fall  $c \neq 0$  gilt

$$K(\sigma) = \frac{c}{4} \iff \alpha(\sigma) = \frac{\pi}{2} \iff \sigma \text{ total-reell} ,$$

$$K(\sigma) = c \iff \alpha(\sigma) = 0 \iff \sigma \text{ komplex} .$$

### 1.9 Der komplexe Zahlraum $\mathbb{C}^m$

$\mathbb{C}^m$  ( $m \in \mathbb{N}_+$ ) ist in kanonischer Weise eine  $m$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Die komplexe Struktur von  $\mathbb{C}^m$  entspricht bis auf die kanonische Isomorphie  $T_z \mathbb{C}^m \approx \mathbb{C}^m$  ( $z \in \mathbb{C}^m$ ) der Multiplikation mit  $i$ . Die durch

$$\langle u, v \rangle := \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^m u_j \bar{v}_j \right) \quad (u, v \in \mathbb{C}^m)$$

induzierte Riemannsche Metrik auf  $\mathbb{C}^m$  ist eine Kähler-Metrik.  $\mathbb{C}^m$  zusammen mit dieser Kähler-Metrik ist eine komplexe Raumform der holomorphen Schnittkrümmung 0.

### 1.10 Der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^m$

Sei  $m \in \mathbb{N}_+$ . Wir definieren auf  $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$  durch

$$w \sim z : \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : w = z\lambda \quad (w, z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}) .$$

Der Quotientenraum von  $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$  bezüglich  $\sim$  heißt *m-dimensionaler komplex projektiver Raum* und wird mit  $\mathbb{C}P^m$  bezeichnet. Die Punkte in  $\mathbb{C}P^m$  entsprechen eindeutig den komplexen Geraden durch den Ursprung in  $\mathbb{C}^{m+1}$ . Bezüglich der Quotiententopologie ist  $\mathbb{C}P^m$  ein kompakter (und damit auch parakompakter) Hausdorffraum und die kanonische Projektion  $\tau : \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^m$  eine stetige Abbildung.  $\mathbb{C}P^m$  kann auf genau eine Weise mit einer holomorphen Struktur versehen werden, so daß  $\tau$  zu einer holomorphen Submersion wird.  $\mathbb{C}P^m$  wird so zu einer *m-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit*. Für  $z = (z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$  setzen wir  $[z] := \tau(z)$ .

Sei  $S^{2m+1}$  die  $(2m+1)$ -dimensionale Einheitssphäre in  $\mathbb{C}^{m+1}$ . Wir betrachten  $S^{2m+1}$  als Riemannsche Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}^{m+1}$  und bezeichnen die Einschränkung von  $\tau$  auf  $S^{2m+1}$  mit  $\pi$ .  $\pi : S^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}P^m$  ist eine surjektive Submersion. Auf  $\mathbb{C}P^m$  existiert genau eine Riemannsche Metrik, die sogenannte *Fubini-Study-Metrik auf  $\mathbb{C}P^m$* , so daß  $\pi$  zu einer Riemannschen Submersion (vgl. 3.1) wird.  $\pi$  heißt dann auch die *Hopf-Abbildung auf  $\mathbb{C}P^m$* .

$\mathbb{C}P^m$  zusammen mit der Fubini-Study-Metrik ist eine komplexe Raumform der holomorphen Schnittkrümmung 4.

**Bemerkungen:** a)  $\mathbb{C}P^1$  ist isometrisch zur 2-dimensionalen Riemannschen Sphäre vom Radius  $1/2$  in  $\mathbb{R}^3$ .

b)  $\mathbb{C}P^m$  ist ein kompakter einfach zusammenhängender Riemannscher symmetrischer Raum vom Rang 1 und holomorph isometrisch zu dem Hermitesch symmetrischen Raum  $SU(m+1)/S(U(1) \times U(m))$ . Insbesondere ist  $\mathbb{C}P^m$  auch vollständig.

c) Durch konforme Änderung der Fubini-Study-Metrik auf  $\mathbb{C}P^m$  mit dem Faktor  $4/c$  ( $c > 0$ ) erhält man eine komplexe Raumform der holomorphen Schnittkrümmung  $c$ , den sogenannten *m-dimensionalen komplex projektiven Raum  $\mathbb{C}P^m(c)$  der konstanten holomorphen Schnittkrümmung  $c$* .

### 1.11 Der komplex hyperbolische Raum $\mathbb{C}H^m$

Sei  $m \in \mathbb{N}_+$ . Wir definieren auf  $\mathbb{C}^{m+1}$  eine symmetrische  $\mathbb{R}$ -Bilinearform  $\beta$  vom Index 2 durch

$$\beta(u, v) := \operatorname{Re}(-u_0 \bar{v}_0 + \sum_{j=1}^m u_j \bar{v}_j) \quad (u, v \in \mathbb{C}^{m+1}).$$

Dann ist  $\beta$   $S^1$ -invariant. Daher ist

$$\mathbb{C}H^m := \{[z] \in \mathbb{C}P^m \mid z \in \mathbb{C}^{m+1}, \beta(z, z) < 0\}$$

eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}P^m$  und somit in kanonischer Weise eine *m-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit*. Die Punkte in  $\mathbb{C}H^m$  entsprechen eindeutig den komplexen Geraden durch den Ursprung in  $\mathbb{C}^{m+1}$ , auf denen  $\beta$  negativ definit ist. Sei

$$H^{2m+1} := \{z \in \mathbb{C}^{m+1} \mid \beta(z, z) = -1\} \subset \mathbb{C}^{m+1}$$

der  $(2m+1)$ -dimensionale anti-de Sitter Raum, den wir als Lorentz-Hyperfläche von  $(\mathbb{C}^{m+1}, g)$  betrachten, wobei  $g$  die durch  $\beta$  induzierte pseudo-Riemannsche Metrik auf  $\mathbb{C}^{m+1}$  ist. Dann ist die kanonische Projektion  $\pi : H^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}H^m, z \mapsto [z]$  eine surjektive Submersion mit 1-dimensionalen total-geodätischen zeitartigen Fasern. Auf  $\mathbb{C}H^m$  existiert dann genau eine Riemannsche Metrik, die sogenannte *Fubini-Study-Metrik auf  $\mathbb{C}H^m$* , so daß  $\pi$  zu einer pseudo-Riemannschen Submersion wird.  $\pi$  heißt die *Hopf-Abbildung auf  $\mathbb{C}H^m$* .

$\mathbb{C}H^m$  zusammen mit der Fubini-Study-Metrik ist eine komplexe Raumform der holomorphen Schnittkrümmung  $-4$ , der sogenannte *m-dimensionale komplex hyperbolische Raum*.

**Bemerkungen:** a)  $\mathbb{C}H^1$  ist isometrisch zum 2-dimensionalen reell hyperbolischen Raum der konstanten Schnittkrümmung  $-4$ .

b)  $\mathbb{C}H^m$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{R}^{2m}$ . Insbesondere ist  $\mathbb{C}H^m$  auch einfach zusammenhängend.

c)  $\mathbb{C}H^m$  ist ein nicht-kompakter Riemannscher symmetrischer Raum vom Rang 1 und holomorph isometrisch zu dem Hermitesch symmetrischen Raum  $SU(1, m)/S(U(1) \times U(m))$ . Insbesondere ist  $\mathbb{C}H^m$  auch vollständig.

d) Durch konforme Änderung der Fubini-Study-Metrik auf  $\mathbb{C}H^m$  mit dem Faktor  $-4/c$  ( $c < 0$ ) erhält man eine komplexe Raumform der holomorphen Schnittkrümmung  $c$ , den sogenannten *m-dimensionalen komplex hyperbolischen Raum  $\mathbb{C}H^m(c)$  der konstanten holomorphen Schnittkrümmung  $c$* .

### 1.12 Die Standardräume konstanter holomorpher Schnittkrümmung

Bekanntlich sind der euklidische Raum, die Sphäre und der reell hyperbolische Raum als die sogenannten Standardräume konstanter Krümmung ausgezeichnet. Analog hierzu hat man in der Theorie komplexer Mannigfaltigkeiten die Standardräume konstanter holomorpher Schnittkrümmung: der komplexe Zahlraum, der komplex projektive Raum und der komplex hyperbolische Raum. Genauer gilt:

**Theorem:** Sei  $M$  eine *m-dimensionale einfach zusammenhängende vollständige Kähler-Mannigfaltigkeit der konstanten holomorphen Schnittkrümmung  $c$* . Dann ist  $M$  holomorph isometrisch zu  $\mathbb{C}H^m(c)$  (falls  $c < 0$ ), zu  $\mathbb{C}P^m$  (falls  $c = 0$ ), oder zu  $\mathbb{C}P^m(c)$  (falls  $c > 0$ ).

### 1.13 Komplexe freie Beweglichkeit

Sei  $M$  entweder  $\mathbb{C}P^m(c)$  oder  $\mathbb{C}^m$  oder  $\mathbb{C}H^m(c)$ . Ferner seien  $p, q \in M$ ,  $u_1, \dots, u_m$  eine komplexe Orthonormalbasis von  $T_p M$  und  $v_1, \dots, v_m$  eine komplexe Orthonormalbasis von  $T_q M$ . Dann existiert genau eine holomorphe Isometrie  $f$  von  $M$  mit  $f(p) = q$  und  $f_* u_i = v_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). In diesem Sinne sprechen wir von *komplexer freier Beweglichkeit* in  $M$ .

## §2: Untermannigfaltigkeiten von komplexen Raumformen

### 2.1 Allgemeines

Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$ . Wir verwenden stets die folgenden Bezeichnungen:

$\nabla, \bar{\nabla}$	Levi-Civita-Ableitung von $M, \bar{M}$ ,
$D$	kovariante Ableitung des Normalenbündels von $M$ ,
$h$	zweite Fundamentalform von $M$ ,
$A$	Formoperator von $M$ ,
$R, \bar{R}$	Krümmungstensor von $M, \bar{M}$ ,
$R^\perp$	Krümmungstensor des Normalenbündels von $M$ ,
$H$	Normalenfeld der mittleren Krümmung von $M$ ,
$d, \bar{d}$	Abstandsfunktion auf $M, \bar{M}$ ,
$\exp^{-1}$	normale Exponentialabbildung von $M$ .

Sei speziell  $\bar{M}$  eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Die komplexe Struktur von  $\bar{M}$  bezeichnen wir stets mit  $J$ . Ist  $v \in TM$ , so setzen wir

$$Jv = Pv + Fv,$$

wobei  $Pv$  bzw.  $Fv$  die Tangential- bzw. Normalkomponente von  $Jv$  bezeichnet. Hierdurch werden ein schiefssymmetrisches  $(1,1)$ -Tensorfeld  $P$  auf  $M$  und ein  $\perp M$ -wertiger Vektorbündel-Homomorphismus  $F$  auf  $TM$  definiert. Analog setzen wir für  $\xi \in \perp M$

$$J\xi = t\xi + f\xi,$$

wobei  $t\xi$  bzw.  $f\xi$  die Tangential- bzw. Normalkomponente von  $J\xi$  bezeichnet. Hierdurch werden ein  $TM$ -wertiger Vektorbündel-Homomorphismus  $t$  auf  $\perp M$  und ein schiefssymmetrischer Vektorbündel-Endomorphismus  $f$  auf  $\perp M$  definiert. Es gilt  $\langle Fv, \xi \rangle = -\langle v, t\xi \rangle$ .

Für geometrische Untersuchungen in Kähler-Mannigfaltigkeiten sind gewisse Klassen von Untermannigfaltigkeiten besonders geeignet: komplexe, total-reelle, anti-holomorphe bzw.  $CR$ -Untermannigfaltigkeiten sowie reelle und komplexe Hyperflächen.

$M$  heißt *komplexe, total-reelle* bzw. *anti-holomorphe Untermannigfaltigkeit* von  $\bar{M}$ , wenn

$$JT_p M \subset T_p M, \quad JT_p M \subset \perp_p M \quad \text{bzw.} \quad J\perp_p M \subset T_p M$$

für alle  $p \in M$  gilt.  $M$  ist genau dann komplex (bzw. total-reell bzw. anti-holomorph), wenn  $F = 0$  (bzw.  $P = 0$  bzw.  $f = 0$ ). Grundlagen zur Theorie über diese Klassen von Untermannigfaltigkeiten findet man in [Og2], [YK1] bzw. [YK2].

$M$  heißt *CR-Untermannigfaltigkeit* von  $\bar{M}$ , wenn ein Untervektorbündel  $\mathcal{D}$  von  $TM$  existiert mit den Eigenschaften

- (1)  $\mathcal{D}$  ist komplex, d.h.  $J\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_p$  für alle  $p \in M$ ,
- (2)  $\mathcal{D}^\perp$  ist total-reell, d.h.  $J\mathcal{D}_p^\perp \subset \perp_p M$  für alle  $p \in M$ ; hierbei ist  $\mathcal{D}^\perp$  das orthogonale Komplement von  $\mathcal{D}$  in  $TM$ .

$M$  ist genau dann eine *CR-Untermannigfaltigkeit* von  $\bar{M}$ , wenn  $FP = 0$  ([YK3], S.87). Offenbar ist jede komplexe, total-reelle bzw. anti-holomorphe Untermannigfaltigkeit eine *CR-Untermannigfaltigkeit* von  $\bar{M}$ . Ausführliche Darstellungen zur Theorie der *CR-Untermannigfaltigkeiten* findet man in [Be1] und [YK3].

$M$  heißt *reelle Hyperfläche* von  $\bar{M}$ , wenn die reelle Kodimension von  $M$  in  $\bar{M}$  gleich 1 ist. Jede reelle Hyperfläche von  $\bar{M}$  ist eine anti-holomorphe Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ . Reelle Hyperflächen von komplexen Raumformen sind der Gegenstand der Paragraphen 5 und 6.

$M$  heißt *komplexe Hyperfläche* von  $\bar{M}$ , wenn  $M$  eine komplexe Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$  mit der komplexen Kodimension 1 ist. Grundlagen über komplexe Hyperflächen findet man in [Sm1] und [NS].

Die folgenden wohlbekannteren Gleichungen sind für die Theorie von Untermannigfaltigkeiten von fundamentaler Bedeutung. Seien  $M$  eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  und  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\xi \in \Gamma(\perp M)$ . Dann gilt

a) *Gauß-Gleichung:*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad ,$$

b) *Weingarten-Gleichung:*

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \quad .$$

Ist speziell  $\bar{M}$  eine komplexe Raumform der holomorphen Schnittkrümmung  $c$ , so erhält man mit der expliziten Darstellung von  $\bar{R}$  (vgl. 1.7) und den "Struktur-Operatoren"  $P, F, f$  die weiteren Gleichungen:

c) *Gauß-Gleichung zweiter Ordnung:*

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \frac{c}{4}(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y \\ &\quad + \langle PY, Z \rangle PX - \langle PX, Z \rangle PY - 2\langle PX, Y \rangle PZ) \\ &\quad + A_{h(Y, Z)} X - A_{h(X, Z)} Y \quad , \end{aligned}$$

d) *Codazzi-Gleichung:*

$$(\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) = \frac{c}{4}(\langle PY, Z \rangle FX - \langle PX, Z \rangle FY - 2\langle PX, Y \rangle FZ)$$

e) *Ricci-Gleichung:*

$$\begin{aligned} R^\perp(X, Y)\xi &= \frac{c}{4}(\langle FY, \xi \rangle FX - \langle FX, \xi \rangle FY - 2\langle PX, Y \rangle f\xi) \\ &\quad - h(A_\xi X, Y) + h(X, A_\xi Y) \quad . \end{aligned}$$

## 2.2 Beispiele

Wir stellen nun einige Beispiele für Untermannigfaltigkeiten zusammen, die im folgenden von Bedeutung sind.

(i)  $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^m, \mathbb{C}H^k \subset \mathbb{C}H^m$

Seien  $m \geq 2$  und  $1 \leq k \leq m-1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^k &\longrightarrow \mathbb{C}P^m \quad , \quad [z_0, \dots, z_k] \longmapsto [z_0, \dots, z_k, 0, \dots, 0] \\ \text{bzw.} \quad \mathbb{C}H^k &\longrightarrow \mathbb{C}H^m \quad , \quad [z_0, \dots, z_k] \longmapsto [z_0, \dots, z_k, 0, \dots, 0] \end{aligned}$$

eine isometrische Einbettung von  $\mathbb{C}P^k$  in  $\mathbb{C}P^m$  (bzw. von  $\mathbb{C}H^k$  in  $\mathbb{C}H^m$ ). In dieser Weise ist  $\mathbb{C}P^k$  (bzw.  $\mathbb{C}H^k$ ) eine komplexe total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  (bzw.  $\mathbb{C}H^m$ ). Für spätere Anwendungen definieren wir noch  $\mathbb{C}P^0 := \{[1, 0, \dots, 0]\}$  bzw.  $\mathbb{C}H^0 := \{[1, 0, \dots, 0]\}$  als Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$ .

(ii)  $\mathbb{R}P^k \subset \mathbb{C}P^m, \mathbb{R}H^k \subset \mathbb{C}H^m$

Seien  $m \geq 2$  und  $2 \leq k \leq m$ .  $\mathbb{R}P^k$  bezeichne den  $k$ -dimensionalen reell projektiven Raum mit der konstanten Riemannschen Schnittkrümmung  $+1$  und  $\mathbb{R}H^k$  bezeichne den  $k$ -dimensionalen reell hyperbolischen Raum mit der konstanten Riemannschen Schnittkrümmung  $-1$ . Mit  $(x_0, \dots, x_k)$  bezeichnen wir die homogenen Koordinaten eines Punktes aus  $\mathbb{R}P^k$  bzw.  $\mathbb{R}H^k$  (die homogenen Koordinaten für Punkte aus  $\mathbb{R}H^k$  definiert man wie im komplexen Fall durch die projektive Interpretation von  $\mathbb{R}H^k$  als offenen Teil von  $\mathbb{R}P^k$ ). Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^k &\longrightarrow \mathbb{C}P^m \quad , \quad [x_0, \dots, x_k] \longmapsto [x_0 + i0, \dots, x_k + i0, 0, \dots, 0] \\ \text{bzw.} \quad \mathbb{R}H^k &\longrightarrow \mathbb{C}H^m \quad , \quad [x_0, \dots, x_k] \longmapsto [x_0 + i0, \dots, x_k + i0, 0, \dots, 0] \end{aligned}$$

eine isometrische Einbettung von  $\mathbb{R}P^k$  in  $\mathbb{C}P^m$  (bzw. von  $\mathbb{R}H^k$  in  $\mathbb{C}H^m$ ). In dieser Weise ist  $\mathbb{R}P^k$  (bzw.  $\mathbb{R}H^k$ ) eine total-reelle total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  (bzw.  $\mathbb{C}H^m$ ).

Mit  $\mathbb{R}P^1$  bzw.  $\mathbb{R}H^1$  bezeichnen wir das Bild  $\gamma(\mathbb{R})$  der Geodätischen

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}P^m, & t &\longmapsto [\cos(t), \sin(t), 0, \dots, 0] \\ \text{bzw.} & & & \\ \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}H^m, & t &\longmapsto [\cosh(t), \sinh(t), 0, \dots, 0] \end{aligned}$$

von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  (zur Darstellung der Geodätischen in  $\mathbb{C}P^m$  und  $\mathbb{C}H^m$  vgl. 3.3).

(iii) Die komplexe Quadrik  $Q^{m-1} \subset \mathbb{C}P^m$

Seien  $m \geq 2$  und

$$Q^{m-1} := \{[z] \in \mathbb{C}P^m \mid z_0^2 + \dots + z_m^2 = 0\}.$$

$Q^{m-1}$  ist eine komplexe Hyperfläche von  $\mathbb{C}P^m$ , die sogenannte *komplexe Quadrik* in  $\mathbb{C}P^m$ .

Anmerkungen: a) Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}^{m+1}$  gilt

$$z_0^2 + \dots + z_m^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2i\langle x, y \rangle$$

und daher auch

$$Q^{m-1} = \left\{ \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \right) \mid x, y \in S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}, \langle x, y \rangle = 0 \right\},$$

wobei  $\pi : S^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}P^m$  die Hopf-Abbildung auf  $\mathbb{C}P^m$  ist.

b)  $Q^{m-1}$  ist holomorph isometrisch zu dem Hermitesch symmetrischen Raum  $SO(m+1)/SO(2) \times SO(m-1)$ , der Grassmann-Mannigfaltigkeit aller orientierten 2-dimensionalen Untervektorräume von  $\mathbb{R}^{m+1}$  ([KN2], S.278 ff.).

(iv) Geodätische Hypersphären

Seien  $\bar{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in \bar{M}$  und  $r \in \mathbb{R}_+$ . Ist

$$M := \{q \in \bar{M} \mid \bar{d}(p, q) = r\}$$

eine Hyperfläche von  $\bar{M}$ , so heißt  $M$  die *geodätische Hypersphäre* vom Radius  $r$  um "Mittelpunkt"  $p$  in  $\bar{M}$ . Man beachte, daß eine geodätische Hypersphäre (z.B. der Äquator einer Sphäre) möglicherweise mehrere "Mittelpunkte" besitzt. Für hinreichend kleine  $r$  ist  $M$  eine reguläre Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ .

Anmerkungen: a) Zur Geometrie geodätischer Hypersphären in Riemannschen Mannigfaltigkeiten siehe [CV].

b) In 4.4 berechnen wir den Formoperator von geodätischen Hypersphären in lokal-symmetrischen Räumen.

(v) Horosphären

Sei  $\bar{M}$  eine Hadamard-Mannigfaltigkeit, d.h.  $\bar{M}$  ist eine einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Riemannscher Schnittkrümmung. Ferner sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische von  $\bar{M}$ . Dann ist für jeden Punkt  $p \in \bar{M}$  die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \bar{d}(p, \gamma(t)) - t$$

monoton fallend und nach unten beschränkt. Daher ist die Funktion

$$F : \bar{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{d}(p, \gamma(t)) - t)$$

wohldefiniert.  $F$  heißt die *Busemann-Funktion* von  $\bar{M}$  bezüglich  $\gamma$ ; jede Niveaufäche von  $F$  heißt eine *Horosphäre* in  $\bar{M}$ .

Anmerkungen: a) Geometrisch erhält man die Horosphäre  $M := F^{-1}(\{0\})$  durch  $q := \gamma(0)$  folgendermaßen: Bezeichne  $M_t$  ( $t > 0$ ) die geodätische Hypersphäre in  $\bar{M}$  durch  $q$  mit Mittelpunkt  $\gamma(t)$ . Dann konvergiert diese Familie ( $M_t$ ) geodätischer Hypersphären mit  $t \rightarrow \infty$  gegen  $M$ , d.h. die Funktionen

$$F_t : \bar{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto \bar{d}(p, \gamma(t)) - t$$

konvergieren für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $F$ . Beachte: Für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  ist  $M_t = F_t^{-1}(\{0\})$ .

b) Die Horosphären im euklidischen Raum sind gerade die Hyperebenen. Im Poincaré-Modell für  $\mathbb{R}H^m$  sind die Horosphären genau die euklidischen Hypersphären in  $\mathbb{R}H^m$ , die den Rand von  $\mathbb{R}H^m$  tangieren ([EO], S.56).

c) Busemann-Funktionen auf Hadamard-Mannigfaltigkeiten sind zweimal stetig differenzierbar ([HI], S.484); Horosphären sind also stets  $C^2$ -Hyperflächen. In Riemannschen symmetrischen Räumen von nicht-kompaktem Typ sind Horosphären sogar analytische Hyperflächen ([Im], S.28). Ein Beispiel für eine nicht dreimal differenzierbare Busemann-Funktion findet man in [BBB].

d) Sei  $M$  eine Horosphäre in einer Hadamard-Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$ . Dann ist  $\bar{M}$  homöomorph zu  $M \times \mathbb{R}$  ([EO], S.58); insbesondere ist  $\bar{M}$  auch einfach zusammenhängend.

e) Seien  $\alpha, \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}$  zwei nach der Bogenlänge parametrisierte asymptotische Geodätische in einer Hadamard-Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$ , d.h. es existiert ein  $b \in \mathbb{R}_+$  mit  $\bar{d}(\alpha(t), \gamma(t)) < b$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ . Ferner seien  $F_\alpha$  und  $F_\gamma$  die zugehörigen Busemann-Funktionen. Dann ist  $F_\alpha - F_\gamma$  konstant ([EO], S.56).

### 2.3 Codazzi-Untermannigfaltigkeiten

Eine Untermannigfaltigkeit  $M$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  heißt *Codazzi-Untermannigfaltigkeit*, wenn  $\nabla h$  in allen drei Komponenten symmetrisch ist. Aufgrund der Codazzi-Gleichung ist dies gleichbedeutend mit  $\bar{R}(X, Y)Z \in \mathcal{X}(M)$  für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ . Untermannigfaltigkeiten, die die letzte Bedingung erfüllen, werden in der Literatur auch invariante Untermannigfaltigkeiten genannt. Offenbar ist jede Untermannigfaltigkeit einer reellen Raumform eine Codazzi-Untermannigfaltigkeit. Für nicht-euklidische komplexe Raumformen gilt

**Satz:** ([CO1], S.260) *Sei  $M$  eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit einer komplexen Raumform  $\bar{M}$  mit nicht-verschwindender holomorpher Schnittkrümmung. Dann ist  $M$  genau dann eine Codazzi-Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ , wenn  $M$  komplex oder total-reell ist.*

*Beweis:* Ist  $M$  eine Codazzi-Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ , so folgt aus der Codazzi-Gleichung

$$0 = (\nabla_u h)(v, u) - (\nabla_v h)(u, u) = -\frac{3}{4}c \langle Pu, v \rangle Fu$$

für alle  $u, v \in T_p M$ ,  $p \in M$ . Hieraus folgt  $Fu = 0$  oder  $Pu = 0$  für alle  $u \in TM$ . Aufgrund des Zusammenhangs von  $M$  gilt daher  $F = 0$  (d.h.  $M$  ist komplex) oder  $P = 0$  (d.h.  $M$  ist total-reell).

Ist andererseits  $M$  komplex (also  $F = 0$ ) oder  $M$  total-reell (also  $P = 0$ ), so ist aufgrund der Codazzi-Gleichung  $M$  offenbar eine Codazzi-Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ .  $\square$

### 2.4 Total-geodätische Untermannigfaltigkeiten

Eine Untermannigfaltigkeit  $M$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  heißt *total-geodätisch*, wenn  $h = 0$  gilt. Geometrisch bedeutet  $h = 0$ , daß jede Geodätische von  $M$  auch Geodätische von  $\bar{M}$  ist.

In den Standardräumen konstanter Krümmung  $E^m$ ,  $S^m$ ,  $\mathbb{R}H^m$  ist eine vollständige Klassifikation der total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten bereits lange bekannt. 1963 hat Wolf [Wo] die total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten von kompakten Riemannschen symmetrischen Räumen vom Rang 1 klassifiziert. Mit der  $(M_+, M_-)$ -Methode haben dann Chen/Nagano [CN] einen sehr schönen Zugang zum Studium der total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten von kompakten Riemannschen symmetrischen Räumen gefunden. Wir geben nun einen einfachen Beweis für die Klassifikation der total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{C}P^m$  und  $\mathbb{C}H^m$  an.

**Theorem:** Sei  $\bar{M}$  entweder  $\mathbb{C}P^m$  oder  $\mathbb{C}H^m$  ( $m \geq 2$ ).

(i) *Seien  $q \in \bar{M}$  und  $V$  ein  $k$ -dimensionaler komplexer bzw. total-reeller Untervektorraum von  $T_q \bar{M}$ ,  $1 \leq k \leq m$ . Dann existiert genau eine zusammenhängende vollständige total-geodätische Untermannigfaltigkeit  $M$  von  $\bar{M}$  mit  $q \in M$  und  $T_q M = V$ .  $M$  ist holomorph kongruent zu*

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}P^k \text{ bzw. } \mathbb{R}P^k, \text{ für } \bar{M} = \mathbb{C}P^m \\ &\mathbb{C}H^k \text{ bzw. } \mathbb{R}H^k, \text{ für } \bar{M} = \mathbb{C}H^m. \end{aligned}$$

(ii) *Ist  $N$  eine zusammenhängende total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ , so ist  $N$  holomorph kongruent zu einem offenen Teil einer der Modellräume in (i).*

*Beweis:* zu (i): Seien  $\bar{M} = \mathbb{C}P^m$  und  $V$  komplex. Der Modellraum ist in diesem Fall  $\mathbb{C}P^k$ . Sei  $p \in \mathbb{C}P^k$ . Aufgrund der komplexen freien Beweglichkeit in  $\mathbb{C}P^m$  (vgl. 1.13) existiert eine holomorphe Isometrie  $f$  von  $\mathbb{C}P^m$  mit  $f(p) = q$  und  $f_* T_p \mathbb{C}P^k = V$ . Dann ist  $M := f(\mathbb{C}P^k)$  eine zusammenhängende vollständige total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  mit  $q \in M$  und  $T_q M = V$ . Aufgrund der Starrheit total-geodätischer Untermannigfaltigkeiten ist  $M$  auch eindeutig. Die anderen Fälle lassen sich analog beweisen.

zu (ii):  $N$  ist offensichtlich eine Codazzi-Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$  und daher nach Satz 2.3 entweder komplex oder total-reell. Seien  $q \in N$  und  $M$  die zusammenhängende vollständige total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$  mit  $q \in M$  und  $T_q M = T_q N$ . Aufgrund der Starrheit total-geodätischer Untermannigfaltigkeiten ist  $N$  bereits ein offener Teil von  $M$ . Mit (i) folgt schließlich die Behauptung.  $\square$

### 2.5 Total-nabelsche und sphärische Untermannigfaltigkeiten

Eine Untermannigfaltigkeit  $M$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  heißt *total-nabelsch*, wenn  $h(X, Y) = \langle X, Y \rangle H$  für alle  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  gilt. Ist zusätzlich  $H$  parallel bezüglich  $D$ , so heißt  $M$  *sphärisch* (oder auch oft *extrinsische Sphäre*).

Bekanntlich ist in reellen Raumformen jede total-nabelsche Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\geq 2$  sphärisch. Ein entsprechendes Resultat gilt auch in komplexen Raumformen.

**Satz:** ([CO2], S.225) *Jede total-nabelsche Untermannigfaltigkeit  $M$  ( $\dim M \geq 3$ ) einer komplexen Raumform  $\bar{M}$  ist sphärisch.*

*Beweis:* Seien  $u, v \in T_p M$  ( $p \in M$ ) orthonormal. Mit der Codazzi-Gleichung folgt

$$D_u H = -\frac{3}{4}c \langle Pu, v \rangle Fv.$$

Wegen  $\dim M \geq 3$  können wir  $v$  auch orthogonal zu  $Pu$  wählen, und es folgt  $D_u H = 0$ .  $\square$

Wir klassifizieren nun die sphärischen, nicht total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{C}P^m$  und  $\mathbb{C}H^m$ .

**Theorem:** Sei  $\bar{M}$  entweder  $\mathbb{C}P^m$  oder  $\mathbb{C}H^m$  ( $m \geq 2$ ).

(i) Seien  $q \in \bar{M}$ ,  $V$  ein  $k$ -dimensionaler ( $1 \leq k \leq m-1$ ) total-reeller Untervektorraum von  $T_q \bar{M}$  und  $\eta \in T_q \bar{M}$  mit  $\eta \neq 0$  und  $\eta \perp (V \oplus JV)$ . Dann existiert genau eine zusammenhängende vollständige sphärische Untermannigfaltigkeit  $M$  von  $\bar{M}$  mit  $q \in M$ ,  $T_q M = V$  und  $H_q = \eta$ .  $M$  ist holomorph kongruent zu einer vollständigen sphärischen Hyperfläche des kanonisch eingebetteten Raumes  $\mathbb{R}P^{k+1}$  bzw.  $\mathbb{R}H^{k+1}$ , d.h. explizit:  $M$  ist holomorph kongruent zu dem folgenden Modellraum  $N$ :

a) für  $\mathbb{C}P^m$ :  $N$  ist eine geodätische Hypersphäre vom Radius  $r$  in  $\mathbb{R}P^{k+1} \subset \mathbb{C}P^m$ , wobei  $r \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  mit  $\cot(r) = \|\eta\|$ .

b) für  $\mathbb{C}H^m$ :

1. Fall:  $\|\eta\| > 1$ :  $N$  ist eine geodätische Hypersphäre vom Radius  $r$  in  $\mathbb{R}H^{k+1} \subset \mathbb{C}H^m$ , wobei  $r \in \mathbb{R}_+$  mit  $\coth(r) = \|\eta\|$ .

2. Fall:  $\|\eta\| = 1$ :  $N$  ist eine Horosphäre in  $\mathbb{R}H^{k+1} \subset \mathbb{C}H^m$ .

3. Fall:  $\|\eta\| < 1$ :  $N$  ist eine Parallelfäche zu  $\mathbb{R}H^k$  vom Abstand  $r$  in  $\mathbb{R}H^{k+1} \subset \mathbb{C}H^m$ , wobei  $r \in \mathbb{R}_+$  mit  $\tanh(r) = \|\eta\|$ .

(ii) Ist  $M$  eine  $k$ -dimensionale ( $k \geq 2$ ) zusammenhängende sphärische und nicht total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ , so ist  $M$  holomorph kongruent zu einem offenen Teil eines Modellraumes gemäß (i).

**Beweis:** zu (i): Sei  $N$  eine geodätische Hypersphäre vom Radius  $r$  in  $\mathbb{R}P^{k+1}$ , wobei  $r \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  mit  $\cot(r) = \|\eta\|$ . Ferner sei  $\xi$  das Normalenfeld der mittleren Krümmung von  $N$  in  $\mathbb{R}P^{k+1}$ . Bekanntlich ist  $N$  eine zusammenhängende vollständige sphärische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}P^{k+1}$  mit  $\|\xi\| = \cot(r)$ . Sei nun  $p \in N$ . Aufgrund der komplexen freien Beweglichkeit in  $\mathbb{C}P^m$  existiert eine holomorphe Isometrie  $f$  von  $\mathbb{C}P^m$  mit  $f(p) = q$ ,  $f_* T_p \mathbb{R}P^{k+1} = V \oplus \mathbb{R}\eta$  und  $f_* \xi_p = \eta$ . Da  $\mathbb{R}P^{k+1}$  total-geodätisch in  $\mathbb{C}P^m$  liegt, ist  $M := f(N)$  eine zusammenhängende vollständige sphärische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  mit  $q \in M$ ,  $T_q M = V$  und  $H_q = \eta$ . Aufgrund der Starrheit sphärischer Untermannigfaltigkeiten (z.B. [Re3], S.100 f.) ist  $M$  auch eindeutig. Unter Verwendung der Klassifikation der sphärischen Untermannigfaltigkeiten im reell hyperbolischen Raum beweist man die entsprechende Aussage für den hyperbolischen Fall.

zu (ii):  $M$  ist offenbar eine Codazzi-Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$  und daher nach Satz 2.3 komplex oder total-reell. Aufgrund der Minimalität komplexer Untermannigfaltigkeiten ([La], S.36) ist  $M$  total-reell. Somit gilt  $P = 0$  und für  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  folgt mit der Gauß- und der Weingarten-Gleichung

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle \langle tH, Z \rangle &= \langle th(X, Y), Z \rangle = \langle J \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X (JY), Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_X (FY), Z \rangle = -\langle A_{FY} X, Z \rangle \\ &= -\langle h(X, Z), FY \rangle = -\langle X, Z \rangle \langle H, FY \rangle, \end{aligned}$$

also gilt

$$\langle X, Y \rangle tH = -\langle H, FY \rangle X$$

für alle  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Wegen  $\dim M \geq 2$  folgt hieraus

$$H_p \perp (T_p M \oplus J T_p M)$$

für alle  $p \in M$ . Aufgrund der Starrheit sphärischer Untermannigfaltigkeiten folgt nun mit (i) die Behauptung.  $\square$

**Anmerkung:** (Sphärische Kurven) Seien  $\bar{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\gamma: I \rightarrow \bar{M}$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in  $\bar{M}$ .  $\gamma$  heißt sphärische Kurve in  $\bar{M}$ , wenn eine reelle Zahl  $\kappa \geq 0$  und ein Einheitsvektorfeld  $\xi$  längs  $\gamma$  existieren mit

$$\bar{\nabla}_\theta \dot{\gamma} = \kappa \xi \quad \text{und} \quad \bar{\nabla}_\theta \xi = -\kappa \dot{\gamma}.$$

$\kappa$  ist die geodätische Krümmung von  $\gamma$ . Im Gegensatz zu [NY] lassen wir auch den Fall  $\kappa = 0$  zu, d.h. Geodätische sind sphärische Kurven der geodätischen Krümmung 0.  $\gamma$  ist genau dann sphärisch, wenn  $\gamma$  die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\bar{\nabla}_\theta \bar{\nabla}_\theta \dot{\gamma} + \langle \bar{\nabla}_\theta \dot{\gamma}, \bar{\nabla}_\theta \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma} = 0$$

erfüllt ([NY], S.163). Es gilt der folgende

**Existenz- und Eindeutigkeitsatz** ([Re1], S.14 f.): Seien  $\bar{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in \bar{M}$  und  $v, w \in T_p \bar{M}$  mit  $\|v\| = 1$  und  $\langle v, w \rangle = 0$ . Dann existiert genau eine maximale sphärische Kurve  $\gamma: I \rightarrow \bar{M}$  ( $I$  offenes Intervall in  $\mathbb{R}$ ) mit  $0 \in I$ ,  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$  und  $\bar{\nabla}_{\theta_0} \dot{\gamma} = w$ .

Nun ist  $\gamma$  genau dann sphärisch, wenn das Normalenfeld der mittleren Krümmung von  $\gamma(I)$  (aufgefaßt als 1-dimensionale immersierte Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ ) parallel ist ([NY], S.164). Damit ist auch die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit für den Fall  $k = 1$  in Theorem 2.5 (ii) vollständig beantwortet.

Eine glatt geschlossene sphärische Kurve nennen wir auch einen *Kreis* (im Gegensatz zu dieser Definition werden in [NY] auch nicht-geschlossene sphärische Kurven als Kreise bezeichnet). Ferner nennen wir eine reguläre Kurve  $\gamma$  in  $\overline{M}$  sphärisch, wenn eine Umparametrisierung  $\varphi$  von  $\gamma$  auf Bogenlänge existiert, so daß  $\gamma \circ \varphi$  sphärisch ist.

Der folgende Satz wird für uns bei den geometrischen Untersuchungen zu sphärischen Kurven in  $\mathbb{C}P^m$  und  $\mathbb{C}H^m$  von großem Nutzen sein.

*Satz:* (Spezialfall von [Me], S.54) *Seien  $\gamma : I \rightarrow \overline{M}$  ( $I$  offenes Intervall in  $\mathbb{R}$ ) eine sphärische Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\overline{M}$  und  $M$  eine vollständige total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\overline{M}$ . Existiert ein  $t \in I$  mit*

$$p := \gamma(t) \in M, \quad \dot{\gamma}(t) \in T_p M \quad \text{und} \quad \overline{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \in T_p M,$$

so gilt  $\gamma(I) \subset M$ .

### §3: Untermannigfaltigkeiten und die Hopf-Abbildung

#### 3.1 Pseudo-Riemannsche Submersionen

Seien  $N, M$  pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Levi-Civita-Ableitungen  $\tilde{\nabla}, \nabla$ . Eine Submersion  $\pi : N \rightarrow M$  heißt *pseudo-Riemannsche Submersion*, wenn die Bedingungen (a) und (b) erfüllt sind:

- (a) Für jedes  $q \in M$  ist die Faser  $\pi^{-1}(\{q\})$  eine pseudo-Riemannsche Untermannigfaltigkeit von  $N$ .
- (b)  $\pi_*$  erhält das Skalarprodukt von horizontalen Vektoren.

Hierbei heißt  $u \in T_p N (p \in N)$  *horizontal*, wenn  $u$  orthogonal zur Faser durch  $p$  ist. Zu den Fasern tangentielle Vektoren heißen *vertikal*. Mit  $\mathcal{V}$  bzw.  $\mathcal{H}$  bezeichnen wir das Untervektorbündel von  $TN$  aller vertikalen bzw. horizontalen Vektoren, also

$$\mathcal{V} := \text{Kern } \pi_*, \quad \mathcal{H} := \mathcal{V}^\perp.$$

Die Projektion von  $TN$  auf das horizontale bzw. vertikale Untervektorbündel bezeichnen wir ebenfalls mit  $\mathcal{H}$  bzw.  $\mathcal{V}$ .

Ist in obiger Situation  $N$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so heißt  $\pi$  *Riemannsche Submersion*. Die Bedingung (a) ist stets erfüllt, wenn  $N$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Zur Theorie Riemannscher Submersionen siehe auch [Be3], Chapter 9.

Sei im folgenden stets  $\pi : N \rightarrow M$  eine pseudo-Riemannsche Submersion. Für jeden Punkt  $p \in N$  ist  $\pi_*|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)}M$  eine lineare Isometrie. Zu jedem Vektor  $v \in T_{\pi(p)}M$  existiert dann genau ein Vektor  $\tilde{v} \in \mathcal{H}_p$  mit  $\pi_*\tilde{v} = v$ ;  $\tilde{v}$  heißt der *horizontale Lift von  $v$  in  $p$* . Der Prozeß des Liftens läßt sich punktweise auch für ein Vektorfeld  $Z \in \mathcal{X}(M)$  durchführen, und man erhält ein eindeutig bestimmtes (differenzierbares) Vektorfeld  $\tilde{Z} \in \Gamma(\mathcal{H})$  mit  $\pi_*\tilde{Z} = Z \circ \pi$ ;  $\tilde{Z}$  heißt der *horizontale Lift von  $Z$* . Eine *horizontale Kurve* in  $N$  ist eine Kurve in  $N$ , deren Geschwindigkeitsvektor in jedem Punkt horizontal ist. Ist  $\alpha : I \rightarrow M$  eine Kurve und  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow N$  eine horizontale Kurve mit  $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ , so heißt  $\tilde{\alpha}$  ein *horizontaler Lift von  $\alpha$* .

In den nun folgenden Definitionen seien  $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$  und  $V, W \in \Gamma(\mathcal{V})$ . Durch

$$\Omega(X, Y) := -\mathcal{V}[X, Y]$$

wird eine schiefsymmetrische  $\mathcal{V}$ -wertige Vektorbündel-Bilinearform  $\Omega$  auf  $\mathcal{H}$  definiert.  $\Omega$  heißt die *Krümmungsform von  $\mathcal{H}$*  und kann als ein (vektorielles) Maß für die Integrierbarkeit von  $\mathcal{H}$  interpretiert werden. Es gilt ([ON1], S.461)

$$(1) \quad \Omega(X, Y) = -2\mathcal{V}\tilde{\nabla}_X Y.$$

Die symmetrische  $\mathcal{H}$ -wertige Vektorbündel-Bilinearform  $h^\nu$  auf  $\mathcal{V}$  mit

$$h^\nu(V, W) := \mathcal{H}\tilde{\nabla}_\nu W$$

heißt die *zweite Fundamentalform* von  $\mathcal{V}$ . Da  $\mathcal{V}$  stets integrabel ist, kann man  $h^\nu$  auch als die zweite Fundamentalform der durch  $\mathcal{V}$  induzierten Blätterung von  $N$  interpretieren. Schließlich definieren wir noch den *Formoperator*  $A^\mathcal{H}$  von  $\mathcal{H}$  bzw. den *Formoperator*  $A^\nu$  von  $\mathcal{V}$  durch

$$A^\mathcal{H}_\nu X := -\mathcal{H}\tilde{\nabla}_X V, \quad A^\nu_X V := -\nu\tilde{\nabla}_V X.$$

Mit der Ricci-Identität folgt leicht

$$(2) \quad \langle A^\mathcal{H}_\nu X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \langle \Omega(X, Y), V \rangle,$$

$$(3) \quad \langle A^\nu_X V, W \rangle = \langle h^\nu(V, W), X \rangle;$$

also ist  $A^\mathcal{H}_\nu$  ein schiefsymmetrischer Vektorbündel-Endomorphismus von  $\mathcal{H}$  und  $A^\nu_X$  ein selbstadjungierter Vektorbündel-Endomorphismus von  $\mathcal{V}$ .

**Beispiel:** Die Hopf-Abbildung  $\pi : S^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}P^m$  bzw.  $\pi : H^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}H^m$  ist eine Riemannsche bzw. pseudo-Riemannsche Submersion. Sei  $\pi : N \rightarrow M$  eine der beiden Submersionen. Wir betrachten  $N$  als Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}^{m+1}$  und können somit die komplexe Struktur  $\bar{J}$  von  $\mathbb{C}^{m+1}$  auf Vektorfelder  $X \in \mathcal{X}(N)$  anwenden.  $V \in \mathcal{X}(N)$  bezeichne das vertikale Einheitsvektorfeld auf  $N$  mit den Integralkurven  $t \mapsto ze^{it}$  ( $z \in N$ ). Wir definieren  $\varepsilon := \langle V, V \rangle$ , also  $\varepsilon = +1$  (bzw.  $\varepsilon = -1$ ) im projektiven (bzw. hyperbolischen) Fall. Dann gilt

$$(4) \quad \nu = \text{IRV}, \quad h^\nu = 0, \quad A^\nu = 0,$$

und für alle  $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ :

$$(5) \quad A^\mathcal{H}_\nu X = -\bar{J}X,$$

$$(6) \quad \Omega(X, Y) = 2\varepsilon \langle \bar{J}X, Y \rangle V.$$

Für jeden Punkt  $z \in N$  ist  $\mathcal{H}_z$  kanonisch isomorph zu dem orthogonalen Komplement  $(\mathbb{C}z)^\perp$  von  $\mathbb{C}z$  in  $\mathbb{C}^{m+1}$  (man beachte, daß im hyperbolischen Fall das orthogonale Komplement bezüglich der Bilinearform  $\beta$  gemäß 1.11 zu bilden ist).  $\pi$  ist ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe  $S^1$ , und  $\mathcal{H}$  ist ein Zusammenhang im Sinne von [KN1], S.63.

*Beweis:* Die Integralkurven von  $V$  durchlaufen gerade die Fasern von  $\pi$ , woraus  $\nu = \text{IRV}$  folgt. Da die Integralkurven von  $V$  Geodätische von  $N$  sind, ist jede Faser von  $\pi$  total-geodätisch in  $N$ , also  $h^\nu = 0$  und damit auch  $A^\nu = 0$ . Seien

$\bar{\nabla}$  die Levi-Civita-Ableitung von  $\mathbb{C}^{m+1}$  (beachte die unterschiedlichen Metriken auf  $\mathbb{C}^{m+1}$  für die beiden verschiedenen Fälle) und  $\xi := -\bar{J}V$ . Mit der Gauß-Gleichung und der Weingarten-Gleichung für  $N \hookrightarrow \mathbb{C}^{m+1}$  sowie der Parallelität von  $\bar{J}$  folgt

$$\tilde{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_X(\bar{J}\xi) = \bar{J}\bar{\nabla}_X \xi = \bar{J}X \in \Gamma(\mathcal{H})$$

für alle  $X \in \Gamma(\mathcal{H})$ ; beachte hierbei die  $\bar{J}$ -Invarianz von  $\mathcal{H}$ . Damit gilt

$$A^\mathcal{H}_\nu X = -\mathcal{H}\tilde{\nabla}_X V = -\bar{J}X.$$

(6) folgt aus (2) und (5). Die Aussage über  $\mathcal{H} = \nu^\perp$  folgt aus  $\nu = \text{IRV}$ . Daß  $\pi$  ein Prinzipalbündel ist, ist wohlbekannt.  $\square$

### 3.2 Die Levi-Civita-Ableitung bei pseudo-Riemannschen Submersionen

Die Bezeichnungen seien wie in 3.1. Wir beschreiben nun den Zusammenhang zwischen den Levi-Civita-Ableitungen bei pseudo-Riemannschen Submersionen (vgl. auch [ON1]).

**Theorem:** Sei  $\pi : N \rightarrow M$  eine pseudo-Riemannsche Submersion. Dann gilt für alle  $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ :

$$(7) \quad \pi_* \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X \pi_* Y - \pi_* (A^\mathcal{H}_{\nu X}(\mathcal{H}Y) + A^\mathcal{H}_{\nu Y}(\mathcal{H}X) - h^\nu(\nu X, \nu Y)),$$

$$(8) \quad \nu \tilde{\nabla}_X Y = \nu \tilde{\nabla}_X(\nu Y) - A^\nu_{\mathcal{H}Y}(\nu X) - \frac{1}{2} \Omega(\mathcal{H}X, \mathcal{H}Y).$$

*Beweis:* zu (7): Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_X \pi_* Y - \pi_* \tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X(\pi_* \mathcal{H}Y) - \pi_* \tilde{\nabla}_X(\mathcal{H}Y) - \pi_* \tilde{\nabla}_{\mathcal{H}X}(\nu Y) - \pi_* \tilde{\nabla}_{\nu X}(\nu Y) \\ &= \nabla_X(\pi_* \mathcal{H}Y) - \pi_* \tilde{\nabla}_X(\mathcal{H}Y) + \pi_* A^\mathcal{H}_{\nu X}(\mathcal{H}X) - \pi_* h^\nu(\nu X, \nu Y). \end{aligned}$$

Es bleibt also noch zu zeigen

$$(9) \quad \pi_* \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X \pi_* Y - \pi_* A^\mathcal{H}_{\nu X} Y \quad \text{für alle } X \in \mathcal{X}(N), Y \in \Gamma(\mathcal{H}).$$

Offenbar genügt es, (9) für  $X \in \Gamma(\mathcal{H})$  und  $X \in \Gamma(\mathcal{V})$  nachzuweisen. Für  $X \in \Gamma(\mathcal{H})$  ist (9) die bekannte Formel von O'Neill ([ON1], S.460). Seien also  $X \in \Gamma(\mathcal{V})$  und  $Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ . Dann gilt

$$(10) \quad \pi_* \tilde{\nabla}_X Y = \pi_* [X, Y] + \pi_* \tilde{\nabla}_Y X = \pi_* [X, Y] - \pi_* A^\mathcal{H}_X Y.$$

Mit der Cartanschen Strukturgleichung für den (verschwindenden) Torsionstensor von  $M$  (vgl. [GKM], S.48) erhalten wir

$$(11) \quad \pi_*[X, Y] = \nabla_X \pi_* Y .$$

Aus (10) und (11) folgt (9) für  $X \in \Gamma(\mathcal{V})$  und  $Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ . Insgesamt ist damit (7) bewiesen.

zu (8): folgt leicht mit der Definition von  $A^\mathcal{V}$  sowie (1). □

### 3.3 Projektionen von Geodätischen

Wir untersuchen nun das Verhalten von Geodätischen unter pseudo-Riemannschen Submersionen. Die Bezeichnungen seien wie in 3.1.

**Korollar:** Seien  $\pi : N \rightarrow M$  eine pseudo-Riemannsche Submersion und  $\gamma$  eine Geodätische von  $N$ . Dann gilt für die Projektion  $\pi \circ \gamma$  von  $\gamma$  auf  $M$

$$(12) \quad \nabla_{\partial \pi \circ \gamma} \dot{\pi \circ \gamma} = \pi_* (2A_{\mathcal{V}\dot{\gamma}}^{\mathcal{H}}(\mathcal{H}\dot{\gamma}) - h^\mathcal{V}(\mathcal{V}\dot{\gamma}, \mathcal{V}\dot{\gamma})) .$$

*Beweis:* Die Behauptung folgt aus (7). □

Insbesondere folgt aus (12) die bekannte Tatsache, daß horizontale Geodätische unter pseudo-Riemannschen Submersionen wieder auf Geodätische abgebildet werden. Speziell für  $\mathbb{C}P^m$  und  $\mathbb{C}H^m$  erhält man:

**Bemerkung:** (Die Geodätischen von  $\mathbb{C}P^m$  und  $\mathbb{C}H^m$ )

Seien  $M$  entweder  $\mathbb{C}P^m$  oder  $\mathbb{C}H^m$  und  $\pi$  die Hopf-Abbildung auf  $M$ . Ferner seien  $p \in M$ ,  $u \in T_p M$  mit  $\|u\| = 1$ ,  $z \in \pi^{-1}(\{p\})$  und  $v \in \mathbb{C}^{m+1}$  der (bis auf die kanonische Isomorphie  $\mathbb{C}^{m+1} \approx T_z \mathbb{C}^{m+1}$ ) horizontale Lift von  $u$ . Dann ist

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}P^m, \quad t \mapsto \pi(\cos(t)z + \sin(t)v)$$

bzw.

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}H^m, \quad t \mapsto \pi(\cosh(t)z + \sinh(t)v)$$

die maximale Geodätische von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = u$ .

Wir wenden das Korollar nun in der folgenden Situation (S) an:

$$(S) \quad \begin{array}{ccc} N & \hookrightarrow & \bar{N} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ M & \hookrightarrow & \bar{M} \end{array} .$$

Hierbei sind  $\bar{\pi} : \bar{N} \rightarrow \bar{M}$  die Hopf-Abbildung entweder auf  $\mathbb{C}P^m$  oder auf  $\mathbb{C}H^m$ ,  $M$  eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ ,  $N := \bar{\pi}^{-1}(M)$  und  $\pi := \bar{\pi}|_N : N \rightarrow M$ .  $N$  ist eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von  $\bar{N}$  und  $\pi : N \rightarrow M$  ist eine surjektive pseudo-Riemannsche Submersion ( $\pi$  ist — wie  $\bar{\pi}$  — ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe  $S^1$ ). Ferner seien  $V \in \mathcal{X}(N)$  das vertikale Einheitsvektorfeld auf  $N$  mit den Integralkurven  $t \mapsto ze^{it}$  ( $z \in N$ ) und  $\varepsilon := \langle V, V \rangle$ , also  $\varepsilon^2 = 1$ .

**Theorem:** Seien in der Situation (S)  $\gamma$  eine Geodätische von  $N$  und  $\alpha = \pi \circ \gamma$  die Projektion von  $\gamma$  auf  $M$ . Dann gilt

$$(13) \quad \nabla_{\partial} \dot{\alpha} = -2\omega P \dot{\alpha} ,$$

wobei  $\omega := \varepsilon \langle \dot{\gamma}, V \circ \gamma \rangle$  eine reelle Konstante ist. Für die Geschwindigkeit von  $\alpha$  gilt

$$(14) \quad \|\dot{\alpha}\|^2 = \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle - \varepsilon \omega^2 .$$

(Für die Definition von  $P$  und  $\nabla$  siehe 2.1.)

**Anmerkungen:** a) Für  $\gamma$  wird auf S. 29 die interessante Darstellung (15) hergeleitet.

b)  $\omega := \varepsilon \langle \cdot, V \rangle$  ist die Zusammenhangsform des Prinzipalbündels  $\pi$ .

*Beweis:* Die Einparametergruppe von  $V$  besteht aus Isometrien von  $N$ . Daher ist  $V$  ein Killingfeld auf  $N$ , woraus die Konstanz von  $\langle \dot{\gamma}, V \circ \gamma \rangle$  folgt ([ON3], S.252). Die Fasern von  $\pi$  sind total-geodätisch in  $\bar{N}$  und damit auch total-geodätisch in  $N$ ; daher ist  $h^\mathcal{V} = 0$ . Sei  $\bar{A}^{\mathcal{H}}$  der Formoperator des horizontalen Untervektorbündels  $\bar{\mathcal{H}}$  bezüglich  $\bar{\pi}$ . Dann folgt mit der Gaußgleichung für  $N \hookrightarrow \bar{N}$  sowie (5) (für  $\bar{A}^{\mathcal{H}}$ ) und (12) für alle Vektorfelder  $X$  längs  $\alpha$  und deren horizontale Lifte  $\tilde{X}$  längs  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial} \dot{\alpha}, X \rangle &= 2\omega \langle \pi_* A_{V \circ \gamma}^{\mathcal{H}}(\mathcal{H}\dot{\gamma}), \pi_* \tilde{X} \rangle \\ &= 2\omega \langle A_{V \circ \gamma}^{\mathcal{H}}(\mathcal{H}\dot{\gamma}), \tilde{X} \rangle = 2\omega \langle \bar{A}_{V \circ \gamma}^{\mathcal{H}}(\mathcal{H}\dot{\gamma}), \tilde{X} \rangle \\ &= -2\omega \langle \bar{J}\mathcal{H}\dot{\gamma}, \tilde{X} \rangle = -2\omega \langle \pi_* \bar{J}\mathcal{H}\dot{\gamma}, X \rangle \\ &= -2\omega \langle J\pi_* \mathcal{H}\dot{\gamma}, X \rangle = -2\omega \langle P \dot{\alpha}, X \rangle . \end{aligned}$$

Hieraus folgt (13). Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \|\dot{\alpha}\|^2 &= \|\pi_* \dot{\gamma}\|^2 = \|\pi_* \mathcal{H}\dot{\gamma}\|^2 = \|\mathcal{H}\dot{\gamma}\|^2 \\ &= \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle - \langle \mathcal{V}\dot{\gamma}, \mathcal{V}\dot{\gamma} \rangle = \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle - \varepsilon \omega^2 . \end{aligned} \quad \square$$

**Anmerkung:** Wir haben damit auch bewiesen, daß jede nicht-vertikale Geodätische von  $N$  die Fasern von  $\pi$  stets in gleichem Winkel schneidet.

Wir geben nun eine Charakterisierung der total-reellen, komplexen bzw. CR-Untermannigfaltigkeiten von  $\bar{M}$  an.

**Satz 1:** In der Situation (S) gilt

(i)  $M$  ist genau dann eine total-reelle Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ , wenn für jede Geodätische  $\gamma$  von  $N$  die Projektion  $\alpha = \pi \circ \gamma$  von  $\gamma$  auf  $M$  eine Geodätische von  $M$  ist.

(ii) Ist  $M$  eine komplexe Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ , so ist für jede nicht-horizontale und nicht-vertikale Geodätische  $\gamma$  von  $N$  die Projektion  $\alpha = \pi \circ \gamma$  von  $\gamma$  auf  $M$  eine sphärische Kurve in  $M$  mit nicht-verschwindender geodätischer Krümmung (d.h.  $\alpha$  ist keine Geodätische von  $M$ ).

(iii)  $M$  ist genau dann eine CR-Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ , wenn für jede Geodätische  $\gamma$  von  $N$  das Vektorfeld  $J\nabla_\theta \dot{\alpha}$  längs  $\alpha = \pi \circ \gamma$  tangential zu  $M$  ist.

**Anmerkung:** Ob komplexe Untermannigfaltigkeiten von  $\bar{M}$  durch die in (ii) beschriebene Eigenschaft charakterisiert werden, ist ein interessantes Problem.

**Beweis:** zu (i):  $M$  ist genau dann total-reell, wenn  $P = 0$  gilt. Da  $\omega = 0$  nur für horizontale Geodätische gilt, folgt die Behauptung aus dem Theorem.

zu (ii): Nach (14) hat  $\alpha$  nicht-verschwindende konstante Geschwindigkeit. Als komplexe Untermannigfaltigkeit einer Kähler-Mannigfaltigkeit ist  $M$  selbst eine Kähler-Mannigfaltigkeit und  $P$  die komplexe Struktur von  $M$  ([YK4], S.180), d.h. es gilt  $\nabla P = 0$ . Mit (13) folgt

$$\begin{aligned} \nabla_\theta \nabla_\theta \dot{\alpha} &= -2\omega \nabla_\theta (P \dot{\alpha}) = -2\omega P \nabla_\theta \dot{\alpha} = 4\omega^2 P^2 \dot{\alpha} \\ &= -4\omega^2 \dot{\alpha} = -\frac{1}{\|\dot{\alpha}\|^2} \langle \nabla_\theta \dot{\alpha}, \nabla_\theta \dot{\alpha} \rangle \dot{\alpha} \end{aligned}$$

d.h.  $\alpha$  ist eine sphärische Kurve in  $M$  mit geodätischer Krümmung  $2|\omega| \neq 0$ .

zu (iii):  $M$  ist genau dann eine CR-Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ , wenn  $FP = 0$  gilt (siehe 2.1). Da  $J\nabla_\theta \dot{\alpha}$  genau dann tangential zu  $M$  ist, wenn  $F\nabla_\theta \dot{\alpha} = 0$  gilt, folgt die Behauptung aus dem Theorem.  $\square$

Unter Verwendung des Theorems können wir eine weitere interessante Aussage beweisen.

**Satz 2:** In der Situation (S) gilt:  $M$  ist genau dann geodätisch vollständig, wenn  $N$  geodätisch vollständig ist.

**Beweis:** Jede Geodätische von  $M$  erhält man durch Projektion einer horizontalen Geodätischen von  $N$ . Daher folgt die geodätische Vollständigkeit von  $M$  aus der geodätischen Vollständigkeit von  $N$ .

Sei nun andererseits  $M$  geodätisch vollständig.  $\gamma : I \rightarrow N$  sei eine maximale Geodätische von  $N$  mit  $0 \in I$ . Wir nehmen  $\delta := \sup I < \infty$  an. Aufgrund des Theorems hat  $\alpha = \pi \circ \gamma$  konstante Geschwindigkeit  $r := \|\dot{\alpha}\| \geq 0$  in  $M$ . Daher ist  $\alpha$  auf  $I$  gleichmäßig stetig. Da außerdem nach dem Satz von Hopf/Rinow  $M$  als metrischer Raum vollständig ist, existiert

$$\alpha(\delta) := \lim_{t \rightarrow \delta} \alpha(t)$$

in  $M$ . Seien nun  $\tau : TM \rightarrow M$  die kanonische Projektion und  $K : TTM \rightarrow TM$  die Zusammenhangsabbildung von  $M$ ; also  $Ku = \nabla_u \sigma$  für alle  $u \in TTM$ , wobei  $\sigma := \text{id}_{TM}$ . Ferner sei  $S \in \mathcal{X}(TM)$  das Vektorfeld auf  $TM$  mit

$$\tau_* S = \sigma, \quad KS = -2\omega P \circ \sigma,$$

wobei  $\omega := \varepsilon \langle \gamma, V \circ \gamma \rangle \in \mathbb{R}$ . Aufgrund des Theorems ist  $\alpha$  eine Lösung der Differentialgleichung  $\ddot{\alpha} = S \circ \dot{\alpha}$ , d.h.  $\dot{\alpha}$  ist eine Integralkurve von  $S$ . Seien  $L$  eine kompakte Umgebung von  $\alpha(\delta)$  in  $M$  und  $T^r M := \{v \in TM \mid \|v\| = r\}$ . Dann ist  $\tau^{-1}(L) \cap T^r M$  kompakt in  $T^r M$ , da  $\tau|_{T^r M} : T^r M \rightarrow M$  eine eigentliche Abbildung ist. Ferner verläuft  $\dot{\alpha}$  in der Nähe von  $\delta$  ganz in  $\tau^{-1}(L)$ . Aufgrund des Randverhaltens von Integralkurven ([ON3], S.30) ist daher  $\dot{\alpha}$  keine maximale Integralkurve von  $S$ , d.h.  $\dot{\alpha}$  läßt sich in  $\delta$  differenzierbar fortsetzen. Damit läßt sich aber auch  $\alpha$  in  $\delta$  differenzierbar fortsetzen zu einer Kurve  $\beta : I \cup \{\delta\} \rightarrow M$ . Sei  $\tilde{\beta}$  der horizontale Lift von  $\beta$  mit  $\tilde{\beta}(0) = \gamma(0)$ . (Die Existenz von horizontalen Liften von Kurven in Prinzipalbündeln ist bekannt, vgl. etwa [KN1], S.69.) Ferner sei

$$b : I \rightarrow N, t \mapsto \gamma(t)e^{-i\omega t}.$$

$b$  ist eine horizontale Kurve in  $N$  mit  $\pi \circ b = \gamma$ . Aufgrund der Eindeutigkeit von Liften folgt  $b = \tilde{\alpha}$ , wobei  $\tilde{\alpha}$  der horizontale Lift von  $\alpha$  mit  $\tilde{\alpha}(0) = \gamma(0)$  ist, d.h. es gilt

$$(15) \quad \gamma(t) = \tilde{\alpha}(t)e^{i\omega t}.$$

Wegen  $\beta|_I = \alpha$  ist dann  $\tilde{\beta}|_I = \tilde{\alpha}$  und damit

$$I \cup \{\delta\} \rightarrow N, t \mapsto \tilde{\beta}(t)e^{i\omega t}$$

eine differenzierbare Fortsetzung von  $\gamma$  in  $\delta$ , im Widerspruch zur Maximalität von  $\gamma$ . Daher muß  $\sup I = +\infty$  gelten. Analog beweist man  $\inf I = -\infty$ . Da die Geodätische  $\gamma$  von  $N$  beliebig gewählt war, ist Satz 2 nun bewiesen.  $\square$

**Anmerkung:** Im Falle des projektiven Raumes kann man auch einen anderen Beweis mit Hilfe des Satzes von Hopf/Rinow geben. Auch im hyperbolischen Fall läßt sich solch ein "metrischer" Beweis führen, indem man aus der Lorentz-Metrik auf  $N$  mit Hilfe des zeitartigen Einheitsvektorfeldes  $V$  in kanonischer Weise eine Riemannsche Metrik auf  $N$  konstruiert.

## §4: Röhren und Fokalflächen

### 4.1 $M$ -Jacobifelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Seien  $M$  eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  und  $\gamma : [0, b[ \rightarrow \bar{M}$  ( $b \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ ) eine  $M$ -normale Geodätische von  $\bar{M}$ ,  $p := \gamma(0)$ ,  $z := \dot{\gamma}(0)$ . Hierbei heißt  $\gamma$   $M$ -normal, wenn  $p \in M$  und  $0 \neq z \in \perp_p M$ . Ein Jacobifeld  $Y$  längs  $\gamma$  heißt  $M$ -Jacobifeld, wenn

$$Y(0) \in T_p M \text{ und } A_z Y(0) + Y'(0) \in \perp_p M,$$

wobei  $Y'$  die kovariante Ableitung von  $Y$  in  $\bar{M}$  bezeichnet. Die Menge  $J(\gamma, M)$  aller  $M$ -Jacobifelder längs  $\gamma$  ist ein  $(\dim \bar{M})$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dies folgt aus

$$J(\gamma, M) \approx \{(0, \xi) \mid \xi \in \perp_p M\} \oplus \{(v, -A_z v) \mid v \in T_p M\} \\ \subset T_p \bar{M} \times T_p \bar{M},$$

da alle Jacobifelder  $Y$  längs  $\gamma$  eindeutig durch die Anfangswerte  $(Y(0), Y'(0))$  charakterisiert sind. Ein Vektorfeld  $Y$  längs  $\gamma$  ist genau dann ein  $M$ -Jacobifeld, wenn  $Y$  das infinitesimale Variationsvektorfeld einer  $M$ -normalen geodätischen Variation von  $\gamma$  ist ([ON3], S.281).

Wir benutzen in diesem Paragraphen die folgenden Bezeichnungen (für weitere Bezeichnungen siehe 2.1):

$\tau : \perp M \rightarrow M$  sei die kanonische Projektion;

$K^\perp : T(\perp M) \rightarrow \perp M$  sei die normale Zusammenhangsabbildung von  $M$ , also  $K^\perp u = D_u \sigma$  für alle  $u \in T(\perp M)$ , wobei  $\sigma := \text{id}_{\perp M}$ ;

ferner definieren wir für  $r \in \mathbb{R}_+$

$\mathcal{B} := \mathcal{B}_r := \{z \in \perp^1 M \mid \exp^\perp \text{ ist definiert in } rz\}$ ;

$\Phi := \Phi_r : \mathcal{B} \rightarrow \bar{M}$ ,  $z \mapsto \exp^\perp(rz)$  sei die Röhrenabbildung vom Radius  $r$  um  $M$ ;

$\eta := \eta^r$  sei das Vektorfeld längs  $\Phi$  mit  $\eta_z := \dot{\gamma}_z(r)$  für alle  $z \in \mathcal{B}$ , wobei  $\gamma_z : [0, r] \rightarrow \bar{M}$  die Geodätische von  $\bar{M}$  ist mit  $\dot{\gamma}_z(0) = z$ .

**Anmerkungen:** a) (vgl. [Re2], S.75)

(1) Für jeden Normalenvektor  $z \in \perp M$  ist die Abbildung

$$T_z(\perp M) \longrightarrow T_p M \oplus \perp_p M, u \longmapsto (\tau_* u, K^\perp u)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus, wobei  $p := \tau(z)$ .

(2) Für jedes  $z \in \perp^1 M$  und jedes  $u \in T_z(\perp^1 M)$  gilt  $\langle K^\perp u, z \rangle = 0$ .

b) Für jedes  $r \in \mathbb{R}_+$  ist  $\mathcal{B}_r$  offen in  $\perp^1 M$ . Wir betrachten stets nur solche  $r$ , für die  $\mathcal{B}_r \neq \emptyset$  gilt.

c) Zur Differenzierbarkeit von  $\eta$  siehe [Re2], S.75.

- Das folgende Theorem ist von wesentlicher Bedeutung für die Berechnung
- der Brennpunkte von Untermannigfaltigkeiten (4.3),
  - der Eigenwerte des Formoperators der Röhrenabbildung um Untermannigfaltigkeiten (4.4),
  - der Hauptkrümmungen der Parallel- und Fokalfächen von Hyperflächen (4.5).

**Theorem:** Seien  $M$  eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  und  $\gamma : ]0, b[ \rightarrow \bar{M}$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte  $M$ -normale Geodätische von  $\bar{M}$ ,  $z := \dot{\gamma}(0)$ . Ferner seien  $u \in T_z(\perp^1 M)$  und  $Y$  das  $M$ -Jacobifeld längs  $\gamma$  mit  $Y(0) = \tau_* u$  und  $Y'(0) = K^\perp u - A_z \tau_* u$ . Dann gilt für jedes  $r \in ]0, b[$

$$(3) \quad Y(r) = \Phi_{r*} u \quad ,$$

$$(4) \quad Y'(r) = \bar{\nabla}_u \eta^r \quad .$$

**Bemerkung:** Ist  $Y$  ein  $M$ -Jacobifeld längs  $\gamma$ , so existiert nach (1) genau ein  $u \in T_z(\perp^1 M)$  mit  $Y(0) = \tau_* u$  und  $Y'(0) = K^\perp u - A_z \tau_* u$ . Dann gilt

$$(5) \quad u \in T_z(\perp^1 M) \iff \langle K^\perp u, z \rangle = 0 \iff \langle Y, \dot{\gamma} \rangle = 0 \quad .$$

*Beweis:* Seien  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  und  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  eine Kurve in  $M$  mit  $\dot{\alpha}(0) = Y(0)$ .  $U$  und  $V$  seien die (bezüglich  $D$ ) parallelen Normalenfelder längs  $\alpha$  mit  $U(0) = z$  und  $V(0) = (Y'(0))^\perp$ . Für das Vektorfeld  $W$  längs  $\alpha$  mit  $W(t) := U(t) + tV(t)$  gilt dann  $W(0) = z$ , und mit der Weingarten-Gleichung folgt

$$W'(0) = U'(0) + V(0) = -A_z \dot{\alpha}(0) + V(0) = Y'(0) \quad .$$

Wegen  $\langle U(0), V(0) \rangle = \langle z, K^\perp u \rangle = 0$  (vgl. (2)) und der Parallelität von  $U$  und  $V$  gilt  $\|W(t)\|^2 = 1 + t^2 \|V(0)\|^2$ . Seien  $r \in ]0, b[$  und  $Z := W/\|W\|$ . Es gilt  $Z(0) = z$  und  $Z'(0) = Y'(0)$ ; ferner ist  $Z(t) \in \mathcal{B}_r$  für alle  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  und  $\varepsilon$  hinreichend klein. Nun gilt

$$\begin{aligned} \tau_* \dot{Z}(0) &= (\tau \circ Z)'(0) = \dot{\alpha}(0) = Y(0) = \tau_* u \quad , \\ K^\perp \dot{Z}(0) &= D_{Z(0)} \sigma = Z'(0) + A_{Z(0)} \dot{\alpha}(0) \\ &= Y'(0) + A_z Y(0) = K^\perp u \quad , \end{aligned}$$

woraus mit (1)  $\dot{Z}(0) = u$  folgt. Man betrachte nun die geodätische Variation

$$G : (t, s) \mapsto G(t, s) := G_s(t) := \exp^{\perp}(tZ(s)) \quad .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{(s \mapsto G(0, s))}(0) &= \dot{\alpha}(0) = Y(0) \quad , \\ \bar{\nabla}_{\partial_s=0}(s \mapsto G_s(0)) &= \bar{\nabla}_{\partial_s=0} Z = Z'(0) = Y'(0) \quad . \end{aligned}$$

Also ist  $Y$  das infinitesimale Variationsvektorfeld von  $G$  und es folgt

$$\begin{aligned} Y(r) &= \overline{(s \mapsto G(r, s))}(0) = \overline{\Phi_r \circ Z}(0) = \Phi_{r*} \dot{Z}(0) = \Phi_{r*} u \quad , \\ Y'(r) &= \bar{\nabla}_{\partial_s=0}(s \mapsto G_s(r)) = \bar{\nabla}_{\partial_s=0}(\eta^r \circ Z) = \bar{\nabla}_{Z(0)} \eta^r = \bar{\nabla}_u \eta^r \quad . \end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. Zur Bemerkung: Aufgrund von (1) und (2) gilt  $u \in T_z(\perp^1 M)$  genau dann, wenn  $\langle K^\perp u, z \rangle = 0$ . Da  $Y$  Jacobifeld längs  $\gamma$  ist, existieren  $c, d \in \mathbb{R}$  mit  $\langle Y(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = ct + d$ . Die Behauptung erhalten wir dann aus

$$d = \langle Y(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = 0 \quad ; \quad c = \langle Y'(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = \langle K^\perp u, z \rangle \quad . \quad \square$$

**Korollar:** Seien  $M$  eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  und  $r \in \mathbb{R}_+$ . Dann gilt  $\langle \Phi_{r*} u, \eta_z^r \rangle = 0$  und  $\langle \eta_z^r, \eta_z^r \rangle = 1$  für alle  $z \in \mathcal{B}_r$  und  $u \in T_z(\perp^1 M)$ . Ist  $\Phi_r$  eine Immersion, so ist  $\eta^r$  ein Einheitsnormalenfeld von  $\Phi_r$ .

*Beweis:* Seien  $z \in \mathcal{B}_r$ ,  $u \in T_z(\perp^1 M)$  und  $Y$  das  $M$ -Jacobifeld längs der Geodätischen  $\gamma : [0, r] \rightarrow \bar{M}$ ,  $t \mapsto \exp^{\perp}(tz)$  von  $\bar{M}$  mit  $Y(0) = \tau_* u$  und  $Y'(0) = K^\perp u - A_z \tau_* u$ . Mit (3), (5) sowie der Definition von  $\eta^r$  folgt

$$\langle \Phi_{r*} u, \eta_z^r \rangle = \langle Y(r), \dot{\gamma}(r) \rangle = 0 \quad .$$

Da außerdem  $\langle \eta_z^r, \eta_z^r \rangle = \langle \dot{\gamma}(r), \dot{\gamma}(r) \rangle = 1$ , folgt die Behauptung.  $\square$

#### 4.2 $M$ -Jacobifelder in lokal-symmetrischen Räumen

In lokal-symmetrischen Räumen lassen sich die Jacobifelder explizit berechnen (vgl. [GKM], S.131). Unter "lokal-symmetrischer Raum" verstehen wir im folgenden stets "Riemannscher lokal-symmetrischer Raum".

Sei  $\bar{M}$  ein lokal-symmetrischer Raum. Für  $z \in T_p \bar{M}$ ,  $p \in \bar{M}$ , ist  $\bar{R}_z := \bar{R}(\cdot, z)z$  ein selbstadjungierter Endomorphismus auf  $T_p \bar{M}$ . Sei  $\gamma : [0, b[ \rightarrow \bar{M}$  eine nicht-konstante Geodätische von  $\bar{M}$ ,  $p := \gamma(0)$ ,  $z := \dot{\gamma}(0)$ . Für  $v \in T_p \bar{M}$  bezeichne  $B_v$  das parallele Vektorfeld längs  $\gamma$  mit  $B_v(0) = v$ . Die Jacobifelder längs  $\gamma$  erhält man dann durch Linearkombinationen der "Basis-Jacobifelder"  $Y$  längs  $\gamma$  mit

$$\begin{aligned} Y(0) = v, \quad Y'(0) = 0 & : Y = \cos_\kappa B_v, \\ Y(0) = 0, \quad Y'(0) = v & : Y = \sin_\kappa B_v, \end{aligned}$$

wobei  $\kappa$  ein Eigenwert von  $\bar{R}_z$  und  $v \in T_p \bar{M}$  ein zugehöriger Eigenvektor ist. (Sind  $z$  und  $v$  linear unabhängig und gilt  $\|z\| = 1$ , so ist  $\kappa$  die Schnittkrümmung von  $\bar{M}$  bezüglich dem von  $z$  und  $v$  aufgespannten 2-dimensionalen Untervektorraum von  $T_p \bar{M}$ .) Die Funktionen  $\sin_\kappa$  und  $\cos_\kappa$  bilden das bekannte Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung  $y'' + \kappa y = 0$ . Explizit gilt

$$\sin_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}t) & \text{für } \kappa > 0 \\ t & \text{für } \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}t) & \text{für } \kappa < 0 \end{cases}$$

$$\cos_\kappa(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}t) & \text{für } \kappa > 0 \\ 1 & \text{für } \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{-\kappa}t) & \text{für } \kappa < 0 \end{cases}$$

Für spätere Anwendungen definieren wir noch

$$\tan_\kappa := \frac{\sin_\kappa}{\cos_\kappa}; \quad \cot_\kappa := \frac{\cos_\kappa}{\sin_\kappa}$$

Seien nun  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$  und  $\gamma : [0, b[ \rightarrow \bar{M}$  eine nicht-konstante  $M$ -normale Geodätische von  $\bar{M}$ ,  $p = \gamma(0)$ ,  $z = \dot{\gamma}(0)$ . Um eine möglichst einfache Darstellung der  $M$ -Jacobifelder längs  $\gamma$  zu erhalten, muß man fordern, daß sich die Geometrie von  $M$  in  $p$  in gewisser Weise an die Geometrie von  $\bar{M}$  in  $p$  anpaßt. Als sehr praktikabel erweist sich die Bedingung

$$(K) \quad \bar{R}_z(T_p M) \subset T_p M \quad \text{und für } R_z := \bar{R}_z|_{T_p M} \text{ gilt } R_z \circ A_z = A_z \circ R_z$$

(K) ist äquivalent zu der Aussage, daß  $T_p M$  eine gemeinsame Basis aus Eigenvektoren von  $\bar{R}_z$  und  $A_z$  besitzt.

Gilt (K), so erhält man alle  $M$ -Jacobifelder längs  $\gamma$  durch Linearkombinationen der "Basis- $M$ -Jacobifelder"  $Y_v$  längs  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} Y_v &= (\cos_\kappa - \lambda \sin_\kappa) B_v & \text{für } v \in E_\kappa \cap T_\lambda \\ Y_v &= \sin_\kappa B_v & \text{für } v \in E_\kappa \cap \perp_p M \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $E_\kappa$  bzw.  $T_\lambda$  den Eigenraum von  $\bar{R}_z$  bzw.  $A_z$  bezüglich des Eigenwertes  $\kappa$  bzw.  $\lambda$ .

Ist  $\bar{M}$  eine reelle Raumform, so ist die Bedingung (K) stets erfüllt. Für nicht-euklidische komplexe Raumformen gilt (man beachte, daß jede komplexe Raumform ein lokal-symmetrischer Raum ist, vgl. 1.7):

**Lemma:** Seien  $M$  eine Untermannigfaltigkeit einer komplexen Raumform  $\bar{M}$  der holomorphen Schnittkrümmung  $c \neq 0$  und  $z \in \perp^1 M$ ,  $p = \tau(z)$ . Dann gilt

$$(i) \quad \text{Spec}(\bar{R}_z) = \{0, c, c/4\} \quad \text{und}$$

$$E_0 = \mathbb{R}z, \quad E_c = \mathbb{R}Jz, \quad E_{c/4} = (\mathbb{C}z)^\perp$$

(ii)  $z$  erfüllt genau dann die Bedingung (K), wenn eine der folgenden zwei Aussagen gilt:

$$(I) \quad Jz \in \perp_p M,$$

(II)  $Jz \in T_p M$  und  $Jz$  ist eine Hauptkrümmungsrichtung von  $M$  in  $p$  bezüglich  $z$ .

**Anmerkung:** Für komplexe Untermannigfaltigkeiten von komplexen Raumformen gilt also stets die Bedingung (K).

**Beweis:** (i) folgt leicht mit der expliziten Darstellung von  $\bar{R}$  in 1.7. (ii) folgt aus (i).  $\square$

### 4.3 Brennpunkte

Seien  $M$  eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  und  $\gamma : [0, b[ \rightarrow \bar{M}$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte  $M$ -normale Geodätische von  $\bar{M}$ ,  $z := \dot{\gamma}(0)$ . Ist  $\exp_*^\perp$  singular an der Stelle  $rz$  für ein  $r \in ]0, b[$ , so heißt  $\gamma(r)$  ein *Brennpunkt von  $M$  längs  $\gamma$* . Die Dimension  $\mu(r)$  des Kerns von  $\exp_{*r}^\perp$  heißt dann die *Vielfachheit des Brennpunktes*. Ist speziell  $M$  ein Punkt, so heißt ein Brennpunkt von  $M$  längs  $\gamma$  auch *konjugierter Punkt längs  $\gamma$* .

Geometrisch läßt sich ein Brennpunkt  $\gamma(r)$  von  $M$  längs  $\gamma$  dadurch charakterisieren, daß eine Familie von  $M$ -normalen Geodätischen mit Anfangsgeschwindigkeitsvektoren in der Nähe von  $z$  existiert, die in  $\gamma(r)$  fast zusammentreffen ([ON3], S.283).

**Satz:** Seien  $M$  eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  und  $\gamma : [0, b[ \rightarrow \bar{M}$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte  $M$ -normale

Geodätische von  $\bar{M}$ ,  $z := \dot{\gamma}(0)$ ,  $r \in ]0, b[$ . Ferner sei  $g$  der Diffeomorphismus  $\perp^1 M \rightarrow \perp^r M$ ,  $\tilde{z} \mapsto r\tilde{z}$ . Dann gilt

Kern  $\exp_{\tilde{r}z}^\perp = \{g_*u \mid u \in T_z(\perp^1 M) \text{ mit } Y(r) = 0, \text{ wobei } Y \in J(\gamma, M) \text{ das } M\text{-Jacobifeld längs } \gamma \text{ mit } Y(0) = \tau_*u \text{ und } Y'(0) = K^\perp u - A_z \tau_*u \text{ ist}\}$ .

Insbesondere sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

- (i)  $\gamma(r)$  ist ein Brennpunkt von  $M$  längs  $\gamma$  mit der Vielfachheit  $\mu(r)$ .
- (ii) Es existiert ein  $M$ -Jacobifeld  $Y \neq 0$  längs  $\gamma$  mit  $Y(r) = 0$  und es gilt  $\mu(r) = \dim\{Y \in J(\gamma, M) \mid Y(r) = 0\}$ .

**Beweis:** Seien  $w \in T_{r\tilde{z}}(\perp M)$  und  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}z$ ,  $t \mapsto tz$ . Wir spalten  $w$  auf in die zu  $\perp^r M$  tangentielle Komponente  $g_*u$  mit  $u \in T_z(\perp^1 M)$  und die radiale Komponente  $a\beta(r)$  mit  $a \in \mathbb{R}$ , also

$$w = g_*u + a\beta(r)$$

Mit (3) folgt dann

$$(6) \quad \exp_{\tilde{r}z}^\perp w = Y(r) + a\dot{\gamma}(r)$$

wobei  $Y$  das  $M$ -Jacobifeld längs  $\gamma$  mit  $Y(0) = \tau_*u$  und  $Y'(0) = K^\perp u - A_z \tau_*u$  ist. Aus (6) folgt mit (5) die Behauptung.  $\square$

**Anmerkung:** Einen anderen Beweis für diesen Satz ohne die Behauptung über die Vielfachheit findet man in [ON3], S.283.

**Korollar:** Seien  $M$  eine Untermannigfaltigkeit eines lokal-symmetrischen Raumes  $\bar{M}$  und  $\gamma : ]0, b[ \rightarrow \bar{M}$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte  $M$ -normale Geodätische von  $\bar{M}$ ,  $p = \gamma(0)$ ,  $z = \dot{\gamma}(0)$ ,  $r \in ]0, b[$ . Für  $z$  gelte die Bedingung (K) aus 4.2. Wir definieren

$$\Omega_1 := \{\kappa \in \text{Spec}(R_z) \mid \sin_\kappa(r) \neq 0; \lambda = \cot_\kappa(r) \in \text{Spec}(A_z); E_\kappa \cap T_\lambda \neq \{0\}\},$$

$$\Omega_2 := \{\kappa \in \text{Spec}(\bar{R}_z | \perp_p M) \mid \sin_\kappa(r) = 0\}.$$

Dann gilt:  $\gamma(r)$  ist genau dann ein Brennpunkt von  $M$  längs  $\gamma$ , wenn  $\Omega_1 \neq \emptyset$  oder  $\Omega_2 \neq \emptyset$ . Für die Vielfachheit des Brennpunktes gilt dann

$$\mu(r) = \sum_{\kappa \in \Omega_1} \dim(E_\kappa \cap T_{\cot_\kappa(r)}) + \sum_{\kappa \in \Omega_2} \dim(E_\kappa \cap \perp_p M).$$

**Beweis:** Das Korollar folgt mit dem vorhergehenden Satz und der expliziten Darstellung der "Basis- $M$ -Jacobifelder" längs  $\gamma$  (vgl. 4.2).  $\square$

**Anmerkungen:** a) Dieses Korollar zeigt, daß es auch Brennpunkte von  $M$  längs  $\gamma$  geben kann, die nicht von der Geometrie von  $M$  in  $p$  abhängen (z.B. falls  $\Omega_1 = \emptyset$  und  $\Omega_2 \neq \emptyset$ ). Solche Brennpunkte sind stets konjugierte Punkte längs  $\gamma$ .

b) Wählt man speziell  $M = \{p\}$  mit  $p \in \bar{M}$ , so erhält man die konjugierten Punkte längs Geodätischen in lokal-symmetrischen Räumen.  $\gamma(r)$  ist genau dann ein konjugierter Punkt längs  $\gamma$ , wenn  $\sin_\kappa(r) = 0$  für ein  $\kappa \in \text{Spec}(\bar{R}_z)$  gilt.

**Beispiel 1:** Seien  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit einer  $m$ -dimensionalen komplexen Raumform  $\bar{M}$  der holomorphen Schnittkrümmung  $c$  und  $\gamma : ]0, b[ \rightarrow \bar{M}$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte  $M$ -normale Geodätische von  $\bar{M}$ ,  $p = \gamma(0)$ ,  $z = \dot{\gamma}(0)$ . Dann ergeben sich mit dem vorhergehenden Korollar sowie Lemma 4.2 in den Fällen

$$(I) \quad Jz \in \perp_p M,$$

$$(II) \quad Jz \in T_p M \text{ und } Jz \text{ ist eine Hauptkrümmungsrichtung von } M \text{ bezüglich } z, \text{ d.h. } A_z Jz = \alpha Jz \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R}$$

die folgenden Brennpunkte  $\gamma(r)$  von  $M$  längs  $\gamma$ , wobei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A_z$  und  $m_\lambda$  dessen Vielfachheit ist.

$c$	$r$	Vielfachheit	Voraussetzungen
$> 0$	$\frac{1}{\sqrt{c}}\pi\nu$	1	$\nu$ ungerade
	$\frac{2}{\sqrt{c}}\pi\nu$	$2m - n - 1$	$\nu$ gerade
	$\frac{2}{\sqrt{c}} \left( \text{arccot}\left(\frac{2}{\sqrt{c}}\lambda\right) + \pi\nu \right)$	$m_\lambda$	
$= 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$m_\lambda$	$\lambda > 0$
$< 0$	$\frac{2}{\sqrt{-c}} \text{Arcoth}\left(\frac{2}{\sqrt{-c}}\lambda\right)$	$m_\lambda$	$\lambda > \frac{\sqrt{-c}}{2}$

Tabelle 1: Brennpunkte von  $M$  längs  $\gamma$  im Fall (I)

$c$	$r$	Vielfachheit	Voraussetzungen
$> 0$	$\frac{2}{\sqrt{c}}\pi\nu$	$2m - n - 1$	
	$\frac{2}{\sqrt{c}}\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{2}{\sqrt{c}}\lambda\right) + \pi\nu\right)$	$m_\lambda$ , für $\lambda \neq \alpha$ $m_\lambda - 1$ , für $\lambda = \alpha$	
	$\frac{1}{\sqrt{c}}\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\alpha\right) + \pi\nu\right)$	1	
$= 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$m_\lambda$	$\lambda > 0$
$< 0$	$\frac{2}{\sqrt{-c}}\operatorname{Arcoth}\left(\frac{2}{\sqrt{-c}}\lambda\right)$	$m_\lambda$ , für $\lambda \neq \alpha$ $m_\lambda - 1$ , für $\lambda = \alpha$	$\lambda > \frac{\sqrt{-c}}{2}$
	$\frac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{Arcoth}\left(\frac{1}{\sqrt{-c}}\alpha\right)$	1	$\alpha > \sqrt{-c}$

Tabelle 2: Brennpunkte von  $M$  längs  $\gamma$  im Fall (II)

**Anmerkungen:** a) In den Tabellen ist  $\nu \in \mathbb{N}$  so zu wählen, daß  $r > 0$  und  $\gamma$  in  $r$  definiert ist. In den Tabellen werden in folgenden Fällen Brennpunkte mehrmals aufgeführt: in Tabelle 1 für  $c > 0$  und  $\lambda = 0$ ; in Tabelle 2 für  $c \neq 0$  und  $\lambda^2 - \alpha\lambda - \frac{c}{4} = 0$  (siehe auch Theorem 2 in 5.2). Die entsprechenden Vielfachheiten sind dann zu addieren. Die nachfolgenden Tabellen sind ebenfalls in dieser Weise zu interpretieren.

b) Ist  $\bar{M}$  der komplex projektive Raum, so findet man entsprechende Resultate in [CR], S.486. Die dort angewandte Methode zur Berechnung der Brennpunkte unterscheidet sich aber wesentlich von unserer Methode. Cecil/Ryan berechneten mit einer geeigneten lokalen Trivialisierung des Normalenbündels explizit das Differential der normalen Exponentialabbildung, wobei sie die spezielle Situation mit der Hopf-Abbildung auf  $\mathbb{C}P^m$  ausnutzten. Montiel [Mo2] hat mit der Methode von Cecil/Ryan auf analoge Weise entsprechende Resultate in  $\mathbb{C}H^m$  hergeleitet.

c) Wählt man speziell  $M = \{p\}$  mit  $p \in \bar{M}$ , so erhält man die konjugierten Punkte längs nach der Bogenlänge parametrisierten Geodätischen in komplexen Raumformen:

$c$	$r$	Vielfachheit
$> 0$	$\frac{2}{\sqrt{c}}\left(\frac{\pi}{2} + \pi\nu\right)$	1
	$\frac{2}{\sqrt{c}}\pi\nu$	$2m - 1$
$\leq 0$	keine konjugierten Punkte	

Tabelle 3: Konjugierte Punkte in komplexen Raumformen

Beispiel 2: a) Für die Brennpunkte von  $\mathbb{C}P^k$  bzw.  $\mathbb{R}P^k$  in  $\mathbb{C}P^m$  gilt die folgende Tabelle:

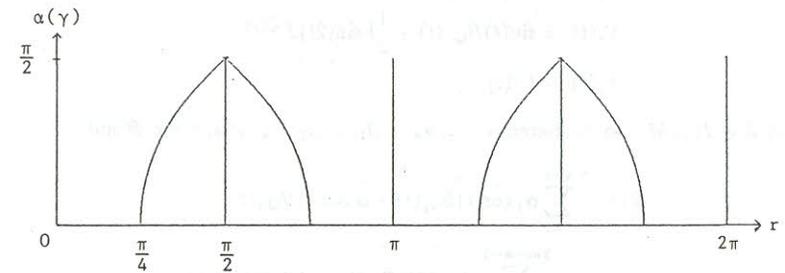
$M$	$r$	Vielfachheit
$\mathbb{C}P^k$	$\frac{\pi}{2} + \pi\nu$	$2k + 1$
$(0 \leq k \leq m-1)$	$\pi\nu$	$2(m-k-1) + 1$
$\mathbb{R}P^k$	$\frac{\pi}{2} + \pi\nu$	$k - 1$
$(1 \leq k \leq m)$	$\pi\nu$	$2m - k - 1$
	$\operatorname{arccot}(\cos(\alpha(\gamma))) + \pi\nu$	1
	$-\operatorname{arccot}(\cos(\alpha(\gamma))) + \pi\nu$	1

Tabelle 4: Brennpunkte von  $\mathbb{C}P^k$  bzw.  $\mathbb{R}P^k$  in  $\mathbb{C}P^m$

Hierbei ist  $\alpha(\gamma) \in [0, \frac{\pi}{2}]$  definiert als der nicht-orientierte Winkel zwischen  $J\dot{\gamma}(0)$  und  $T_{\gamma(0)}\mathbb{R}P^k$  (wobei  $\gamma: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}P^m$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte  $\mathbb{R}P^k$ -normale Geodätische von  $\mathbb{C}P^m$  ist).

b)  $\mathbb{C}H^k (0 \leq k \leq m-1)$  bzw.  $\mathbb{R}H^k (1 \leq k \leq m)$  hat keine Brennpunkte in  $\mathbb{C}H^m$ .

**Anmerkung:** Die Verteilung der Brennpunkte von  $\mathbb{R}P^k$  (ohne ihre Vielfachheiten) in Abhängigkeit von  $\alpha(\gamma)$  läßt sich der folgenden Skizze entnehmen:



**Beweis:** zu a): Die Brennpunkte für  $\mathbb{C}P^k (0 \leq k \leq m-1)$  ergeben sich aus Tabelle 1 mit  $c = 4$ ,  $\lambda = 0$  und  $m_\lambda = 2k = n$ . Für  $\mathbb{R}P^m$  können wir Tabelle 2 mit  $c = 4$ ,  $\lambda = 0 = \alpha$  und  $m_\lambda = m = n$  anwenden.

Seien nun  $M = \mathbb{R}P^k$  ( $1 \leq k \leq m-1$ ) und  $\gamma : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}P^m$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte  $M$ -normale Geodätische von  $\mathbb{C}P^m$ ,  $p = \gamma(0)$ ,  $z = \dot{\gamma}(0)$ . Gilt  $Jz \in \perp_p M$  (bzw.  $Jz \in T_p M$ ), so können wir Tabelle 1 (bzw. Tabelle 2) anwenden; andernfalls ist die Bedingung (K) für  $z$  nicht erfüllt. Wir setzen daher im folgenden  $Jz \notin \perp_p M$  und  $Jz \notin T_p M$  voraus, also  $\alpha(\gamma) \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , und definieren

$$u := \frac{tz}{\|tz\|}, \quad v := \frac{fz}{\|fz\|},$$

sowie

$$a := \langle u, Jz \rangle, \quad b := \langle v, Jz \rangle.$$

$Q : T_p \mathbb{C}P^m \rightarrow (\mathbb{C}z)^\perp$  sei die kanonische Projektion. Es gilt

$$(7) \quad a = \cos(\alpha(\gamma)) \neq 0, \quad b = \sin(\alpha(\gamma)) \neq 0,$$

$$(8) \quad Jz = au + bv,$$

$$(9) \quad Qu = u - aJz = b^2u - abv,$$

$$(10) \quad Qv = v - bJz = a^2v - abu.$$

Sei nun

$$u_1, \dots, u_{k-1}, u_k := u, v_1, \dots, v_{2m-k-2}, v_{2m-k-1} := v, v_{2m-k} := z$$

eine Orthonormalbasis von  $T_p \mathbb{C}P^m$ , so daß  $u_1, \dots, u_k$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$  ist. Wir erhalten die folgende Basis von  $J(\gamma, M)$ :

$$X_j(t) := \cos(t)B_{u_j}(t) \quad (j = 1, \dots, k-1)$$

$$X_u(t) := \cos(t)B_{Qu}(t) + a \cos(2t)J\dot{\gamma}(t)$$

$$Y_j(t) := \sin(t)B_{v_j}(t) \quad (j = 1, \dots, 2m-k-2)$$

$$Y_v(t) := \sin(t)B_{Qv}(t) + \frac{1}{2}b \sin(2t)J\dot{\gamma}(t)$$

$$Y_z(t) := t\dot{\gamma}(t).$$

Ist  $Z \in J(\gamma, M)$ , so existieren  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_1, \dots, \beta_{2m-k-2}, \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \cos(t)B_{u_j}(t) + \alpha \cos(t)B_{Qu}(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{2m-k-2} \beta_j \sin(t)B_{v_j}(t) + \beta \sin(t)B_{Qv}(t) \\ &\quad + (\alpha a \cos(2t) + \frac{1}{2}\beta b \sin(2t))J\dot{\gamma}(t) \\ &\quad + \delta t\dot{\gamma}(t). \end{aligned}$$

1. Fall:  $r = \frac{\pi}{2} + \pi\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ).

Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} 0 = Z(r) &= (-1)^\nu \sum_{j=1}^{2m-k-2} \beta_j B_{v_j}(r) + (-1)^\nu \beta B_{Qv}(r) \\ &\quad - \alpha a J\dot{\gamma}(r) + \delta r \dot{\gamma}(r). \end{aligned}$$

Da  $v_1, \dots, v_{2m-k-2}, Qv, Jz, z$  linear unabhängig sind, gilt dies auch für  $B_{v_1}(r), \dots, B_{v_{2m-k-2}}(r), B_{Qv}(r), J\dot{\gamma}(r), \dot{\gamma}(r)$ . Also gilt  $0 = \beta_1, \dots, \beta_{2m-k-2}, \beta, \alpha, \delta$  und damit

$$\{Z \in J(\gamma, M) \mid Z(r) = 0\} = \text{Spann}\{X_1, \dots, X_{k-1}\}.$$

Nach Satz 4.3 ist daher  $\gamma(r)$  ein Brennpunkt von  $M$  längs  $\gamma$  mit der Vielfachheit  $k-1$ .

2. Fall:  $r = \pi\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}_+$ ).

Analog zum 1. Fall schließt man hier

$$\{Z \in J(\gamma, M) \mid Z(r) = 0\} = \text{Spann}\{Y_1, \dots, Y_{2m-k-2}, Y_v\},$$

d.h.  $\gamma(r)$  ist ein Brennpunkt von  $M$  längs  $\gamma$  mit der Vielfachheit  $2m-k-1$ .

3. Fall:  $r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{N}_+$ .

Mit dem Ansatz  $Z(r) = 0$  folgt  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_1, \dots, \beta_{2m-k-2}, \delta = 0$  und

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \cos(r)B_{Qu}(r) + \beta \sin(r)B_{Qv}(r) \\ &\quad + (\alpha a \cos(2r) + \frac{1}{2}\beta b \sin(2r))J\dot{\gamma}(r). \end{aligned}$$

Mit (8), (9), (10) folgt hieraus

$$0 = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)B_u(r) + (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)B_v(r),$$

wobei

$$\lambda_1 := b^2 \cos(r) + a^2 \cos(2r),$$

$$\lambda_2 := ab \left( \frac{1}{2} \sin(2r) - \sin(r) \right),$$

$$\mu_1 := ab(\cos(2r) - \cos(r)),$$

$$\mu_2 := a^2 \sin(r) + \frac{1}{2}b^2 \sin(2r).$$

$\gamma(r)$  ist daher genau dann ein Brennpunkt von  $M$  längs  $\gamma$ , wenn das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta &= 0 \\ \mu_1 \alpha + \mu_2 \beta &= 0\end{aligned}$$

eine nicht-triviale Lösung  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  besitzt, d.h. wenn

$$(11) \quad \begin{aligned}0 &= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} b^2 \sin(2r) \cos(r) + a^2 \sin(r) \cos(2r) \\ &= \sin(r) (\cos^2(r) - a^2 \sin^2(r)) .\end{aligned}$$

Wegen  $r \notin \frac{\pi}{2} \mathbb{N}_+$  gilt dies genau dann, wenn

$$\cot^2(r) = a^2 = \cos^2(\alpha(\gamma)) .$$

Hieraus folgt nun leicht die Behauptung.

zu b): Der Beweis verläuft analog zum projektiven Fall; bei der Darstellung der Basis für  $J(\gamma, M)$  ersetze man  $\sin$  durch  $\sinh$  und  $\cos$  durch  $\cosh$ . Ferner ist keine Fallunterscheidung nötig; es ist lediglich die entsprechende Rechnung für den 3. Fall mit beliebigem  $r \in \mathbb{R}_+$  durchzuführen. Die entsprechende Gleichung für (11) ist dann

$$0 = \sinh(r) (\cosh^2(r) + a^2 \sinh^2(r)) .$$

Da dies für kein  $r \in \mathbb{R}_+$  gilt, existieren im hyperbolischen Fall keine Brennpunkte.  $\square$

#### 4.4 Die Eigenwerte des Formoperators von Röhrenabbildungen

Seien  $M$  eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  und  $r \in \mathbb{R}_+$ . Wir setzen in diesem Abschnitt stets voraus, daß die Röhrenabbildung  $\Phi: B \rightarrow \bar{M}$  vom Radius  $r$  um  $M$  eine Immersion ist. Offenbar ist  $\Phi$  genau dann eine Immersion, wenn für jede nach der Bogenlänge parametrisierte  $M$ -normale Geodätische  $\gamma$  von  $M$ , die in  $r$  definiert ist,  $\gamma(r)$  kein Brennpunkt von  $M$  längs  $\gamma$  ist. Lokal werden durch  $\Phi$  Hyperflächen von  $\bar{M}$  definiert. Nach Korollar 4.1 ist  $\eta$  ein globales Einheitsnormalenfeld von  $\Phi$ . Der Formoperator  $B$  von  $\Phi$  bezüglich  $\eta$  ist charakterisiert durch die Weingarten-Gleichung

$$\nabla_u \eta = -\Phi_* B u \quad (u \in T_z(\perp^1 M), z \in B) .$$

$B$  ist ein selbstadjungiertes  $(1,1)$ -Tensorfeld auf  $B$ ; die Eigenwerte von  $B$  sind Hauptkrümmungen der durch  $\Phi$  definierten Hyperflächen von  $\bar{M}$ . Der folgende Satz beschreibt die wesentliche Beziehung zwischen den Eigenwerten von  $B$  und  $M$ -Jacobifeldern.

**Satz:** Seien in der soeben beschriebenen Situation  $z \in B$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $0 \neq u \in T_z(\perp^1 M)$ . Ferner sei  $\gamma: [0, r] \rightarrow \bar{M}$  die Geodätische von  $\bar{M}$  mit  $\dot{\gamma}(0) = z$ . Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

(i) Es gilt  $Bu = \mu u$ .

(ii) Für das  $M$ -Jacobifeld  $Y$  längs  $\gamma$  mit  $Y(0) = \tau_* u$  und  $Y'(0) = K^\perp u - A_z \tau_* u$  gilt

$$Y'(r) = -\mu Y(r) .$$

**Beweis:** Nach Theorem 4.1 gilt

$$\mu Y(r) + Y'(r) = \Phi_*(\mu u - Bu) ,$$

womit die Behauptung folgt.  $\square$

**Korollar:** Sei speziell  $\bar{M}$  ein lokal-symmetrischer Raum. Ferner erfülle  $z$  die Bedingung (K) in 4.2. Dann hat  $B$  in  $z$  die folgenden Eigenwerte:

$$(I) \quad \frac{\kappa \sin_\kappa(r) + \lambda \cos_\kappa(r)}{\cos_\kappa(r) - \lambda \sin_\kappa(r)} ,$$

wobei  $\kappa \in \text{Spec}(R_z)$  und  $\lambda \in \text{Spec}(A_z)$  mit  $E_\kappa \cap T_\lambda \neq \{0\}$ ; der zugehörige Eigenraum ist der horizontale Lift von  $(E_\kappa \cap T_\lambda)_{\tau(z)}$  in  $\perp^1 M$ , d.h. genauer

$$\{u \in T_z(\perp^1 M) \mid K^\perp u = 0, \tau_* u \in E_\kappa \cap T_\lambda\} .$$

$$(II) \quad -\cot_\kappa(r) ,$$

wobei  $\kappa \in \text{Spec}(\bar{R}_z | (\perp_{\tau(z)} M) \cap (\mathbb{R}z)^\perp)$ ; der zugehörige Eigenraum ist

$$\{u \in T_z(\perp^1 M) \mid \tau_* u = 0, K^\perp u \in E_\kappa\} .$$

**Anmerkung:** Es gilt

$$\frac{\kappa \sin_\kappa(r) + \lambda \cos_\kappa(r)}{\cos_\kappa(r) - \lambda \sin_\kappa(r)} = \begin{cases} \cot_\kappa(\theta - r) & \text{für } \lambda = \cot_\kappa(\theta) \\ \lambda & \text{für } \lambda^2 + \kappa = 0 \\ \kappa \tan_\kappa(\theta + r) & \text{für } \lambda = \kappa \tan_\kappa(\theta) . \end{cases}$$

Ist  $\kappa > 0$ , so existieren stets  $\theta, \tilde{\theta} \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda = \cot_\kappa(\theta)$  und  $\lambda = \kappa \tan_\kappa(\tilde{\theta})$ ; ist  $\kappa \leq 0$ , so existiert genau dann ein  $\theta \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda = \cot_\kappa(\theta)$  bzw.  $\lambda = \kappa \tan_\kappa(\theta)$ , wenn  $\lambda^2 + \kappa > 0$  bzw.  $\lambda^2 + \kappa < 0$ .

*Beweis:* Das Korollar folgt aus dem vorhergehenden Satz mit der expliziten Darstellung der "Basis- $M$ -Jacobifelder" in 4.2. Beachte auch, daß nach Korollar 4.3 für  $\kappa, \lambda$  wie in (I) stets  $\cos_\kappa(r) - \lambda \sin_\kappa(r) \neq 0$  sowie für  $\kappa$  wie in (II) stets  $\sin_\kappa(r) \neq 0$  gilt. Die Anmerkung läßt sich mit elementaren Rechnungen beweisen.  $\square$

**Beispiel 1:** Seien  $M \in \{\mathbb{C}P^k, \mathbb{R}P^m\}$  und  $\overline{M} = \mathbb{C}P^m$  bzw.  $M \in \{\mathbb{C}H^k, \mathbb{R}H^m\}$  und  $\overline{M} = \mathbb{C}H^m$ ,  $0 \leq k \leq m-1$ . Für  $r$  wie in der nachfolgenden Tabelle ist dann die Röhrenabbildung  $\Phi$  vom Radius  $r$  um  $M$  eine injektive Immersion, die auf ganz  $\perp^1 M$  definiert ist, und  $N := \Phi(\perp^1 M)$  eine orientierbare reguläre reelle Hyperfläche von  $\overline{M}$ , die sogenannte Röhre vom Radius  $r$  um  $M$ . Durch  $\eta = \xi \circ \Phi$  wird auf  $N$  ein globales Einheitsnormalenfeld  $\xi$  definiert. Die Hauptkrümmungen von  $N$  bezüglich  $\xi$  sowie deren Vielfachheiten und Hauptkrümmungsrichtungen sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

$M$	$r$	Hauptkrümmung	Vielfachheit	Hauptkrümmungsrichtung
$\mathbb{C}P^k$	$r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{N}_+$	$\tan(r)$	$2k$	horizontal
	$r \in \mathbb{R}_+$	$-\cot(r)$	$2(m-k-1)$	vertikal, orthogonal zu $J\xi$
		$-2\cot(2r)$	$1$	$J\xi$
$\mathbb{C}H^k$	$r \in \mathbb{R}_+$	$-\tanh(r)$	$2k$	horizontal
		$-\coth(r)$	$2(m-k-1)$	vertikal, orthogonal zu $J\xi$
		$-2\coth(2r)$	$1$	$J\xi$
$\mathbb{R}P^m$	$r \notin \frac{\pi}{4}\mathbb{N}_+$	$\tan(r)$	$m-1$	horizontal, orthogonal zu $J\xi$
	$r \in \mathbb{R}_+$	$-\cot(r)$	$m-1$	vertikal
		$2\tan(2r)$	$1$	$J\xi$
$\mathbb{R}H^m$	$r \in \mathbb{R}_+$	$-\tanh(r)$	$m-1$	horizontal, orthogonal zu $J\xi$
		$-\coth(r)$	$m-1$	vertikal
		$-2\tanh(2r)$	$1$	$J\xi$

Tabelle 5: Hauptkrümmungen der Röhren um  $\mathbb{C}P^k, \mathbb{C}H^k, \mathbb{R}P^m, \mathbb{R}H^m$

Hierbei heißt ein Vektor aus  $T_{\Phi(z)}N$  *horizontal* (bzw. *vertikal*), wenn er durch Parallelverschiebung eines zu  $M$  in  $\tau(z)$  tangentialen (bzw. normalen) Vektors längs der Geodätischen

$$\gamma_z : [0, r] \rightarrow \overline{M}, t \mapsto \exp^\perp(tz)$$

von  $\overline{M}$  entsteht. Da der Tangentialraum von  $M$  in  $\tau(z)$  für  $M \in \{\mathbb{C}P^k, \mathbb{C}H^k\}$  bzw.  $M \in \{\mathbb{R}P^m, \mathbb{R}H^m\}$  komplex bzw. total-reell ist, können wir auch folgern, daß die zu  $J\xi_{\Phi(z)}$  orthogonalen Eigenräume des Formoperators von  $N$  bezüglich  $\xi_{\Phi(z)}$  komplex bzw. total-reell sind.

*Beweis:* Vorbemerkung: Für  $z \in \perp^1 M$  gilt

$$\begin{aligned} \gamma_z(s) &= \pi(\cos(s)p + \sin(s)v) & , \text{ falls } \overline{M} = \mathbb{C}P^m \\ \gamma_z(s) &= \pi(\cosh(s)p + \sinh(s)v) & , \text{ falls } \overline{M} = \mathbb{C}H^m \end{aligned}$$

wobei  $\pi : \overline{N} \rightarrow \overline{M}$  die Hopf-Abbildung auf  $\overline{M}$ ,  $p \in \pi^{-1}(\{\tau(z)\})$  und  $v \in \mathbb{C}^{m+1}$  der (bis auf die kanonische Isomorphie  $T_p \overline{N} \subset T_p \mathbb{C}^{m+1} \approx \mathbb{C}^{m+1}$ ) horizontale Lift von  $z$  in  $p$  ist. In diesem Sinne werden wir in diesem Beweis auch von horizontalen Liften sprechen.

Mit Beispiel 2 in 4.3 folgt, daß  $\Phi$  eine Immersion ist für  $r$  wie in Tabelle 5.

Für  $\mathbb{C}P^k$ : Seien  $z, \bar{z} \in \perp^1 M$  und  $p, \bar{p}, v, \bar{v}$  gemäß Vorbemerkung. Ferner seien  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $s, \bar{s} \in ]\frac{\pi}{2}\nu, \frac{\pi}{2}(\nu+1)[$  und es gelte  $\gamma_z(s) = \gamma_{\bar{z}}(\bar{s})$ . Dann existiert ein  $\lambda \in S^1$  mit

$$\cos(s)p\lambda + \sin(s)v\lambda = \cos(\bar{s})\bar{p} + \sin(\bar{s})\bar{v} .$$

Wegen  $p, \bar{p} \in S^{2k+1} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^{m+1}$  und  $v, \bar{v} \in \{0\} \times S^{2(m-k-1)+1} \subset \mathbb{C}^{m+1}$  folgt hieraus

$$\cos(s)p\lambda = \cos(\bar{s})\bar{p} \quad \text{und} \quad \sin(s)v\lambda = \sin(\bar{s})\bar{v}$$

und damit

$$|\cos(s)| = |\cos(\bar{s})| \quad \text{und} \quad |\sin(s)| = |\sin(\bar{s})| .$$

Mit der Voraussetzung über  $s$  und  $\bar{s}$  folgt hieraus  $s = \bar{s}$ . Somit gilt  $p\lambda = \bar{p}$  und  $v\lambda = \bar{v}$ . Da  $v$  der horizontale Lift von  $z$  in  $p$  ist, ist  $v\lambda = \bar{v}$  der horizontale Lift von  $z$  in  $p\lambda = \bar{p}$ , woraus  $z = \bar{z}$  folgt. Wir erhalten somit, daß

$$\exp^\perp|U : U \rightarrow \mathbb{C}P^m \text{ mit } U := \{z \in \perp M \mid \|z\| \in ]\frac{\pi}{2}\nu, \frac{\pi}{2}(\nu+1)[\}$$

ein Diffeomorphismus in  $\mathbb{C}P^m$  ist.

Sei nun  $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{N}$ . Da  $\perp^1 M$  eine reguläre Hyperfläche von  $\perp M$  ist, ist  $N = \Phi(\perp^1 M) = \exp^\perp(\perp^1 M)$  eine reguläre reelle Hyperfläche von  $\mathbb{C}P^m$  und  $\Phi : \perp^1 M \rightarrow \mathbb{C}P^m$  eine injektive Immersion. Durch  $\eta := \xi \circ \Phi$  wird dann auf  $N$

ein globales Einheitsnormalenfeld  $\xi$  definiert. Seien  $\bar{A}$  der Formoperator von  $N$  bezüglich  $\xi$  und  $v \in T_{\Phi(z)}N, z \in \perp^1 M$ . Dann existiert genau ein  $u \in T_z(\perp^1 M)$  mit  $\Phi_* u = v$  und es gilt

$$\bar{A}v = -\bar{\nabla}_v \xi = -\bar{\nabla}_{\Phi_* u} \xi = -\bar{\nabla}_u \eta = \Phi_* B u .$$

$v$  ist daher genau dann eine Hauptkrümmungsrichtung von  $N$  in  $\Phi(z)$  zur Hauptkrümmung  $\mu$ , wenn  $u$  ein Eigenvektor von  $B$  in  $z$  zum Eigenwert  $\mu$  ist. Mit Korollar 4.4 sowie Lemma 4.2 lassen sich daher leicht die Hauptkrümmungen von  $N$  bezüglich  $\xi$  und deren Vielfachheiten berechnen. Ist  $Y$  das  $M$ -Jacobifeld längs  $\gamma_z$  mit  $Y(0) = \tau_* u$  und  $Y'(0) = K^\perp u - A_z \tau_* u$ , so gilt nach Theorem 4.1  $v = \Phi_* u = Y(r)$ . Aufgrund der speziellen Gestalt der  $M$ -Jacobifelder in  $\mathbb{C}P^m$  folgt schließlich mit Korollar 4.4 auch die Behauptung über die Hauptkrümmungsrichtungen.

Für  $\mathbb{C}H^k$ : Der Beweis verläuft analog zum projektiven Fall. Man verwendet hier die entsprechende Darstellung der Geodätischen  $\gamma_z$  in  $\mathbb{C}H^m$  und erhält, daß  $\exp^\perp : \perp M \rightarrow \mathbb{C}H^m$  ein Diffeomorphismus ist.

Für  $\mathbb{R}P^m$ : Seien  $z, \bar{z} \in \perp^1 M$  und  $p, \bar{p}, v, \bar{v}$  gemäß Vorbemerkung. Es gilt  $p, \bar{p} \in S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  und  $v, \bar{v} \in iS^m \subset i\mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{C}^{m+1}$  sowie  $\langle p, iv \rangle = 0 = \langle \bar{p}, i\bar{v} \rangle$  (weil  $v$  bzw.  $\bar{v}$  bezüglich  $\pi$  horizontal sind). Ferner seien  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $s, \bar{s} \in ]\frac{\pi}{4}\nu, \frac{\pi}{4}(\nu+1)[$  und es gelte  $\gamma_z(s) = \gamma_{\bar{z}}(\bar{s})$ . Dann existiert ein  $\lambda \in S^1$  mit

$$\cos(s)p\lambda + \sin(s)v\lambda = \cos(\bar{s})\bar{p} + \sin(\bar{s})\bar{v} .$$

Seien nun

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 + i\lambda_2 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}) , \\ v &= iv_0 \quad , \quad \bar{v} = i\bar{v}_0 \quad (v_0, \bar{v}_0 \in S^m) , \\ a_1 &:= \cos(s)\lambda_1 p - \sin(s)\lambda_2 v_0 \quad \in \mathbb{R}^{m+1} , \\ a_2 &:= \cos(s)\lambda_2 p + \sin(s)\lambda_1 v_0 \quad \in \mathbb{R}^{m+1} . \end{aligned}$$

Dann gilt

$$a_1 + ia_2 = \cos(\bar{s})\bar{p} + i\sin(\bar{s})\bar{v}_0 .$$

Wegen  $\langle \bar{p}, \bar{v}_0 \rangle = 0 = \langle p, v_0 \rangle$  folgt hieraus

$$0 = \langle a_1, a_2 \rangle = \lambda_1 \lambda_2 (\cos^2(s) - \sin^2(s)) .$$

Mit der Voraussetzung über  $s$  erhalten wir somit  $\lambda \in \{1, -1, i, -i\}$ . Nehmen wir  $\lambda \in \{i, -i\}$  an, so folgt

$$|\cos(s)| = |\sin(\bar{s})| \quad \text{und} \quad |\sin(s)| = |\cos(\bar{s})| .$$

Dies ist aber aufgrund der Voraussetzung über  $s$  und  $\bar{s}$  nicht möglich. Also gilt  $\lambda \in \{1, -1\}$ , woraus leicht  $s = \bar{s}$  und dann auch  $z = \bar{z}$  folgt. Somit erhalten wir, daß

$$\exp^\perp|U : U \rightarrow \mathbb{C}P^m \quad \text{mit} \quad U := \{z \in \perp M \mid \|z\| \in ]\frac{\pi}{4}\nu, \frac{\pi}{4}(\nu+1)[\}$$

ein Diffeomorphismus in  $\mathbb{C}P^m$  ist. Die weitere Argumentation ist analog zum Fall  $\mathbb{C}P^k$ .

Für  $\mathbb{R}H^m$ : Auch hier ist der Beweis analog zum projektiven Fall durchführbar und man erhält, daß  $\exp^\perp : \perp M \rightarrow \mathbb{C}H^m$  ein Diffeomorphismus ist.  $\square$

**Beispiel 2:** Mit Korollar 4.4 lassen sich die Hauptkrümmungen von geodätischen Hypersphären in lokal-symmetrischen Räumen  $\bar{M}$  mit ihren Vielfachheiten und Eigenräumen explizit berechnen, sofern man den Krümmungstensor von  $\bar{M}$  kennt. Speziell für komplexe Raumformen erhält man:

Sei  $M$  eine geodätische Hypersphäre vom Radius  $r$  in einer  $m$ -dimensionalen komplexen Raumform der holomorphen Schnittkrümmung  $c \neq 0$ . Dann hat  $M$  die beiden verschiedenen konstanten Hauptkrümmungen  $-\cot_c(r)$  und  $-\cot_{c/4}(r)$  mit den Vielfachheiten 1 und  $2m-2$ . Das Vektorbündel der Eigenräume bezüglich  $-\cot_c(r)$  ist  $J(\perp M)$ .

*Beweis:* Man wende Lemma 4.2 und Korollar 4.4 mit  $M = \{p\}$  an.  $\square$

#### 4.5 Parallel- und Fokalabbildungen von Hyperflächen

Seien  $M$  eine Hyperfläche einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$  und  $\xi$  ein globales Einheitsnormalenfeld auf  $M$ . Den Formoperator von  $M$  bezüglich  $\xi$  bezeichnen wir mit  $A$ . In dieser Situation ist es sinnvoll, einige Definitionen aus Abschnitt 4.1 zu modifizieren:

$\gamma_p : [0, b[ \rightarrow \bar{M}$  bezeichne die maximale Geodätische von  $\bar{M}$  mit

$$\gamma_p(0) = p \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}_p(0) = \xi_p, \quad p \in M .$$

Ferner definieren wir für festes  $r \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_r := \{p \in M \mid \gamma_p \text{ ist definiert in } r\} ,$$

$$\Phi := \Phi_r : \mathcal{B} \rightarrow \bar{M}, p \mapsto \gamma_p(r) = \exp^\perp(r\xi_p) ,$$

$$\eta := \eta^r \text{ sei das Vektorfeld längs } \Phi \text{ mit } \eta_p = \dot{\gamma}_p(r) , \quad p \in \mathcal{B} .$$

Analog zu Theorem 4.1 gilt

**Theorem:** Seien  $M$  eine Hyperfläche einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$ ,  $p \in M$  und  $v \in T_p M$ . Ist  $Y$  das  $M$ -Jacobifeld längs  $\gamma_p$  mit  $Y(0) = v$  und  $Y'(0) = -Av$ , so gilt für jedes  $r \in ]0, b[$

$$Y(r) = \Phi_{r*} v \quad \text{und} \quad Y'(r) = \bar{\nabla}_v \eta^r .$$

Sei nun  $r \in \mathbb{R}_+$  fest gewählt. Analog zu Korollar 4.1 zeigt man, daß  $\eta$  im dortigen Sinne ein "Einheitsnormalenfeld" von  $\Phi$  ist.

Wir setzen im folgenden voraus, daß  $\Phi$  eine Submersion auf eine reguläre Untermannigfaltigkeit  $N$  von  $\bar{M}$  ist.

(Setzt man allgemeiner voraus, daß  $\Phi$  konstanten Rang hat, so kann man lokal stets diese Situation herstellen.) Ist  $\dim N < \dim M$  (bzw.  $\dim N = \dim M$ ), so heißt  $N$  eine *Fokalfläche* (bzw. *Parallelfläche*) von  $M$  und  $\Phi$  die *Fokalabbildung* (bzw. *Parallelabbildung*) von  $M$  auf  $N$ . In dieser Situation gilt:

**Satz:** Seien  $M$  eine Hyperfläche einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$ ,  $\Phi : B \rightarrow N$  Submersion (s.o.),  $q \in N$ ,  $L := \Phi^{-1}(\{q\})$  und  $p \in L$ . Mit  $\perp L$  (bzw.  $\perp N$ ) bezeichnen wir das Normalenbündel von  $L$  in  $M$  (bzw. von  $N$  in  $\bar{M}$ ). Dann gilt

(i)  $\eta(L)$  ist offen in  $\perp_q N$ .

(ii) Für  $v \in T_p M$  sei  $Y_v$  jeweils das  $M$ -Jacobifeld längs  $\gamma_p$  mit  $Y_v(0) = v$  und  $Y'_v(0) = -Av$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad T_q N &= \{Y_v(r) \mid v \in \perp_p L\} , \\ \perp_q N &= \{Y'_v(r) \mid v \in T_p L\} \oplus \mathbb{R}\eta_p . \end{aligned}$$

b) Sei  $0 \neq v \in \perp_p L$ . Dann gilt:  $Y_v(r)$  ist genau dann eine Hauptkrümmungsrichtung von  $N$  bezüglich  $\eta_p$  zur Hauptkrümmung  $\mu \in \mathbb{R}$ , wenn

$$(Y'_v(r))^T = -\mu Y_v(r)$$

gilt, wobei  $(Y'_v(r))^T$  der zu  $N$  tangente Anteil von  $Y'_v(r)$  ist.

**Anmerkung:** Sei  $B$  der Formoperator von  $N$  in  $q$ . Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von  $B_z$  hängen analytisch von  $z \in \perp_q N$  ab. (i) impliziert daher, daß  $B$  bereits vollständig durch die Werte des Formoperators in den Richtungen  $\eta_p$ ,  $p \in L$ , beschrieben wird.

**Beweis:** zu (i): Wir untersuchen das Differential von  $\eta|L : L \rightarrow \perp_q N$ . Nach Theorem 4.5 gilt für jedes  $v \in T_p L$

$$\begin{aligned} Y_v(r) &= \Phi_* v = 0 , \\ Y'_v(r) &= \bar{\nabla}_v \eta = d_p(\eta|L)(v) . \end{aligned}$$

Falls  $d_p(\eta|L)(v) = 0$  gilt, folgt daher  $Y_v = 0$  und damit auch  $v = 0$ . Somit gilt  $d_p(\eta|L)(v) = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$ . Die Abbildung  $\eta|L : L \rightarrow \perp_q N$  ist also eine Immersion. Wegen  $(\eta|L)(L) \subset \perp_q N$  und  $\dim L = \dim \perp_q N$  ist daher  $\eta|L : L \rightarrow \perp_q N$  ein lokaler Diffeomorphismus, womit (i) folgt.

zu (ii): Wegen  $\Phi_* v = 0$  für alle  $v \in T_p L$  gilt mit Theorem 4.5

$$T_q N = \{\Phi_* v \mid v \in \perp_p L\} = \{Y_v(r) \mid v \in \perp_p L\} .$$

Für jedes  $v \in T_p L$  gilt  $0 = \langle \bar{\nabla}_v \eta, \eta_p \rangle = \langle d_p(\eta|L)(v), \eta_p \rangle$ ; und da außerdem  $\eta|L : L \rightarrow \perp_q N$  ein lokaler Diffeomorphismus ist sowie  $\eta_p \in \perp_q N$  gilt, folgt

$$\perp_q N = d_p(\eta|L)(T_p L) \oplus \mathbb{R}\eta_p = \{Y'_v(r) \mid v \in T_p L\} \oplus \mathbb{R}\eta_p .$$

Schließlich gilt für den Formoperator  $B$  von  $N$  in  $q$  mit  $v \in \perp_p L$

$$(Y'_v(r))^T = (\bar{\nabla}_v \eta)^T = -B_{\eta_p} \Phi_* v = -B_{\eta_p} Y_v(r) ,$$

womit die Behauptung folgt. □

Für  $p \in M$  sei  $\bar{R}_p := \bar{R}(\cdot, \xi_p)\xi_p$ . Offenbar gilt  $\bar{R}_p(T_p M) \subset T_p M$  für jedes  $p \in M$ . Die der Bedingung (K) in 4.2 entsprechende Bedingung ist daher  $R_p \circ A_p = A_p \circ R_p$ , wobei  $R_p := \bar{R}_p|T_p M$ . Ist  $\bar{M}$  eine nicht-euklidische komplexe Raumform, so gilt nach Lemma 4.2 die Bedingung  $R_p \circ A_p = A_p \circ R_p$  genau dann, wenn  $J\xi_p$  eine Hauptkrümmungsrichtung von  $M$  in  $p$  ist. Für  $\kappa \in \text{Spec}(R_p)$  bzw.  $\lambda \in \text{Spec}(A_p)$  bezeichnen wir mit  $E_\kappa$  bzw.  $T_\lambda$  den zugehörigen Eigenraum und setzen  $E_\kappa^\lambda := E_\kappa \cap T_\lambda$ .

**Korollar:** Seien  $M$  eine Hyperfläche eines lokal-symmetrischen Raumes  $\bar{M}$  und  $p \in M$ . Es gelte  $R_p \circ A_p = A_p \circ R_p$ . Wir definieren:

$$\Omega := \{(\kappa, \lambda) \mid \kappa \in \text{Spec}(R_p), \lambda \in \text{Spec}(A_p), E_\kappa^\lambda \neq \{0\}\},$$

$$\Omega_1 := \{(\kappa, \lambda) \in \Omega \mid \cot_\kappa(r) = \lambda\},$$

$$\Omega_2 := \{(\kappa, \lambda) \in \Omega \mid \cot_\kappa(r) \neq \lambda\}.$$

(Wie in der Funktionentheorie setzen wir  $\cot_\kappa(r) = \infty$ , falls  $\sin_\kappa(r) = 0$  ist.) Dann gilt in der Situation von Satz 4.5 mit  $q := \Phi(p)$

$$T_p L = \bigoplus_{(\kappa, \lambda) \in \Omega_1} E_\kappa^\lambda ; \quad \perp_p L = \bigoplus_{(\kappa, \lambda) \in \Omega_2} E_\kappa^\lambda .$$

$N$  ist also genau dann eine Fokalfläche (bzw. Parallelfläche) von  $M$ , wenn  $\Omega_1 \neq \emptyset$  (bzw.  $\Omega_1 = \emptyset$ ) ist.  $T_q N$  (bzw.  $\perp_q N$ ) erhält man durch Parallelverschiebung von  $\perp_p L$  (bzw.  $T_p L \oplus \mathbb{R}\xi_p$ ) längs  $\gamma_p$  von  $p$  nach  $q$ . Die Hauptkrümmungen von  $N$  bezüglich  $\eta_p$  sind

$$\frac{\kappa \sin_\kappa(r) + \lambda \cos_\kappa(r)}{\cos_\kappa(r) - \lambda \sin_\kappa(r)} \quad \text{mit } (\kappa, \lambda) \in \Omega_2 ;$$

den zugehörigen Eigenraum erhält man durch Parallelverschiebung von  $E_\kappa^\lambda$  längs  $\gamma_p$  von  $p$  nach  $q$ .

**Anmerkung:** Es kann vorkommen, daß verschiedene Elemente aus  $\Omega_2$  dieselbe Hauptkrümmung  $\mu$  von  $N$  induzieren. In diesem Fall erhält man den Eigenraum von  $\mu$  als direkte Summe der entsprechenden parallel verschobenen Räume  $E_\kappa^\lambda$ .

**Beweis:** Die Behauptung folgt mit Theorem 4.5 und Satz 4.5 sowie mit der expliziten Darstellung der "Basis- $M$ -Jacobifelder" längs  $\gamma_p$  gemäß 4.2.  $\square$

**Beispiel 1:** a) Sei  $M$  die Röhre vom Radius  $s \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  um  $\mathbb{C}P^k$  in  $\mathbb{C}P^m$ ,  $0 \leq k \leq m-1$ . Seien  $\xi$  das globale Einheitsnormalenfeld auf  $M$  gemäß Beispiel 1 in 4.4 und  $\pi : S^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}P^m$  die Hopf-Abbildung auf  $\mathbb{C}P^m$ . Dann gilt für  $r \in \mathbb{R}_+$

$$\Phi_r(M) = \{ \pi(\cos(r+s)p + \sin(r+s)v) \mid p \in S^{2k+1} \times \{0\} \subset S^{2m+1} \\ v \in \{0\} \times S^{2(m-k-1)+1} \subset S^{2m+1} \}.$$

Mit dieser Darstellung von  $\Phi_r(M)$  kann man bereits die Fokalflächen von  $M$  (in Richtung  $\xi$ ) erkennen:

$$\pi(\{0\} \times S^{2(m-k-1)+1}) \approx \mathbb{C}P^{m-k-1} \quad \text{für } r \in \pi\mathbb{N} + \frac{\pi}{2} - s, \\ \mathbb{C}P^k \quad \text{für } r \in \pi\mathbb{N}_+ - s.$$

Um dieses anschauliche Auffinden der Fokalflächen von  $M$  exakt zu begründen, wollen wir unsere bisherigen Resultate an diesem Beispiel "testen". Nach Beispiel 1 in 4.4 hat  $M$  die drei konstanten Hauptkrümmungen

$$\begin{aligned} \lambda &= \tan(s) &= \cot\left(\frac{\pi}{2} - s\right), \\ \mu &= -\cot(s) &= \cot(-s), \\ \alpha &= -2\cot(2s) &= 2\cot\left(2\left(\frac{\pi}{2} - s\right)\right), \end{aligned}$$

mit den Vielfachheiten

$$m_\lambda = 2k, \quad m_\mu = 2(m-k-1), \quad m_\alpha = 1.$$

Mit Korollar 4.3 folgt leicht, daß  $\Phi_r$  konstanten Rang hat; genauer gilt

$$\text{rg } \Phi_r = \begin{cases} 2(m-k-1) & \text{für } r \in \pi\mathbb{N} + \frac{\pi}{2} - s \\ 2k & \text{für } r \in \pi\mathbb{N}_+ - s \\ 2m-1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Man sieht, daß nur für  $r \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}_+ - s$  Fokalflächen von  $M$  existieren. Daher sei im folgenden  $r \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}_+ - s$ . Dann hat man (lokal) eine Fokalabbildung von  $M$  auf eine reguläre Untermannigfaltigkeit  $N$  von  $\mathbb{C}P^m$ . Wir wollen nun die Geometrie von  $N$  etwas genauer mit dem vorhergehenden Korollar untersuchen. In jedem Punkt  $p \in M$  ist  $J\xi_p$  eine Hauptkrümmungsrichtung von  $M$  (vgl. Beispiel 1 in 4.4). Somit gilt  $R_p \circ A_p = A_p \circ R_p$  für jedes  $p \in M$ . Wir können daher das Korollar anwenden und erhalten mit den dortigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(1, \lambda), (1, \mu), (4, \alpha)\}, \\ \Omega_1 &= \begin{cases} \{(1, \lambda), (4, \alpha)\} & \text{für } r \in \pi\mathbb{N} + \frac{\pi}{2} - s \\ \{(1, \mu), (4, \alpha)\} & \text{für } r \in \pi\mathbb{N}_+ - s \end{cases}, \\ \Omega_2 &= \begin{cases} \{(1, \mu)\} & \text{für } r \in \pi\mathbb{N} + \frac{\pi}{2} - s \\ \{(1, \lambda)\} & \text{für } r \in \pi\mathbb{N}_+ - s \end{cases}. \end{aligned}$$

Mit dem Korollar können wir nun die Hauptkrümmungen von  $N$  berechnen und erhalten (beachte die Anmerkung zu Satz 4.5), daß  $N$  total-geodätisch in  $\mathbb{C}P^m$  ist. Weiterhin entsteht  $T_q N$  ( $q = \Phi_r(p)$ ,  $p \in M$ ) durch Parallelverschiebung des Eigenraumes

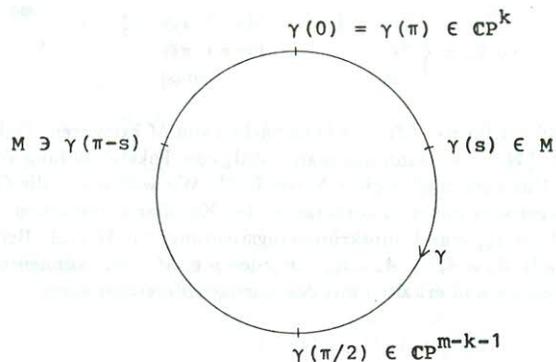
$$\begin{aligned} T_\mu & \text{ für } r \in \pi\mathbb{N} + \frac{\pi}{2} - s, \\ T_\lambda & \text{ für } r \in \pi\mathbb{N}_+ - s \end{aligned}$$

längs  $\gamma_p$ . Da  $T_\lambda$  und  $T_\mu$  komplex sind (vgl. Beispiel 1 in 4.4), ist  $N$  komplex. Insgesamt haben wir somit gezeigt, daß  $N$  eine komplexe total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  der komplexen Dimension

$$\begin{aligned} m-k-1 & \text{ für } r \in \pi\mathbb{N} + \frac{\pi}{2} - s, \\ k & \text{ für } r \in \pi\mathbb{N}_+ - s \end{aligned}$$

ist. Mit der Klassifikation der total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{C}P^m$  (vgl. 2.4) folgt schließlich die Behauptung.

Die nachfolgende "Uhr" soll ein wenig zum besseren Verständnis der Familie der Röhren um  $\mathbb{C}P^k$  beitragen.



Diese "Uhr" ist folgendermaßen zu interpretieren.  $\gamma$  ist eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische von  $\mathbb{C}P^m$  mit  $\gamma(0) \in \mathbb{C}P^k$ , die orthogonal zu  $\mathbb{C}P^k$  startet. Zum Zeitpunkt  $s \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  durchstößt  $\gamma$  gerade die Röhre  $M$  vom Radius  $s$  um  $\mathbb{C}P^k$ . Zur Zeit  $\frac{\pi}{2}$  wird die Fokalfäche  $\mathbb{C}P^{m-k-1}$  erreicht.  $M$  wird dann noch einmal, nämlich zum Zeitpunkt  $\pi-s$ , von  $\gamma$  in einem anderen Punkt durchstoßen. Schließlich gelangt man zur Zeit  $\pi$  wieder zum Ausgangspunkt in  $\mathbb{C}P^k$  zurück. Da  $\gamma$   $\pi$ -periodisch ist, wiederholt sich dieser Prozeß mit der Periode  $\pi$ . Bei einem Umlauf von  $\gamma$  werden alle Röhren um  $\mathbb{C}P^k$  in zwei verschiedenen Punkten und die beiden Fokalfächen in je einem Punkt orthogonal durchstoßen. Diese "Uhr" gilt für alle Geodätischen von  $\mathbb{C}P^m$  mit den angegebenen Eigenschaften.

b) Die Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{C}H^k$  ( $0 \leq k \leq m-1$ ) in  $\mathbb{C}H^m$  hat nur eine Fokalfäche, nämlich  $\mathbb{C}H^k$  selbst (beweist man analog zu a)).

**Beispiel 2:** a) Seien  $M$  die Röhre vom Radius  $s \in ]0, \frac{\pi}{4}[$  um  $\mathbb{R}P^m$  in  $\mathbb{C}P^m$ ,  $\xi$  das globale Einheitsnormalenfeld auf  $M$  gemäß Beispiel 1 in 4.4 und  $\pi: S^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}P^m$  die Hopf-Abbildung auf  $\mathbb{C}P^m$ . Dann gilt für  $r \in \mathbb{R}_+$

$$\Phi_r(M) = \{ \pi(\cos(r+s)p + i \sin(r+s)v) \mid p, v \in S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{C}^{m+1}, \langle p, v \rangle = 0 \}.$$

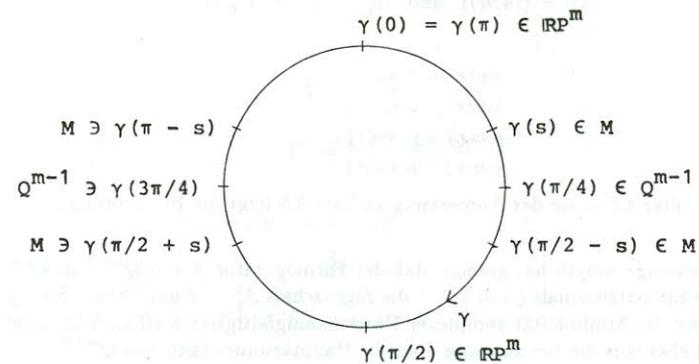
Für  $r = \frac{\pi}{4} - s$  erhält man mit 2.2 (iii) a)

$$\begin{aligned} \Phi_r(M) &= \{ \pi(\frac{1}{\sqrt{2}}(p + iv)) \mid p, v \in S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}, \langle p, v \rangle = 0 \} \\ &= Q^{m-1} \text{ (komplexe Quadrik in } \mathbb{C}P^m \text{)}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man die folgenden Fokalfächen von  $M$  (in Richtung  $\xi$ ):

$$\begin{aligned} Q^{m-1} &\text{ für } r \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{N} - s, \\ \mathbb{R}P^m &\text{ für } r \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}_+ - s. \end{aligned}$$

Eine exakte Begründung hierfür kann man wie in Beispiel 1 a) herleiten. Auch hier wollen wir zum besseren Verständnis eine "Uhr" aufzeichnen, die analog zu Beispiel 1 zu interpretieren ist.



Jede Röhre um  $\mathbb{R}P^m$  wird bei einem Umlauf von  $\gamma$  in vier verschiedenen Punkten durchstoßen (z.B.  $M$  zu den Zeitpunkten  $s, \frac{\pi}{2} - s, \frac{\pi}{2} + s$  und  $\pi - s$ ), während die beiden Fokalfächen jeweils in zwei verschiedenen Punkten getroffen werden.

b) Die Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{R}H^m$  in  $\mathbb{C}H^m$  hat nur  $\mathbb{R}H^m$  selbst als Fokalfäche (beweist man analog zu a)).

**Anmerkung:** Cecil hat gezeigt, daß die Menge aller Fokalfächen von  $Q^{m-1}$  in  $\mathbb{C}P^m$  gleich  $\mathbb{R}P^m$  ist ([Ce], S.28).

**Beispiel 3:** Die komplexe Quadrik  $Q^{m-1}$  in  $\mathbb{C}P^m$  hat bezüglich jeder Einheitsnormalen die beiden Hauptkrümmungen  $+1$  und  $-1$  mit den Vielfachen  $m-1$ ; die entsprechenden Eigenräume sind total-reell.

*Beweis:* Seien  $s \in ]0, \frac{\pi}{4}[$ ,  $M$  die Röhre vom Radius  $s$  um  $\mathbb{R}P^m$  in  $\mathbb{C}P^m$  und  $\xi$  das globale Einheitsnormalenfeld auf  $M$  gemäß Beispiel 1 in 4.4. Für  $r := \frac{\pi}{4} - s$  ist  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{C}P^m$  nach Beispiel 2 eine surjektive Submersion auf  $Q^{m-1}$ . Nun hat  $M$  nach Beispiel 1 in 4.4 die Hauptkrümmungen

$$\begin{aligned} \lambda &= \tan(s) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + r\right) \quad (\text{Vielfachheit } m-1), \\ \mu &= -\cot(s) = \cot\left(\frac{3\pi}{4} + r\right) \quad (\text{Vielfachheit } m-1), \\ \alpha &= 2 \tan(2s) = 2 \cot(2r) \quad (\text{Vielfachheit } 1). \end{aligned}$$

Die Eigenräume zu  $\lambda$  und  $\mu$  sind total-reell und es gilt  $T_\alpha = \mathbb{R}J\xi$ . Mit den Bezeichnungen aus Korollar 4.5 gilt dann

$$\Omega_1 = \{(4, \alpha)\} \quad \text{und} \quad \Omega_2 = \{(1, \lambda), (1, \mu)\}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\sin(r) + \lambda \cos(r)}{\cos(r) - \lambda \sin(r)} &= 1, \\ \frac{\sin(r) + \mu \cos(r)}{\cos(r) - \mu \sin(r)} &= -1. \end{aligned}$$

Mit Korollar 4.5 sowie der Anmerkung zu Satz 4.5 folgt die Behauptung.  $\square$

**Anmerkung:** Smyth hat gezeigt, daß der Formoperator  $A$  von  $Q^{m-1}$  in  $\mathbb{C}P^m$  für jede Einheitsnormale  $\xi$  von  $Q^{m-1}$  die Eigenschaft  $A_\xi^2 = \text{id}$  hat ([Sm2], S.646). Aufgrund der Minimalität komplexer Untermannigfaltigkeiten ([La], S.36) folgt hieraus ebenfalls die Behauptung über die Hauptkrümmungen von  $Q^{m-1}$ .

## §5: Reelle Hyperflächen von komplexen Raumformen

### 5.1 Allgemeines

Seien  $M$  eine orientierbare reelle Hyperfläche einer komplexen Raumform  $\bar{M}$  der holomorphen Schnittkrümmung  $c$  und  $\xi$  ein globales Einheitsnormalenfeld auf  $M$ . Mit  $A$  bezeichnen wir den Formoperator von  $M$  bezüglich  $\xi$ ; für weitere Bezeichnungen siehe 2.1. Wir definieren

$$U := -J\xi$$

und bezeichnen mit  $\mathcal{D}$  das orthogonale Komplement von  $\mathbb{R}U$  in  $TM$ . Es gilt

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{X}(M), \quad \|U\| = 1, \quad PU = 0, \quad FU = \xi, \\ P|\mathcal{D} = J|\mathcal{D}, \quad P\mathcal{D} = \mathcal{D}; \end{aligned}$$

insbesondere ist also  $\mathcal{D}$  ein komplexes Untervektorbündel von  $TM$ . Weiterhin gilt für  $X \in \mathcal{X}(M)$

$$\begin{aligned} (1) \quad PX &= JX - \langle X, U \rangle \xi, \quad FX = \langle X, U \rangle \xi, \\ (2) \quad P^2 X &= -X + \langle X, U \rangle U. \end{aligned}$$

Die fundamentalen Gleichungen für Untermannigfaltigkeiten lauten in dieser Situation:

a) *Gauß-Gleichung:*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle \xi,$$

b) *Weingarten-Gleichung:*

$$\bar{\nabla}_X \xi = -AX,$$

c) *Gauß-Gleichung zweiter Ordnung:*

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \frac{c}{4} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y \\ &\quad + \langle PY, Z \rangle PX - \langle PX, Z \rangle PY - 2\langle PX, Y \rangle PZ) \\ &\quad + \langle AY, Z \rangle AX - \langle AX, Z \rangle AY, \end{aligned}$$

d) *Codazzi-Gleichung:*

$$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = \frac{c}{4} (\langle X, U \rangle PY - \langle Y, U \rangle PX - 2\langle PX, Y \rangle U).$$

Mit Gauß- und Weingarten-Gleichung sowie  $\bar{\nabla}J = 0$  folgt

$$\begin{aligned} \nabla_X U + \langle AX, U \rangle \xi &= \bar{\nabla}_X U = -\bar{\nabla}_X (J\xi) = -J\bar{\nabla}_X \xi \\ &= JAX = PAX + FAX . \end{aligned}$$

Tangential- bzw. Normalanteil dieser Gleichung ergeben

$$(3) \quad PAX = \nabla_X U \quad , \quad FAX = \langle AX, U \rangle \xi .$$

$PA|_{\mathcal{D}}$  ist also der "Formoperator" des Untervektorbündels  $\mathcal{D}$  von  $TM$  bezüglich  $-U$ .

## 5.2 Hopf-Hyperflächen

Sei  $M$  eine reelle Hyperfläche einer Kähler-Mannigfaltigkeit  $\bar{M}$ . Dann ist  $J(\perp M)$  ein 1-dimensionales Untervektorbündel von  $TM$ , das wir das Hopf-Untervektorbündel von  $TM$  nennen (suggeriert dadurch, daß für  $S^{2m-1}$  in  $\mathbb{C}^m$  auf diese Weise gerade das klassische Hopf-Untervektorbündel von  $S^{2m-1}$  resultiert). Die 1-dimensionale Blätterung von  $M$  durch die Integral-Mannigfaltigkeiten von  $J(\perp M)$  nennen wir die Hopf-Blätterung von  $M$  (in  $\bar{M}$ ). Wir sagen,  $M$  ist eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$  genau dann, wenn die Hopf-Blätterung von  $M$  totalgeodätisch ist, d.h. wenn alle Blätter Bahnen von Geodätischen in  $M$  sind. In diesem Sinne ist  $S^{2m-1}$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}^m$ ; ihre Hopf-Blätterung besteht gerade aus den Fasern der klassischen Hopf-Abbildung  $S^{2m-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{m-1}$ . Ist  $M$  eine orientierbare reelle Hyperfläche von  $\bar{M}$  und  $\xi$  ein globales Einheitsnormalenfeld auf  $M$ , so nennen wir das Vektorfeld  $U := -J\xi$  das Hopf-Feld von  $M$  (bezüglich  $\xi$ ). Offenbar ist eine orientierbare reelle Hyperfläche von  $\bar{M}$  genau dann eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$ , wenn die Integralkurven des Hopf-Feldes  $U$  Geodätische in  $M$  sind. Wir wollen in diesem Abschnitt Hopf-Hyperflächen von komplexen Raumformen studieren. (Da die nachfolgenden Aussagen von lokaler Natur sind, setzen wir Orientierbarkeit von  $M$  voraus.)

Wir setzen im folgenden voraus, daß  $M$  eine zusammenhängende orientierbare reelle Hyperfläche einer  $m$ -dimensionalen komplexen Raumform  $\bar{M}$  der holomorphen Schnittkrümmung  $c$  ist;  $\xi, U, A, \mathcal{D}$  etc. seien wie in 5.1. Zunächst gilt die folgende Charakterisierung von Hopf-Hyperflächen.

**Satz 1:** Folgende vier Aussagen sind paarweise äquivalent:

- $M$  ist eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$ .
- $U_p$  ist für jedes  $p \in M$  eine Hauptkrümmungsrichtung von  $M$ .
- $\mathcal{D}$  ist invariant unter der Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_U$  von  $U$ , d.h. es gilt  $\mathcal{L}_U X = [U, X] \in \Gamma(\mathcal{D})$  für alle  $X \in \Gamma(\mathcal{D})$ .
- (Im Falle  $c \neq 0$ ) Für jedes  $p \in M$  gilt  $R_p \circ A_p = A_p \circ R_p$ , wobei  $R_p : T_p M \rightarrow T_p M, v \mapsto \bar{R}(v, \xi_p)\xi_p$  (vgl. 4.5).

**Anmerkungen:** a) Die Äquivalenz von (a) und (b) ist im wesentlichen von Y.Maeda bewiesen worden ([Ma], S.532).

b) Im Falle  $c = 0$  ist einerseits wegen  $\bar{R} = 0$  die Aussage (d) stets erfüllt; andererseits ist nicht jede reelle Hyperfläche von  $\mathbb{C}^m$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}^m$ . Die Implikation (d)  $\Rightarrow$  (a) ist daher im Falle  $c = 0$  im allgemeinen falsch.

c) Jede reelle Hyperfläche  $M$  von  $\bar{M}$ , die auf einer Röhre um eine komplexe Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$  liegt, ist eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$  (denn nach Korollar 4.4 ist für jeden Punkt  $p \in M$  der Vektor  $U_p$  eine Hauptkrümmungsrichtung von  $M$ ; man wende nun Satz 1 an).

**Beweis:** (a)  $\Leftrightarrow$  (b): Aufgrund von (3) gilt für jede Integralkurve  $\gamma$  von  $U$

$$\nabla_{\partial} \dot{\gamma} = PAU \circ \gamma .$$

Ist  $M$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$ , so ist jede Integralkurve von  $U$  eine Geodätische in  $M$ . Hiermit folgt  $PAU = 0$  und daher mit (2)

$$0 = P^2 AU = -AU + \langle AU, U \rangle U ,$$

d.h.  $U_p$  ist für jedes  $p \in M$  eine Hauptkrümmungsrichtung von  $M$ .

Gilt andererseits (b), also  $AU = \alpha U$  mit  $\alpha := \langle AU, U \rangle$ , und ist  $\gamma$  eine Integralkurve von  $U$ , so folgt

$$0 = \alpha PU \circ \gamma = PAU \circ \gamma = \nabla_{\partial} \dot{\gamma} ,$$

d.h.  $\gamma$  ist eine Geodätische von  $M$ . Somit ist  $M$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$ .

(a)  $\Leftrightarrow$  (c): Mit der Ricci-Identität sowie (3) folgt für  $X \in \Gamma(\mathcal{D})$

$$\langle \mathcal{L}_U X, U \rangle = \langle [U, X], U \rangle = \langle \nabla_U X, U \rangle - \langle \nabla_X U, U \rangle = -\langle \nabla_U U, X \rangle .$$

Außerdem gilt  $\langle \nabla_U U, U \rangle = 0$ . Daher gilt  $\mathcal{L}_U \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$  genau dann, wenn  $\nabla_U U = 0$ , d.h. wenn jede Integralkurve von  $U$  eine Geodätische von  $M$  ist.

(b)  $\Leftrightarrow$  (d) : siehe 4.5 oder auch Lemma 4.2. □

**Lemma:** Sind  $M$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$  und  $\alpha := \langle AU, U \rangle$  die zu  $U$  gehörige Hauptkrümmungsfunktion (vgl. Satz 1), so gilt

$$(4) \quad 2APA = \alpha(AP + PA) + \frac{c}{2}P ,$$

$$(5) \quad \text{grad}^M \alpha = (U\alpha)U .$$

*Beweis:* Mit der Codazzi-Gleichung sowie (3) folgt für  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(6) \quad -\frac{c}{2} \langle PX, Y \rangle = \langle (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, U \rangle \\ = \langle (\nabla_X A)U, Y \rangle - \langle (\nabla_Y A)U, X \rangle \\ = \langle X\alpha \rangle \langle U, Y \rangle - \langle Y\alpha \rangle \langle U, X \rangle + \alpha \langle (AP + PA)X, Y \rangle - 2 \langle APAX, Y \rangle.$$

Mit  $X = U$  erhalten wir aus (6)

$$Y\alpha = (U\alpha) \langle U, Y \rangle,$$

d.h. es gilt (5). Setzen wir diese und die entsprechende Gleichung mit  $X$  anstelle von  $Y$  in (6) ein, so erhalten wir (4).  $\square$

Die Frage nach der Integrabilität von  $\mathcal{D}$  ist für Hopf-Hyperflächen im Falle  $c \neq 0$  negativ zu beantworten.

**Satz 2:** Ist  $M$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$  und gilt  $c \neq 0$ , so ist  $\mathcal{D}$  nicht integrabel.

**Anmerkungen:** a) Für den Fall  $c = 0$  ist Satz 2 nicht richtig. So ist beispielsweise die total-geodätische reelle Hyperfläche  $M = \mathbb{R}^{2m-1}$  in  $\mathbb{C}^m$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}^m$ ; das Untervektorbündel  $\mathcal{D}$  von  $TM$  ist offenbar integrabel (die maximalen Integral-Mannigfaltigkeiten von  $\mathcal{D}$  sind holomorph kongruent zu  $\mathbb{C}^{m-1}$ ).

b) Kimura/Maeda haben in  $\mathbb{C}P^m$  reelle Hyperflächen mit integrelem Untervektorbündel  $\mathcal{D}$  konstruiert: Sei  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}P^m$  eine reguläre Kurve in  $\mathbb{C}P^m$ . Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  existiert genau eine zu  $\mathbb{C}P^{m-1}$  holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit  $N_t$  von  $\mathbb{C}P^m$  mit  $\gamma(t) \in N_t$ , die in  $\gamma(t)$  tangential zu  $(\mathbb{C}\dot{\gamma}(t))^\perp$  ist. Die Vereinigung aller dieser komplexen Hyperflächen  $N_t$  ergibt eine nicht vollständige reelle Hyperfläche  $M$  von  $\mathbb{C}P^m$ , eine sogenannte *reelle Regel-Hyperfläche* von  $\mathbb{C}P^m$ . Das komplexe Untervektorbündel  $\mathcal{D}$  von  $TM$  ist integrabel; die maximalen Integral-Mannigfaltigkeiten sind gerade  $N_t$ . Nach Satz 2 kann  $M$  keine Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}P^m$  sein. Für Einzelheiten siehe [KM].

*Beweis:* Wie man leicht bestätigt, ist

$$\langle (AP + PA)X, Y \rangle = 0 \quad \text{für alle } X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$$

eine notwendige und hinreichende Integrabilitätsbedingung für  $\mathcal{D}$  ([Be1], S.39). Nach Satz 1 gilt außerdem  $AU = \alpha U$  mit  $\alpha := \langle AU, U \rangle$ . Somit gilt

$$(7) \quad \mathcal{D} \text{ integrabel} \iff AP + PA = 0.$$

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß  $\mathcal{D}$  integrabel ist; also gilt nach (7)  $AP + PA = 0$ . Seien  $L$  eine Integral-Mannigfaltigkeit von  $\mathcal{D}$ ,  $\bar{A}$  der Formoperator von  $L$  in  $\bar{M}$  und  $\eta := \xi|_L$ .  $L$  ist eine komplexe Hyperfläche von  $\bar{M}$  und  $\eta$  ist ein Einheitsnormalenfeld auf  $L$  (in  $\bar{M}$ ). Für  $X \in \mathfrak{X}(L)$  folgt mit der Weingarten-Gleichung

$$\bar{\nabla}_X \eta = -AX \in \mathfrak{X}(L),$$

also gilt  $\bar{A}_\eta = A|_{TL}$ . Mit (4),  $AP + PA = 0$  sowie  $P^2|_{TL} = -\text{id}_{TL}$  (da  $L$  komplex) folgt

$$\bar{A}_\eta^2 = A^2|_{TL} = -P^2 A^2|_{TL} = PAPA|_{TL} = \frac{c}{4} P^2|_{TL} = -\frac{c}{4} \text{id}_{TL}.$$

Da  $L$  komplexe Hyperfläche von  $\bar{M}$  ist, folgt mit leichter Rechnung, daß  $\bar{A}^2$  in jedem Punkt von  $L$  unabhängig von der Einheitsnormalen ist ([Sm1], S.255). Also gilt

$$\bar{A}^2 = -\frac{c}{4} \text{id}_{TL}.$$

Hieraus folgt  $c < 0$ . Nach einem Resultat von Smyth ([Sm2], S.645) muß  $L$  total-geodätisch in  $\bar{M}$  sein, also  $\bar{A} = 0$  und damit auch  $c = 0$ ; im Widerspruch zu  $c < 0$ . Damit ist Satz 2 bewiesen.  $\square$

**Anmerkung:** Vernon hat in seinem Artikel [Ve] die Frage nach reellen Hyperflächen  $M$  in  $\mathbb{C}H^m$  mit der Eigenschaft  $AP = -PA$  offengelassen (siehe [Ve], S.222). Satz 2 sowie (7) zeigen, daß keine derartige Hyperfläche von  $\mathbb{C}H^m$  existiert. (Aus der Bedingung  $AP = -PA$  folgt leicht mit (3), daß die Integralkurven des Hopf-Feldes  $U$  Geodätische von  $M$  sind, d.h.  $M$  ist eine Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}H^m$ .)

**Theorem 1:** Sind  $M$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$ ,  $c \neq 0$  und  $\alpha := \langle AU, U \rangle$  die zu  $U$  gehörige Hauptkrümmungsfunktion (vgl. Satz 1), so gilt:

(i)  $\alpha$  ist konstant auf  $M$ .

(ii) Jede Integralkurve  $\gamma$  von  $U$  ist eine sphärische Kurve in  $\bar{M}$  mit  $\bar{\nabla}_\theta \dot{\gamma} = \alpha \xi \circ \dot{\gamma}$ . Also ist  $|\alpha|$  die geodätische Krümmung von  $\gamma$  (als Kurve) in  $\bar{M}$ .

(iii) Sei speziell  $\bar{M}$  entweder  $\mathbb{C}P^m(c)$  oder  $\mathbb{C}H^m(c)$ .

(a) Seien  $\gamma: I \rightarrow M$  eine Integralkurve von  $U$ ,  $t \in I$  und  $N$  die zu  $\mathbb{C}P^1(c)$  bzw.  $\mathbb{C}H^1(c)$  holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$  mit  $\gamma(t) \in N$ , die in  $\gamma(t)$  tangential zu  $(\mathbb{C}\dot{\gamma}(t))^\perp$  ist. Dann ist  $\gamma(I)$  eine Zusammenhangskomponente von  $M \cap N$  (insbesondere verläuft also  $\gamma$  auch in  $N$ ).

(b) Seien  $U$  vollständig und  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Integralkurve von  $U$ . Dann ist  $\gamma$  genau dann geschlossen, wenn  $\alpha^2 + c > 0$  gilt. Ist  $\alpha^2 + c > 0$ , so existiert ein  $r \in \mathbb{R}_+$  mit  $|\alpha| = \cot_c(r)$ ; die Länge von  $\gamma$  ist dann gleich  $2\pi |\sin_c(r)|$ .

**Anmerkungen:** a) Die Aussage (i) ist für den Fall  $c > 0$  im wesentlichen von Y.Maeda bewiesen worden ([Ma], S.533). Eine Übertragung von Maedas Beweis auf den Fall  $c < 0$  ist nicht möglich. Bisher war (i) für  $\mathbb{C}H^m$  nur unter zusätzlichen Voraussetzungen bekannt (vgl. etwa [Mo2], S.529, [Ve], S.218).

b) Jede komplexe Raumform der holomorphen Schnittkrümmung  $c \neq 0$  ist lokal holomorph isometrisch zu einem offenen Teil des entsprechenden Standardraumes  $\mathbb{C}P^m(c)$  bzw.  $\mathbb{C}H^m(c)$ . Für beliebige nicht-euklidische komplexe Raumformen gilt daher eine lokale Version der Aussage (iii) (a).

*Beweis:* zu (i): Für die Hesseform  $\text{hess}^\alpha$  von  $\alpha$  folgt mit (3) und (5)

$$\text{hess}^\alpha(X, Y) = (X \cdot (U\alpha))\langle U, Y \rangle + (U\alpha)\langle PAX, Y \rangle .$$

Aufgrund der Symmetrie von  $\text{hess}^\alpha$  folgt hieraus

$$(8) \quad (Y \cdot (U\alpha))\langle U, X \rangle - (X \cdot (U\alpha))\langle U, Y \rangle = (U\alpha)\langle (AP + PA)X, Y \rangle .$$

Speziell mit  $X = U$  erhalten wir

$$(9) \quad Y \cdot (U\alpha) = (U \cdot (U\alpha))\langle U, Y \rangle .$$

Setzen wir (9) und die entsprechende Gleichung mit  $X$  anstelle von  $Y$  in (8) ein, so folgt

$$0 = (U\alpha)\langle (AP + PA)X, Y \rangle .$$

Auf der in  $M$  offenen Teilmenge  $W := \{p \in M \mid (AP + PA)_p \neq 0\}$  gilt daher  $(U\alpha)|_W = 0$ ; aufgrund von (5) ist also  $\alpha|_W$  lokal konstant. Da die Bedingung  $AP + PA = 0$  Integrabilität von  $\mathcal{D}$  impliziert (vgl. auch Beweis zu Satz 2), ist wegen Satz 2 die abgeschlossene Hülle von  $W$  in  $M$  gleich  $M$ , woraus mit dem Zusammenhang von  $M$  die Behauptung folgt.

zu (ii): Sei  $\gamma$  eine Integralkurve von  $U$ .  $\gamma$  ist eine Geodätische von  $M$ . Mit der Gauß-Gleichung folgt daher

$$(10) \quad \bar{\nabla}_\theta \dot{\gamma} = \langle A\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \xi \circ \gamma = \alpha \xi \circ \gamma .$$

Ferner erhalten wir mit der Weingarten-Gleichung

$$(11) \quad \bar{\nabla}_\theta(\xi \circ \gamma) = -A\dot{\gamma} = -\alpha \dot{\gamma} .$$

Einfacher Beweis von (i): (auf Anregung von John Bolton)

Aus (5) folgt  $X\alpha = 0$  für alle  $X \in \Gamma(\mathcal{D})$  und damit

$$0 = [X, Y] \cdot \alpha = (U\alpha)\langle [X, Y], U \rangle .$$

Wegen Satz 2 folgt  $U\alpha = 0$  und damit die lokale Konstanz von  $\alpha$ .

Wegen  $\|U\| = 1$  ist  $\gamma$  nach der Bogenlänge parametrisiert. Mit (i), (10) und (11) folgt daher, daß  $\gamma$  eine sphärische Kurve in  $\bar{M}$  mit  $\bar{\nabla}_\theta \dot{\gamma} = \alpha \xi \circ \gamma$  ist.

zu (iii): Seien nun  $\bar{M}$  entweder  $\mathbb{C}P^m(c)$  oder  $\mathbb{C}H^m(c)$ . (a) folgt aus dem Satz in der Anmerkung über sphärische Kurven in 2.5. Wir setzen nun voraus, daß das Hopf-Feld  $U$  vollständig ist.  $\mathbb{C}P^1(c)$  ist isometrisch zur 2-dimensionalen Riemannschen Sphäre  $S^2(1/\sqrt{c})$  vom Radius  $1/\sqrt{c}$ ;  $\mathbb{C}H^1(c)$  ist isometrisch zum 2-dimensionalen reell hyperbolischen Raum  $\mathbb{R}H^2(c)$  der konstanten Riemannschen Schnittkrümmung  $c$ . Die Behauptung folgt dann mit (a) und bekannten Resultaten über sphärische Kurven in Räumen konstanter Krümmung. Genauer gilt:

Ein Kreis vom Radius  $r$  in einem Raum konstanter Krümmung  $\kappa$  hat die geodätische Krümmung  $\cot_\kappa(r)$  (vgl. Beispiel 2 in 4.4), wobei  $r \in ]0, \pi/(2\sqrt{\kappa}[$  ( $\kappa > 0$ ) bzw.  $r \in \mathbb{R}_+$  ( $\kappa \leq 0$ ). Bekanntlich ist jede geschlossene sphärische Kurve in einem Raum konstanter Krümmung ein Kreis von einem festen Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um einen Punkt.  $\gamma$  ist daher genau dann geschlossen, wenn die geodätische Krümmung  $|\alpha|$  von  $\gamma$  von der Gestalt  $\cot_c(r)$  ist, d.h. wenn  $\alpha^2 + c > 0$  gilt. Für die Länge (Umfang) von Kreisen in  $S^2(1/\sqrt{c})$  bzw.  $\mathbb{R}H^2(c)$  siehe [Kl], S.199. □

Ist  $M$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$ , so gilt wegen Satz 1 offenbar  $AD \subset \mathcal{D}$ . Für jeden Punkt  $p \in M$  ist daher  $\sigma_p := \text{Spec}(A|_{\mathcal{D}_p})$  wohldefiniert. Ist  $\lambda \in \sigma_p$ , so bezeichnen wir mit  $T_\lambda \subset \mathcal{D}_p$  den zugehörigen Eigenraum von  $A|_{\mathcal{D}_p}$ .

**Theorem 2:** Sind  $M$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$ ,  $p \in M$  und  $\alpha := \langle AU_p, U_p \rangle$  die zu  $U_p$  gehörige Hauptkrümmung von  $M$  in  $p$  (vgl. Satz 1), so gilt:

(i) Gilt  $\alpha^2 + c = 0$ , so ist  $\alpha/2 \in \sigma_p$  und für alle  $\lambda \in \sigma_p$  mit  $\lambda \neq \alpha/2$  gilt  $JT_\lambda \subset T_{\alpha/2}$ ; insbesondere ist also  $\alpha/2$  eine mindestens  $(m-1)$ -fache Hauptkrümmung von  $M$  in  $p$ .

(ii) Gilt  $\alpha^2 + c \neq 0$  und ist  $\lambda \in \sigma_p$ , so existiert genau ein  $\lambda^* \in \sigma_p$  mit  $JT_\lambda = T_{\lambda^*}$ .  $\lambda^*$  ist eindeutig charakterisiert durch die Gleichung

$$(12) \quad (2\lambda - \alpha)(2\lambda^* - \alpha) = \alpha^2 + c .$$

$T_\lambda$  ist also total-reell oder komplex. Weiterhin ist  $T_\lambda$  genau dann komplex, wenn  $\lambda^2 - \alpha\lambda - \frac{c}{4} = 0$ , d.h. wenn  $\alpha^2 + c > 0$  und

$$(13) \quad \lambda \in \left\{ \cot_{c/4}(r), -\frac{c}{4} \tan_{c/4}(r) \right\} ,$$

wobei  $r \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha = \cot_c(r)$ .

*Beweis:* Seien  $\lambda \in \sigma_p$  und  $v \in T_\lambda$ . Mit (4) folgt

$$(14) \quad (2\lambda - \alpha)APv = (\alpha\lambda + \frac{c}{2})Pv .$$

Es gilt  $2\lambda - \alpha = 0 = \alpha\lambda + \frac{c}{2}$  genau dann, wenn  $2\lambda - \alpha = 0 = \alpha^2 + c$ .

zu (i): Gelte  $\alpha^2 + c = 0$ . Ist  $\lambda \neq \alpha/2$ , so gilt nach (14)

$$APv = \frac{\alpha\lambda + \frac{c}{2}}{2\lambda - \alpha} Pv = \frac{\alpha}{2} Pv ;$$

also ist  $\alpha/2 \in \sigma_p$  und es gilt  $JT_\lambda = PT_\lambda \subset T_{\alpha/2}$ .

zu (ii): Gelte  $\alpha^2 + c \neq 0$  und sei  $\lambda \in \sigma_p$ . Mit (14) folgt  $2\lambda - \alpha \neq 0$  und  $JT_\lambda \subset T_{\lambda^*}$ , wobei  $\lambda^* \in \sigma_p$  definiert ist durch

$$\lambda^* := \frac{\alpha\lambda + \frac{c}{2}}{2\lambda - \alpha} ;$$

offenbar ist  $\lambda^*$  durch die Gleichung (12) eindeutig charakterisiert. Aus Symmetriegründen gilt dann auch  $JT_{\lambda^*} \subset T_\lambda$  und damit  $JT_\lambda = T_{\lambda^*}$ .  $T_\lambda$  ist nach (12) genau dann komplex (d.h.  $\lambda = \lambda^*$ ), wenn  $\lambda^2 - \alpha\lambda - c/4 = 0$  gilt. Diese Gleichung besitzt nur reelle Lösungen für  $\alpha^2 + c > 0$  (beachte  $\alpha^2 + c \neq 0$ ); im Falle der Lösbarkeit sind  $\frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + c})$  die beiden Lösungen. Ist nun  $\alpha^2 + c > 0$ , so existiert ein  $r \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha = \cot_c(r)$ . Durch einfache Rechnung erhalten wir

$$\left\{ \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + c}) \right\} = \left\{ \cot_{c/4}(r), -\frac{c}{4} \tan_{c/4}(r) \right\} . \quad \square$$

Wir untersuchen nun die Parallel- bzw. Fokalabbildungen von  $M$ .

**Theorem 3:** Seien  $M$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$  und  $\alpha := \langle AU, U \rangle$  die zum Hopf-Feld  $U$  gehörige Hauptkrümmungsfunktion (vgl. Satz 1). Ist  $c \neq 0$ , so ist  $\alpha$  nach Theorem 1 konstant; ist  $c = 0$ , so setzen wir zusätzlich "α konstant auf  $M$ " voraus. Seien  $r \in \mathbb{R}_+$  und  $\Phi_r : \mathcal{B}_r \rightarrow \bar{M}$ ,  $p \mapsto \exp^+(r\xi_p)$  eine Submersion auf eine Untermannigfaltigkeit  $N$  von  $\bar{M}$  (vgl. 4.5). Gilt  $\alpha = \cot_c(r)$  (bzw.  $\alpha \neq \cot_c(r)$ ), so ist  $N$  eine komplexe (bzw. anti-holomorphe) Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ .

Seien  $p \in \mathcal{B}_r$ ,  $q := \Phi(p)$  und  $\kappa := c/4$ . Man erhält  $T_q N$  durch Parallelverschiebung von

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma_p \\ \lambda \neq \cot_\kappa(r)}} T_\lambda \quad , \quad \text{falls } \alpha = \cot_c(r) \\ & \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma_p \\ \lambda \neq \cot_\kappa(r)}} T_\lambda \oplus \mathbb{R}U_p \quad , \quad \text{falls } \alpha \neq \cot_c(r) \end{aligned}$$

längs der Geodätischen  $\gamma_p : [0, r] \rightarrow \bar{M}$ ,  $t \mapsto \exp^+(t\xi_p)$  von  $\bar{M}$ . Die Hauptkrümmungen von  $N$  in  $q$  bezüglich der Normalen  $\dot{\gamma}_p(r)$  von  $N$  sind

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa \sin_\kappa(r) + \lambda \cos_\kappa(r)}{\cos_\kappa(r) - \lambda \sin_\kappa(r)} \quad , \quad \text{wobei } \lambda \in \sigma_p, \lambda \neq \cot_\kappa(r) \\ \text{sowie} & \frac{c \sin_c(r) + \alpha \cos_c(r)}{\cos_c(r) - \alpha \sin_c(r)} \quad , \quad \text{falls } \alpha \neq \cot_c(r) . \end{aligned}$$

Die entsprechenden Eigenräume erhält man durch Parallelverschiebung von  $T_\lambda$  (im oberen Fall) bzw.  $\mathbb{R}U_p$  (im unteren Fall) längs  $\gamma_p$ . (Man beachte, daß hierbei Hauptkrümmungen von  $N$  mehrfach vorkommen können; vgl. Anmerkung zu Korollar 4.5.)

**Anmerkung:** Die erste Aussage über  $N$  in Theorem 3 ist für  $\mathbb{C}P^m$  von Cecil/Ryan ([CR], S.489) und für  $\mathbb{C}H^m$  von Montiel ([Mo2], S.521) bewiesen worden; Montiel mußte dabei zusätzlich die Konstanz von  $\alpha$  voraussetzen. Unser Beweis hier unterscheidet sich von den Beweisen von Cecil/Ryan und Montiel dadurch, daß er insgesamt "rein intrinsisch" ist, d.h. ohne Zuhilfenahme der entsprechenden Hopf-Abbildungen durchgeführt wird.

**Beweis:** Nach Satz 1 erfüllt  $p$  die Kommutativitätsbedingung in Korollar 4.5 (für  $c = 0$  ist diese Bedingung trivialerweise erfüllt). Die Behauptung über  $T_q N$  sowie über die Hauptkrümmungen von  $N$  in  $q$  sowie deren Eigenräume erhält man aus Korollar 4.5 (beachte hierbei:  $\kappa$  und  $c$  sind die einzigen Eigenwerte von  $R_p$  und im Falle  $c \neq 0$  gilt  $E_c = \mathbb{R}U_p$ , vgl. Lemma 4.2). Sei nun  $\lambda := \cot_\kappa(r)$ . Nach Korollar 4.5 erhält man  $\perp_q N$  durch Parallelverschiebung von

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}\xi_p \oplus T_\lambda \quad , \quad \text{falls } \alpha = \cot_c(r) \quad \text{und } \lambda \in \sigma_p \\ & \mathbb{C}\xi_p \quad , \quad \text{falls } \alpha = \cot_c(r) \quad \text{und } \lambda \notin \sigma_p \\ & \mathbb{R}\xi_p \oplus T_\lambda \quad , \quad \text{falls } \alpha \neq \cot_c(r) \quad \text{und } \lambda \in \sigma_p \\ & \mathbb{R}\xi_p \quad , \quad \text{falls } \alpha \neq \cot_c(r) \quad \text{und } \lambda \notin \sigma_p \end{aligned}$$

längs  $\gamma_p$ . Ist  $\lambda \notin \sigma_p$ , so ist  $\perp_q N$  daher komplex (bzw. total-reell), falls  $\alpha = \cot_c(r)$  (bzw.  $\alpha \neq \cot_c(r)$ ). Sei nun  $\lambda \in \sigma_p$ . Gilt  $\alpha^2 + c = 0$ , so ist  $\alpha \neq \cot_c(r)$  und wegen  $\lambda^2 + \kappa > 0$  gilt  $\lambda \neq \alpha/2$ ; aufgrund von Theorem 2 (i) ist daher  $T_\lambda$  und damit auch  $\perp_q N$  total-reell. Gilt  $\alpha^2 + c \neq 0$ , so ist nach Theorem 2 (ii)  $T_\lambda$  genau dann komplex, wenn  $\lambda^2 - \alpha\lambda - c/4 = 0$ , d.h. wenn  $\alpha = \cot_c(r)$ . Insgesamt erhalten wir somit: Gilt  $\alpha = \cot_c(r)$ , so ist  $\perp_q N$  und damit auch  $T_q N$  komplex; und gilt  $\alpha \neq \cot_c(r)$ , so ist  $\perp_q N$  total-reell, d.h.  $T_q N$  ist anti-holomorph. Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

Abschließend stellen wir noch eine Reihe von äquivalenten Aussagen zusammen.

**Theorem 4:** Sei  $c \neq 0$ . Folgende Aussagen sind paarweise äquivalent:

- (a)  $M$  ist eine Hopf-Hyperfläche von  $\overline{M}$  und die Hopf-Blätterung von  $M$  ist eine Riemannsche Blätterung von  $M$ .
- (b)  $U$  ist ein Killingfeld auf  $M$ .
- (c) Jede Geodätische von  $M$  hat konstante geodätische Krümmung in  $\overline{M}$ .
- (d) Es gilt  $AP = PA$ .
- (e) Die zweite Fundamentalform von  $M$  ist zyklisch-parallel, d.h. für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  gilt

$$(\nabla_X h)(Y, Z) + (\nabla_Y h)(Z, X) + (\nabla_Z h)(X, Y) = 0 .$$

- (f) Es gilt  $\|\nabla h\|^2 = \frac{1}{4}c^2(m-1)$ .
- (g) Die kanonische fast-kontakt metrische Struktur auf  $M$  ist normal (siehe 5.4 und [Bl], S.48).

Ist speziell  $\overline{M}$  entweder  $\mathbb{C}P^m$  oder  $\mathbb{C}H^m$  und  $\pi$  die Hopf-Abbildung auf  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$ , so sind die folgenden Aussagen jeweils äquivalent zu (a)-(g):

- (h) Die zweite Fundamentalform von  $\pi^{-1}(M)$  in  $S^{2m+1}$  bzw.  $H^{2m+1}$  ist parallel.
- (i)  $M$  ist holomorph kongruent zu einem offenen Teil (für  $\mathbb{C}P^m$ .) einer Röhre vom Radius  $r \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  um  $\mathbb{C}P^k$  in  $\mathbb{C}P^m$  für ein  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ ; (für  $\mathbb{C}H^m$ .) einer Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{C}H^k$  in  $\mathbb{C}H^m$  für ein  $k \in \{0, \dots, m-1\}$  oder einer Horosphäre in  $\mathbb{C}H^m$ .

**Anmerkung:** (Riemannsche Blätterungen) Seien  $L$  eine Blätterung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  und  $\pi : M \rightarrow M/L$  die kanonische Projektion von  $M$  auf die Menge  $M/L$  der Blätter von  $L$ . Dann ist  $L$  genau dann eine Riemannsche Blätterung von  $M$ , wenn  $\pi$  lokal (bezüglich  $M$ ) zu einer Riemannschen Submersion gemacht werden kann ([Re6], S.155 f.). Wir werden mehrmals die folgende Charakterisierung Riemannscher Blätterungen verwenden ([To], S.56):  $L$  ist genau dann eine Riemannsche Blätterung von  $M$ , wenn

$$(15) \quad \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle = 0$$

gilt für alle  $X \in \mathfrak{X}(L)$  und  $Y, Z \in \Gamma(\perp L)$  (hierbei ist  $\nabla$  die Levi-Civita-Ableitung von  $M$ ). Zur Theorie über Riemannsche Blätterungen siehe [Mo1], [Re6] und [To].

**Beweis:** zu (a)  $\iff$  (d): Nach (15) induziert das Hopf-Untervektorbündel  $RU$  von  $TM$  genau dann eine Riemannsche Blätterung von  $M$ , wenn für alle  $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$

$$0 = \langle \nabla_X U, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y U \rangle$$

gilt. Mit (3) erhalten wir, daß diese Bedingung äquivalent ist zu

$$0 = \langle (PA - AP)X, Y \rangle$$

für alle  $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ . Ferner gilt für  $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\langle (PA - AP)X, U \rangle = \langle (PA - AP)U, X \rangle = \langle \nabla_U U, X \rangle .$$

Insgesamt folgt nun leicht die Behauptung.

zu (c)  $\iff$  (e): Durch Polarisierung erhalten wir, daß (e) äquivalent ist zu

$$(\nabla_X h)(X, X) = 0 \text{ für alle } X \in \mathfrak{X}(M) .$$

Dies gilt offenbar genau dann, wenn  $h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$  parallel ist bezüglich  $D$  für jede Geodätische  $\gamma$  von  $M$ . Da in dieser Situation  $\|h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\|$  bis auf eine reelle Konstante die geodätische Krümmung von  $\gamma$  in  $\overline{M}$  ist, folgt die Behauptung.

zu (d)  $\iff$  (h): [Ok3], S.363 bzw. [MR], S.252.

zu (d)  $\iff$  (i): [Ok3], S.363 bzw. [MR], S.260.

zu (e)  $\iff$  (f): [CLM], S.184.

zu (b)  $\iff$  (g): [Ok1], S.274.

zu (d)  $\iff$  (g): [YK4], S.275.

zu (d)  $\iff$  (e): [Ki1], S.265. Diese Äquivalenz wurde unabhängig von Ki auch vom Autor in seiner Diplomarbeit bewiesen (siehe [Be2], S.58).  $\square$

### 5.3 Klassifikation der Hopf-Hyperflächen mit konstanten Hauptkrümmungen

Das Klassifikationsproblem der Hyperflächen mit konstanten Hauptkrümmungen ist in Räumen konstanter Krümmung äquivalent zum Klassifikationsproblem der isoparametrischen Hyperflächen ([Ca], S.178). Eine Hyperfläche  $M$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\overline{M}$  heißt isoparametrisch, wenn  $M$  Niveauhyperebene einer isoparametrischen Funktion  $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$  ist; hierbei heißt  $f$  isoparametrisch, wenn  $\Delta f$  und  $\|\text{grad } f\|^2$  Funktionen von  $f$  sind (siehe auch [Wa3]).

Isoparametrische Hyperflächen sind im euklidischen Raum  $E^m$  von Levi-Civita ([Le],  $m = 3$ ) und Segre ([Se],  $m \geq 3$ ) sowie im reell hyperbolischen Raum von E.Cartan [Ca] vollständig klassifiziert worden. In der Sphäre dagegen steht eine vollständige Klassifikation noch aus (für wesentliche Resultate siehe [No], [OT], [FKM], [Mü] und [DN] sowie die dort angegebene Literatur).

Wang hat ein Beispiel für eine isoparametrische Hyperfläche in  $\mathbb{C}P^m$  angegeben, die keine konstanten Hauptkrümmungen hat ([Wa1], S.1522). In  $\mathbb{C}P^m$  sind die beiden Klassifikationsprobleme (s.o.) also nicht identisch. Wir befassen uns im folgenden mit der Frage nach reellen Hyperflächen mit konstanten Hauptkrümmungen in  $\mathbb{C}P^m$  und  $\mathbb{C}H^m$ .

Kimura hat reelle Hyperflächen  $M$  mit konstanten Hauptkrümmungen in  $\mathbb{C}P^m$  untersucht unter der zusätzlichen Voraussetzung: Für jeden Einheitsnormalenvektor  $\xi$  von  $M$  ist  $J\xi$  eine Hauptkrümmungsrichtung von  $M$ . Durch diese Bedingung werden genau die Hopf-Hyperflächen von  $\mathbb{C}P^m$  charakterisiert (vgl. Satz 1 in 5.2). Kimura hat gezeigt, daß eine Hopf-Hyperfläche  $M$  von  $\mathbb{C}P^m$  genau dann konstante Hauptkrümmungen hat, wenn  $M$  offener Teil einer homogenen reellen Hyperfläche von  $\mathbb{C}P^m$  ist ([Ki2], S.147). Zusammen mit der Klassifikation von Takagi [Ta1] der homogenen reellen Hyperflächen von  $\mathbb{C}P^m$  erhält man:

**Theorem 1:** Sei  $M$  eine zusammenhängende Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}P^m$  ( $m \geq 2$ ) mit konstanten Hauptkrümmungen. Dann ist  $M$  orientierbar und holomorph kongruent zu einem offenen Teil einer der folgenden reellen Hyperflächen von  $\mathbb{C}P^m$ :

- $P_{1,k}$ : einer Röhre vom Radius  $r \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  um  $\mathbb{C}P^k$  in  $\mathbb{C}P^m$  für ein  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ ;
- $P_2$ : einer Röhre vom Radius  $r \in ]0, \frac{\pi}{4}[$  um die komplexe Quadrik  $Q^{m-1}$  in  $\mathbb{C}P^m$ ;
- $P_3$ : einer Röhre vom Radius  $r \in ]0, \frac{\pi}{4}[$  um die Segre-Einbettung von  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^n$  in  $\mathbb{C}P^m$ ,  $m = 2n + 1$ ;
- $P_4$ : einer Röhre vom Radius  $r \in ]0, \frac{\pi}{4}[$  um die Plücker-Einbettung der komplexen Grassmann-Mannigfaltigkeit  $\mathbb{C}G_{2,3}$  in  $\mathbb{C}P^9$ ;
- $P_5$ : einer Röhre vom Radius  $r \in ]0, \frac{\pi}{4}[$  um die kanonische Einbettung des Hermiteschen symmetrischen Raumes  $SO(10)/U(5)$  in  $\mathbb{C}P^{15}$ .

**Anmerkungen:** a) Für die Hauptkrümmungen der Modellräume in Theorem 1 sowie deren Vielfachheiten gilt die folgende Tabelle ([Ta2], S.47):

k) Die Segre-Einbettung von  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$  in  $\mathbb{C}P^3$  ist isometrisch zur komplexen Quadrik  $Q^2$  in  $\mathbb{C}P^3$

	$2 \cot(2r)$	$\cot(r)$	$\cot(r + \frac{\pi}{4})$	$\cot(r + \frac{\pi}{2})$	$\cot(r + \frac{3\pi}{4})$
$P_{1,k}$	1	$2(m-k-1)$	-	$2k$	-
$P_2$	1	-	$m-1$	-	$m-1$
$P_3$	1	$m-3$	2	$m-3$	2
$P_4$	1	4	4	4	4
$P_5$	1	8	6	8	6

Tabelle 6: Hauptkrümmungen der Modellräume  $P_{1,k}, P_2, P_3, P_4, P_5$  und deren Vielfachheiten

Hierbei ist  $2 \cot(2r)$  die Hauptkrümmung zur Hauptkrümmungsrichtung  $J\xi$ , wobei  $\xi$  ein geeignetes globales Einheitsnormalenfeld auf dem Modellraum ist. Darüber hinaus können wir mit Theorem 2 in 5.2 folgern: die Eigenräume zu  $\cot(r)$  und  $\cot(r + \frac{\pi}{2}) = -\tan(r)$  sind komplex; die Eigenräume zu  $\cot(r + \frac{\pi}{4})$  und  $\cot(r + \frac{3\pi}{4})$  sind total-reell.

b) Für die Anzahl  $g$  der verschiedenen Hauptkrümmungen gilt stets  $g \in \{2, 3, 5\}$ .  $g = 2$  gilt nur bei  $P_{1,k}$  für  $k = 0$  und  $k = m-1$ ;  $g = 3$  gilt bei  $P_{1,k}$  für  $k \in \{1, \dots, m-2\}$  und bei  $P_2$  und bei  $P_3$  für  $n = 1$ .

c) Sei  $M$  eine reelle Hyperfläche von  $\mathbb{C}P^m$  mit  $g$  verschiedenen konstanten Hauptkrümmungen. Ist  $g \in \{2, 3\}$ , so ist  $M$  eine Hopf-Hyperfläche (für  $g = 2$ : [Ta2]; für  $g = 3$ : [Ta3], falls  $m \geq 3$ , bzw. [Wa2], falls  $m = 2$ ).

d) Jeder der Modellräume besitzt eine weitere Fokalfäche (für  $P_{1,k}$  bzw.  $P_2$  siehe auch Beispiel 1 bzw. 2 in 4.5). Mit Theorem 3 in 5.2 sowie Satz 4.5 können wir folgern, daß jede dieser Fokalfächen bezüglich jeder Einheitsnormalen die gleichen Hauptkrümmungen hat. In der folgenden Tabelle stellen wir die Fokalfächen der Modellräume mit ihren Hauptkrümmungen sowie deren Vielfachheiten zusammen (wende Theorem 3 in 5.2 sowie a) an).

	Fokalflächen isometrisch zu	Vielfachheiten der Hauptkrümmungen			Typ der Fokalfläche
		-1	0	+1	
$P_{1,k}$	$\mathbb{C}P^k$	-	$2k$	-	komplex
	$\mathbb{C}P^{m-k-1}$	-	$2(m-k-1)$	-	komplex
$P_2$	$\mathbb{Q}^{m-1}$	$m-1$	-	$m-1$	komplex
	$\mathbb{R}P^m$	-	$m$	-	anti-holomorph
$P_3$	$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^n$	2	$2n-2$	2	komplex
	$M_1$	$2n-2$	3	$2n-2$	anti-holomorph
$P_4$	$\mathbb{C}G_{2,3}$	4	4	4	komplex
	$M_2$	4	5	4	anti-holomorph
$P_5$	$SO(10)/U(5)$	6	8	6	komplex
	$M_3$	8	7	8	anti-holomorph

Tabelle 7: Fokalflächen der Modellräume  $P_{1,k}, P_2, P_3, P_4, P_5$

Zu den Hauptkrümmungen 0 bei komplexen Fokalflächen bzw. zu -1 und +1 bei anti-holomorphen Fokalflächen sind die Eigenräume komplex; in den anderen Fällen sind die Eigenräume total-reell.

Die Fokalflächen  $M_1, M_2, M_3$  findet man explizit berechnet in [BFS] ( $M_1$ : S.21;  $M_2$ : S.24;  $M_3$ : S.30). Kimura gibt folgende Darstellung für  $M_1$  und  $M_2$  an ([Ki2], S.148):

$$M_1 = \pi(U(n+1)/U(n-1)) ,$$

$$M_2 = \pi(U(5)/Sp(2) \times U(1)) ,$$

wobei  $\pi$  die Hopf-Abbildung auf  $\mathbb{C}P^m$  ist.

e) Ausführliche Darstellungen der Einbettungen im Theorem 1 findet man in [BFS].

Wir wollen nun das entsprechende Resultat zu Theorem 1 für  $\mathbb{C}H^m$  formulieren und beweisen.

**Theorem 2:** Sei  $M$  eine zusammenhängende Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}H^m$  ( $m \geq 2$ ) mit konstanten Hauptkrümmungen. Dann ist  $M$  orientierbar und holomorph kongruent zu einem offenen Teil einer der folgenden reellen Hyperflächen von  $\mathbb{C}H^m$ :

$H_{1,k}$ : einer Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{C}H^k$  in  $\mathbb{C}H^m$  für ein  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ ;

$H_2$ : einer Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{R}H^m$  in  $\mathbb{C}H^m$ ;

$H_3$ : einer Horosphäre in  $\mathbb{C}H^m$ .

**Anmerkungen:** a) Für die Hauptkrümmungen der Modellräume in Theorem 2 sowie deren Vielfachheiten gilt die folgende Tabelle:

	Hauptkrümmungen			Vielfachheiten		
	$\alpha$	$\lambda$	$\mu$	$m_\alpha$	$m_\lambda$	$m_\mu$
$H_{1,k}$	$2\coth(2r)$	$\tanh(r)$	$\coth(r)$	1	$2k$	$2(m-k-1)$
$H_2$	$2\tanh(2r)$	$\tanh(r)$	$\coth(r)$	1	$m-1$	$m-1$
$H_3$	2	1	-	1	$2m-2$	-

Tabelle 8: Hauptkrümmungen der Modellräume  $H_{1,k}, H_2, H_3$  und deren Vielfachheiten

Hierbei ist  $\alpha$  die Hauptkrümmung zur Hauptkrümmungsrichtung  $J\xi$ , wobei  $\xi$  ein geeignetes globales Einheitsnormalenfeld auf dem Modellraum ist. Die Eigenräume von  $\lambda$  und  $\mu$  sind total-reell für  $H_2$  und komplex sonst.

b) Für die Anzahl  $g$  der verschiedenen Hauptkrümmungen gilt stets  $g \in \{2, 3\}$ .  $g = 2$  gilt für die folgenden Modellräume:  $H_{1,k}$  für  $k = 0$  und  $k = m-1$ ;  $H_2$  für  $r = \ln(2+\sqrt{3})$ ;  $H_3$ .

c) Ist  $M$  eine reelle Hyperfläche von  $\mathbb{C}H^m$  ( $m \geq 3$ ) mit zwei verschiedenen konstanten Hauptkrümmungen, so ist  $M$  eine Hopf-Hyperfläche ([Mo2], S.528). Für diese Situation hat Montiel auch eine vollständige Klassifikation angegeben ([Mo2], S.529).

d) Außer  $\mathbb{C}H^k$  für  $H_{1,k}$  und  $\mathbb{R}H^m$  für  $H_2$  existieren keine weiteren Fokalflächen (siehe auch Beispiel 1 bzw. 2 in 4.5).

e) Die Modellräume  $H_{1,k}, H_2$  und  $H_3$  sind homogene reelle Hyperflächen von  $\mathbb{C}H^m$  (vgl. 6.2). Andererseits hat jede homogene reelle Hyperfläche von  $\mathbb{C}H^m$  offenbar konstante Hauptkrümmungen. Es stellt sich also die Frage: "Ist jede

$$\rightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

homogene reelle Hyperfläche von  $\mathbb{C}H^m$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}H^m$ ? Bei einer positiven Antwort würde man mit Theorem 2 eine (bisher nicht bekannte) vollständige Klassifikation der homogenen reellen Hyperflächen von  $\mathbb{C}H^m$  erhalten. Die entsprechende Frage für  $\mathbb{C}P^m$  ist von Takagi positiv beantwortet worden ([Ta2], S.48).

f) Nach Beispiel 2 in 4.5 kann man jede Röhre um die komplexe Quadrik auch als Röhre um  $\mathbb{R}P^m$  betrachten. Man hat somit eine kanonische Analogie zwischen den Modellräumen  $P_2$  und  $H_2$ .

Kimuras Beweis für Theorem 1 läßt sich nicht auf die entsprechende Situation in  $\mathbb{C}H^m$  übertragen. Wir geben hierfür zwei wesentliche Gründe an. Erstens ist keine vollständige Klassifikation der homogenen reellen Hyperflächen von  $\mathbb{C}H^m$  bekannt; und zweitens berechnet Kimura die mögliche Anzahl der verschiedenen Hauptkrümmungen unter Verwendung des Theorems von Münzner [Mü] über die Anzahl der verschiedenen Hauptkrümmungen isoparametrischer Hyperflächen in der Sphäre. Entsprechende Aussagen im anti-de Sitter Raum sind nicht bekannt.

Unsere Beweisidee für Theorem 2 ist folgendermaßen. Zunächst (Teil I) leiten wir eine Gleichung (siehe Theorem 3) in komplexen Raumformen her, die E. Cartans "Fundamentalformel" in reellen Raumformen entspricht ([Ca], S.180). Mit Hilfe dieser "Fundamentalformel" können wir die mögliche Anzahl der verschiedenen Hauptkrümmungen von  $M$  sowie die möglichen Werte der Hauptkrümmungen berechnen. Die Behauptung folgern wir dann aus Untersuchungen über die Geometrie der Fokal- bzw. Parallelfächen von  $M$  (Teil II).

### I. Cartans Fundamentalformel in komplexen Raumformen

Seien  $M$  eine zusammenhängende orientierbare Hopf-Hyperfläche einer komplexen Raumform  $\bar{M}$  der holomorphen Schnittkrümmung  $c \neq 0$  und  $\xi$  ein globales Einheitsnormalenfeld auf  $M$ . Wir setzen voraus, daß  $M$  konstante Hauptkrümmungen hat. Weiterhin sei  $\alpha := \langle AU, U \rangle$  die zum Hopf-Feld  $U := -J\xi$  gehörige Hauptkrümmung (vgl. Satz 1 in 5.2), also  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $AU = \alpha U$ . Mit  $\sigma(\mathcal{D})$  bezeichnen wir das Spektrum von  $A|_{\mathcal{D}}$ . Die Definition von  $\sigma(\mathcal{D})$  ist unabhängig vom Punkt; ferner ist  $\alpha \in \sigma(\mathcal{D})$  möglich. Ist  $\lambda \in \sigma(\mathcal{D})$ , so bezeichnen wir mit  $T_\lambda$  das Untervektorbündel von  $\mathcal{D}$ , das durch die Eigenräume von  $A|_{\mathcal{D}}$  bezüglich  $\lambda$  definiert ist.

Die folgende Tatsache wird häufiger ausgenutzt werden: Für alle  $\lambda, \mu \in \sigma(\mathcal{D})$ ,  $X \in \mathcal{X}(M)$ ,  $Y \in \Gamma(T_\lambda)$  und  $Z \in \Gamma(T_\mu)$  gilt

$$\langle (\nabla_X A)Y, Z \rangle = (\lambda - \mu) \langle \nabla_X Y, Z \rangle .$$

**Lemma 1:** Für alle  $\lambda, \mu \in \sigma(\mathcal{D})$  gilt

$$(16) \quad \nabla_X Y + \lambda \langle PX, Y \rangle U \in \Gamma(T_\lambda) \quad , \quad \text{falls } X, Y \in \Gamma(T_\lambda) \quad ,$$

$$(17) \quad \nabla_X Y \perp T_\lambda \quad , \quad \text{falls } X \in \Gamma(T_\lambda), Y \in \Gamma(T_\mu), \lambda \neq \mu .$$

**Anmerkung:** Bekanntlich sind in reellen Raumformen die Eigenbündel von Hyperflächen mit konstanten Hauptkrümmungen stets integrabel ([No], S.198). Aussage (16) zeigt, daß dies in nicht-euklidischen komplexen Raumformen nicht gilt:  $T_\lambda$  ist genau dann integrabel, wenn  $T_\lambda$  total-reell oder  $\lambda = 0$  ist; in beiden Fällen ist die induzierte Blätterung von  $M$  total-geodätisch (siehe auch 6.3).

*Beweis:* zu (16): Seien  $X, Y \in \Gamma(T_\lambda)$ ,  $Z \in \Gamma(T_\mu)$  und  $\lambda \neq \mu$ . Dann folgt mit der Codazzi-Gleichung

$$(18) \quad \begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{\lambda - \mu} \langle (\nabla_X A)Y, Z \rangle = \frac{1}{\lambda - \mu} \langle (\nabla_X A)Z, Y \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} \langle (\nabla_Z A)X, Y \rangle = 0 \end{aligned}$$

sowie mit der Ricci-Identität und (3)

$$(19) \quad \langle \nabla_X Y, U \rangle = -\langle \nabla_X U, Y \rangle = -\langle PAX, Y \rangle = -\lambda \langle PX, Y \rangle .$$

Aus (18) und (19) erhalten wir (16).

zu (17): Seien  $X, Z \in \Gamma(T_\lambda)$ ,  $Y \in \Gamma(T_\mu)$  und  $\lambda \neq \mu$ . Wiederum mit der Codazzi-Gleichung folgt

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{\mu - \lambda} \langle (\nabla_X A)Y, Z \rangle = \frac{1}{\mu - \lambda} \langle (\nabla_Y A)X, Z \rangle = 0. \quad \square$$

**Lemma 2:** Sei  $E_1, \dots, E_{2m-2}$  ein lokales orthonormales Basisfeld von  $\mathcal{D}$  mit  $AE_i = \lambda_i E_i$ . Dann gilt für jedes  $i \in \{1, \dots, 2m-2\}$

$$(20) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_i}}^{2m-2} \frac{c + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} (1 + 2 \langle PE_i, E_j \rangle^2) = 0 .$$

*Beweis:* Sei im folgenden  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Mit der Codazzi-Gleichung, der Ricci-Identität und (3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \langle \nabla_{[E_i, E_j]} A E_i, E_j \rangle \\
 &= \langle \nabla_{E_i} A [E_i, E_j], E_j \rangle + \frac{c}{4} \langle [E_i, E_j], U \rangle \langle P E_i, E_j \rangle \\
 &= \langle \nabla_{E_i} A E_j, [E_i, E_j] \rangle - \frac{c}{4} (\lambda_i + \lambda_j) \langle P E_i, E_j \rangle^2 \\
 &= \langle \nabla_{E_j} A E_i, \nabla_{E_i} E_j \rangle + \frac{c}{2} \lambda_i \langle P E_i, E_j \rangle^2 \\
 &\quad - \langle \nabla_{E_i} A E_j, \nabla_{E_j} E_i \rangle - \frac{c}{4} (\lambda_i + \lambda_j) \langle P E_i, E_j \rangle^2 \\
 &= (\lambda_i - \lambda_j) (\langle \nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_j} E_i \rangle + \frac{c}{4} \langle P E_i, E_j \rangle^2) .
 \end{aligned}$$

Mit (3), (17), der Codazzi-Gleichung und der Ricci-Identität gilt

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & \langle \nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_j} E_i \rangle \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_i, \lambda_j}}^{2m-2} \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle + \langle \nabla_{E_i} E_j, U \rangle \langle \nabla_{E_j} E_i, U \rangle \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_i, \lambda_j}}^{2m-2} \frac{\langle \nabla_{E_k} A E_i, E_j \rangle^2}{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_k)} - \lambda_i \lambda_j \langle P E_i, E_j \rangle^2 .
 \end{aligned}$$

Weiterhin folgt mit der Gauß-Gleichung zweiter Ordnung, (16), (17), (21) sowie der Ricci-Identität

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & \left( \frac{c}{4} + \lambda_i \lambda_j \right) + \frac{3}{4} c \langle P E_i, E_j \rangle^2 = \langle R(E_i, E_j) E_j, E_i \rangle \\
 &= \langle \nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_j} E_i \rangle - \langle \nabla_{[E_i, E_j]} E_j, E_i \rangle \\
 &= \langle \nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_j} E_i \rangle + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \langle \nabla_{[E_i, E_j]} A E_i, E_j \rangle \\
 &= 2 \langle \nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_j} E_i \rangle + \frac{c}{4} \langle P E_i, E_j \rangle^2 .
 \end{aligned}$$

Durch Kombination von (22) und (23) erhalten wir

$$(24) \quad \left( \frac{c}{4} + \lambda_j \lambda_i \right) (1 + 2 \langle P E_i, E_j \rangle^2) = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_i, \lambda_j}}^{2m-2} \frac{\langle \nabla_{E_k} A E_i, E_j \rangle^2}{(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_k)} .$$

Aus (24) folgt mit der Codazzi-Gleichung

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_i}}^{2m-2} \frac{\frac{c}{4} + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} (1 + 2 \langle P E_i, E_j \rangle^2) = - \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_i}}^{2m-2} \frac{\frac{c}{4} + \lambda_i \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} (1 + 2 \langle P E_i, E_k \rangle^2) .$$

Damit ist Lemma 2 bewiesen.  $\square$

**Lemma 3:** Ist  $\alpha^2 + c = 0$ , so gilt  $\sigma(\mathcal{D}) = \{\frac{\alpha}{2}\}$ ; insbesondere hat  $M$  in diesem Fall genau zwei verschiedene Hauptkrümmungen.

*Beweis:* Nach Satz 5.2 (i) ist  $\frac{\alpha}{2} \in \sigma(\mathcal{D})$ . Mit  $E_1, \dots, E_{2m-2}$  wie in Lemma 2 gilt dann mit (20)

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \frac{\alpha}{2}}}^{2m-2} \frac{\frac{c}{4} + \frac{\alpha}{2} \lambda_j}{\frac{\alpha}{2} - \lambda_j} (1 + 2 \langle P E_i, E_j \rangle^2) \\
 &= - \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \frac{\alpha}{2}}}^{2m-2} (1 + 2 \langle P E_i, E_j \rangle^2) ,
 \end{aligned}$$

woraus  $\sigma(\mathcal{D}) = \{\frac{\alpha}{2}\}$  folgt.  $\square$

**Anmerkung:** Für Lemma 3 ist die Voraussetzung  $c \neq 0$  wesentlich. Die Behauptung ist im Falle  $c = 0$  nicht immer richtig; z.B. gilt für die Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{C}^m$  stets  $\alpha = 0$  (also  $\alpha^2 + c = 0$ ), aber  $\sigma(\mathcal{D}) = \{0, \frac{1}{r}\}$  (dies weist man leicht mit Korollar 4.4 nach).

**Theorem 3:** Zu jedem  $\lambda \in \sigma(\mathcal{D})$  existiert genau ein  $\lambda^* \in \sigma(\mathcal{D})$ , so daß  $J T_\lambda = T_{\lambda^*}$  und

$$\sum_{\substack{\mu \in \sigma(\mathcal{D}) \\ \mu \neq \lambda}} m_\mu \frac{\frac{c}{4} + \lambda \mu}{\lambda - \mu} + Q(\lambda^*) = 0 ,$$

wobei  $m_\mu$  die Vielfachheit des Eigenwertes  $\mu$  bezüglich  $A|_{\mathcal{D}}$  und

$$Q(\lambda^*) := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \lambda = \lambda^* \\ 2 \frac{\frac{c}{4} + \lambda \lambda^*}{\lambda - \lambda^*} & , \text{ falls } \lambda \neq \lambda^* \end{cases}$$

ist.

*Beweis:* Die Behauptung folgt aus Theorem 2 in 5.2, Lemma 2 und Lemma 3.  $\square$

**Korollar:** Ist  $c < 0$ , so gilt  $\#\sigma(\mathcal{D}) \in \{1, 2\}$  und im Fall  $\sigma(\mathcal{D}) = \{\lambda, \mu\}$ ,  $\lambda \neq \mu$ , gilt  $\frac{c}{4} + \lambda \mu = 0$ . Insbesondere hat also  $M$  höchstens drei verschiedene Hauptkrümmungen, falls  $c < 0$ .

*Beweis:* Sei  $\#\sigma(\mathcal{D}) > 1$ . Dann können wir ein  $\lambda \in \sigma(\mathcal{D})$  wählen, wobei wir ohne Einschränkung  $\lambda > 0$  annehmen dürfen, so daß zwischen  $\lambda$  und  $-\frac{\epsilon}{4\lambda}$  keine weiteren Elemente aus  $\sigma(\mathcal{D})$  liegen. Dann gilt für jedes  $\mu \in \sigma(\mathcal{D})$  mit  $\mu \neq \lambda$

$$\frac{\frac{\epsilon}{4} + \lambda\mu}{\lambda - \mu} \leq 0 .$$

Die Behauptung folgt dann mit Theorem 3.  $\square$

## II. Beweis von Theorem 2

Die folgenden Überlegungen gelten zunächst nur lokal. Aufgrund des Kollars gilt  $\#\sigma(\mathcal{D}) \in \{1, 2\}$  und  $\lambda\mu = 1$  falls  $\sigma(\mathcal{D}) = \{\lambda, \mu\}$ ,  $\lambda \neq \mu$ . Mit Lemma 3 und Theorem 2 (ii) in 5.2 ergeben sich dann (bis auf Vorzeichen) die folgenden Möglichkeiten für die Hauptkrümmungen von  $M$ :

- (a)  $\lambda = \tanh(r)$ ,  $\mu = \coth(r)$ ,  $\alpha = 2 \coth(2r)$ ,  
 $JT_\lambda = T_\lambda$ ,  $JT_\mu = T_\mu$ ,  $k := \dim_{\mathbb{C}} T_\lambda \in \{0, \dots, m-1\}$ ,
- (b)  $\lambda = \tanh(r)$ ,  $\mu = \coth(r)$ ,  $\alpha = 2 \tanh(2r)$ ,  $JT_\lambda = T_\mu$ ,
- (c)  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 2$ .

Hierbei ist  $r \in \mathbb{R}_+$  beliebig wählbar. Beachte, daß in (a) für  $k = 0$  und  $k = m-1$  nur zwei verschiedene Hauptkrümmungen vorkommen. In allen Fällen gilt  $\alpha \neq 0$ , woraus leicht die Existenz eines globalen Einheitsnormalenfeldes auf  $M$  folgt. Aufgrund der Orientierbarkeit von  $\mathbb{C}H^m$  ist daher  $M$  orientierbar.

Fall (a): Mit Theorem 3 in 5.2 folgt, daß  $M$  lokal auf einer Röhre vom Radius  $r$  um eine  $k$ -dimensionale komplexe total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}H^m$  liegt. Mit Standardargumenten ( $M$  zusammenhängend, Starrheit total-geodätischer Untermannigfaltigkeiten, komplexe freie Beweglichkeit in  $\mathbb{C}H^m$ ) sieht man leicht ein, daß  $M$  holomorph kongruent zu einem offenen Teil der Röhre vom Radius  $r$  um  $\mathbb{C}H^k$  ist.

Fall (b): Mit Theorem 3 in 5.2 folgt, daß  $M$  lokal auf einer Röhre vom Radius  $r$  um eine  $m$ -dimensionale anti-holomorphe total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}H^m$  liegt. Wiederum mit Standardargumenten folgt, daß  $M$  holomorph kongruent zu einem offenen Teil der Röhre vom Radius  $r$  um  $\mathbb{R}H^m$  ist.

Fall (c): Wir wählen auf  $M$  ein globales Einheitsnormalenfeld  $\xi$  derart, daß  $M$  positive Hauptkrümmungen hat. Für  $p \in M$  bezeichne  $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}H^m$  die Geodätische von  $\mathbb{C}H^m$  mit  $\gamma_p(0) = p$  und  $\dot{\gamma}_p(0) = \xi_p$ ; für  $v \in T_p M$  sei  $B_v$  das parallele Vektorfeld längs  $\gamma_p$  mit  $B_v(0) = v$ . Seien nun  $r \in \mathbb{R}_+$  beliebig und

$$\Phi : M \longrightarrow \mathbb{C}H^m, p \longmapsto \exp^{\perp}(r\xi_p) = \gamma_p(r)$$

die Parallelabbildung von  $M$  in Richtung  $\xi$  vom Abstand  $r$ . Mit Theorem 4.5 sowie der expliziten Darstellung der  $M$ -Jacobifelder in  $\mathbb{C}H^m$  (vgl. 4.2, die Bedingung (K) ist nach Satz 1 in 5.2 erfüllt) folgt

$$\Phi_* v = \begin{cases} e^{-r} B_v(r) & , \text{ für } v \in T_{\lambda=1} \\ e^{-2r} B_v(r) & , \text{ für } v \in \mathbb{R}U \end{cases} .$$

Daher gilt  $\|\Phi_* v\| \leq e^{-r} \|v\|$  für alle  $v \in TM$ . Ist  $\beta : [0, 1] \rightarrow M$  eine Kurve, so können wir die Länge  $L(\Phi \circ \beta)$  von  $\Phi \circ \beta$  durch  $L(\Phi \circ \beta) \leq e^{-r} L(\beta)$  abschätzen. Folglich gilt für beliebige  $p, q \in M$

$$(25) \quad \bar{d}(\gamma_p(r), \gamma_q(r)) \leq e^{-r} d(p, q)$$

und daher

$$(26) \quad \begin{aligned} \bar{d}(q, \gamma_p(r)) - r &= \bar{d}(q, \gamma_p(r)) - \bar{d}(q, \gamma_q(r)) \\ &\leq \bar{d}(\gamma_p(r), \gamma_q(r)) \leq e^{-r} d(p, q) . \end{aligned}$$

Für  $p \in M$  bezeichne  $F_p$  die Busemann-Funktion von  $\mathbb{C}H^m$  bezüglich  $\gamma_p$  (vgl. 2.2 (v)). Dann gilt nach (26) für beliebige  $p, q \in M$

$$(27) \quad F_p(q) \leq 0 .$$

Seien  $p, q \in M$ . Nach (25) sind  $\gamma_p$  und  $\gamma_q$  asymptotisch. Daher existiert ein  $b \in \mathbb{R}$  mit  $F_p - F_q = b$  (vgl. Anmerkung e) zu 2.2 (v)). Wegen

$$F_p(q) = F_p(q) - F_q(q) = b = F_p(p) - F_q(p) = -F_q(p)$$

folgt mit (27)

$$(28) \quad F_p(q) = 0 .$$

Für  $p \in M$  gilt daher nach (28)  $M \subset F_p^{-1}(\{0\})$ , d.h.  $M$  ist offener Teil einer Horosphäre in  $\mathbb{C}H^m$ .  $\square$

Der Vollständigkeit halber geben wir auch die Klassifikation der Hopf-Hyperflächen von  $\mathbb{C}^m$  mit konstanten Hauptkrümmungen an.

**Theorem 4:** Sei  $M$  eine zusammenhängende Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}^m$  ( $m \geq 2$ ) mit konstanten Hauptkrümmungen. Dann ist  $M$  orientierbar und offener Teil einer Röhre um eine komplexe oder anti-holomorphe total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}^m$ , d.h. genauer:  $M$  ist holomorph kongruent zu einem offenen Teil einer der folgenden reellen Hyperflächen von  $\mathbb{C}^m$ :

- $E_{1,k}$ : einer Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{C}^k$  in  $\mathbb{C}^m$  für ein  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ ;
- $E_{2,k}$ : einer Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{R}^{k+m} \approx \mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$  in  $\mathbb{C}^m$  für ein  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ .

*Beweis:* Aufgrund der Klassifikation der isoparametrischen Hyperflächen im euklidischen Raum von Segre [Se] muß  $M$  auf einer Röhre um eine total-geodätische Untermannigfaltigkeit  $N$  von  $\mathbb{C}^m$  liegen.  $N$  ist nach Theorem 3 in 5.2 komplex oder anti-holomorph. Andererseits ist jede Röhre um eine komplexe oder anti-holomorphe total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}^m$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}^m$  mit konstanten Hauptkrümmungen (man wende Korollar 4.4 und Satz 1 in 5.2 an). Mit der wohlbekannten Klassifikation der total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{C}^m$  folgt schließlich die Behauptung.  $\square$

#### 5.4 Reelle Hyperflächen mit Sasaki-Struktur

In diesem Abschnitt klassifizieren wir die orientierbaren reellen Hyperflächen von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$ , deren kanonische fast-kontakt metrische Struktur homothetisch zu einer Sasaki-Struktur ist. Dazu fassen wir zunächst die wichtigsten Begriffe zusammen.

Sei  $N$  eine  $(2n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ( $n \in \mathbb{N}_+$ ). Eine *fast-kontakt metrische Struktur*  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  auf  $N$  besteht aus einem  $(1,1)$ -Tensorfeld  $\varphi$ , einem Vektorfeld  $\xi$ , einer 1-Form  $\eta$  und einer Riemannschen Metrik  $g$  auf  $N$  mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1, \\ \varphi^2 X &= -X + \eta(X)\xi, \\ g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ . Gilt zusätzlich für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$

$$(29) \quad (\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X$$

wobei  $\nabla$  die Levi-Civita-Ableitung von  $N$  bezüglich  $g$  ist, so heißt  $N$  eine *Sasaki-Mannigfaltigkeit* mit der *Sasaki-Struktur*  $(\varphi, \xi, \eta, g)$ . Die Riemannsche Schnittkrümmung von  $N$  bezüglich eines 2-dimensionalen  $\varphi$ -invarianten Untervektorraums  $\sigma$  von  $T_p N$  ( $p \in N$ ) heißt die  $\varphi$ -Schnittkrümmung von  $N$  bezüglich  $\sigma$ . Eine zusammenhängende Sasaki-Mannigfaltigkeit mit konstanter  $\varphi$ -Schnittkrümmung heißt *Sasaki-Raumform*. Die Standardmodelle für Sasaki-Raumformen der  $\varphi$ -Schnittkrümmung  $c \in \mathbb{R}$  sind  $S^{2n+1}(c > -3)$ ,  $\mathbb{R}^{2n+1}(c = -3)$  und  $\mathbb{C}H^n \times \mathbb{R}(c < -3)$  ([Ta4]). Eine fast-kontakt metrische Struktur  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  auf  $N$  heißt *homothetisch zu einer Sasaki-Struktur*, wenn ein  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  existiert, so daß  $(\varphi, \frac{1}{\lambda}\xi, \lambda\eta, \lambda^2 g)$  eine Sasaki-Struktur auf  $N$  ist.

**Anmerkung:** Die hier angeführte Definition einer Sasaki-Mannigfaltigkeit ist äquivalent zu der in der Literatur üblichen Definition ([Bl], S.73). Grundlagen über Sasaki-Mannigfaltigkeiten und Sasaki-Raumformen findet man in [Bl],

Chapter IV-V. Die Bedeutung von Sasaki-Strukturen für Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension entspricht etwa der Bedeutung von Kähler-Strukturen für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension. Für Zusammenhänge zwischen Sasaki-Strukturen und Kähler-Strukturen siehe beispielsweise [Re5].

Ist  $M$  eine orientierbare reelle Hyperfläche einer komplexen Raumform  $\overline{M}$ , so ist  $(P, U, \langle \cdot, \cdot \rangle, U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine fast-kontakt metrische Struktur auf  $M$  ([Ta5]); hierbei ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die induzierte Metrik auf  $M$ . Wir nennen diese Struktur die *kanonische fast-kontakt metrische Struktur* auf  $M$ .

**Theorem:** Sei  $M$  eine zusammenhängende orientierbare reelle Hyperfläche von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  ( $m \geq 2$ ). Die kanonische fast-kontakt metrische Struktur auf  $M$  ist genau dann homothetisch zu einer Sasaki-Struktur auf  $M$ , wenn  $M$  holomorph kongruent ist zu einem offenen Teil

- a) für  $\mathbb{C}P^m$ : einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $r \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  in  $\mathbb{C}P^m$ .
- b) für  $\mathbb{C}H^m$ : einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  in  $\mathbb{C}H^m$ ; oder einer Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{C}H^{m-1}$  in  $\mathbb{C}H^m$ ; oder einer Horosphäre in  $\mathbb{C}H^m$ .

**Anmerkungen:** a) Die in diesem Theorem angeführten Modellräume  $P_{1,0}$ ,  $H_{1,0}$ ,  $H_{1,m-1}$ ,  $H_3$  sind sogar homothetisch zu Sasaki-Raumformen. Genauer gilt: Wählt man  $\lambda$  wie in folgender Tabelle, so ist  $(M, \lambda^2 \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Sasaki-Raumform der  $\varphi$ -Schnittkrümmung  $c = 1 + 4\varepsilon/\lambda^2$ , wobei  $\varepsilon = +1$  im projektiven Fall bzw.  $\varepsilon = -1$  im hyperbolischen Fall ist.

$M$	$\lambda$	$c$
$P_{1,0}$	$\cot(r)$	$1 + 4 \tan^2(r)$
$H_{1,0}$	$\coth(r)$	$1 - 4 \tanh^2(r)$
$H_{1,m-1}$	$\tanh(r)$	$1 - 4 \coth^2(r)$
$H_3$	1	-3

Tabelle 9: Sasaki-Strukturen der Modellräume  $P_{1,0}$ ,  $H_{1,0}$ ,  $H_{1,m-1}$ ,  $H_3$

b) Geodätische Hypersphären vom Radius  $\frac{\pi}{4}$  in  $\mathbb{C}P^m$  bzw. Horosphären in  $\mathbb{C}H^m$  (oder offene Teile davon) sind also die einzigen zusammenhängenden orientierbaren reellen Hyperflächen von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$ , deren kanonische fast-kontakt metrische Struktur eine Sasaki-Struktur ist.

*Beweis:* Sei  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , so daß  $(P, \frac{1}{\lambda}U, \lambda \langle \cdot, U \rangle, \lambda^2 \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Sasaki-Struktur auf  $M$  ist. Nach (29) gilt für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(30) \quad (\nabla_X P)Y = \lambda(\langle X, Y \rangle U - \langle Y, U \rangle X) .$$

Mit  $X = Y = U$  erhalten wir aus (30) mit (2), (3)

$$(31) \quad 0 = (\nabla_U P)U = -P\nabla_U U = -P^2 AU = AU - \alpha U ,$$

wobei  $\alpha := \langle AU, U \rangle$  nach Theorem 1 in 5.2 konstant ist. Wegen (31) ist  $M$  eine Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  (vgl. Satz 1 in 5.2). Aus (30) und (31) folgt dann analog mit  $X \in \Gamma(\mathcal{D})$  und  $Y = U$

$$-\lambda X = (\nabla_X P)U = -P\nabla_X U = -P^2 AX = AX .$$

$M$  ist also eine Hopf-Hyperfläche von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  mit höchstens zwei verschiedenen konstanten Hauptkrümmungen. Mit den Klassifikationen in 5.3 sowie den entsprechenden Anmerkungen über die Hauptkrümmungen folgt die Behauptung.

Die Werte der  $\varphi$ -Schnittkrümmungen in Anmerkung a) berechnet man leicht mit der Gauß-Gleichung zweiter Ordnung (beachte hierbei die homothetische Änderung der Metrik).  $\square$

### 5.5 Kontakt-Hyperflächen

Seien  $M$  eine orientierbare reelle Hyperfläche einer  $m$ -dimensionalen komplexen Raumform  $\bar{M}$  der holomorphen Schnittkrümmung  $c$  und  $(P, U, \eta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  die kanonische fast-kontakt metrische Struktur auf  $M$  (vgl. 5.4). Gilt  $\eta \wedge (d\eta)^{m-1} \neq 0$ , so heißt  $M$  eine *Kontakt-Hyperfläche* von  $\bar{M}$ . Okumura hat in [Ok2] gezeigt, daß eine Kontakt-Hyperfläche  $M$  von  $\bar{M}$  konstante Hauptkrümmungen hat (und zwar höchstens drei verschiedene), wobei das Hopf-Feld  $U$  in jedem Punkt eine Hauptkrümmungsrichtung von  $M$  ist ( $M$  ist also nach Satz 1 in 5.2 eine Hopf-Hyperfläche von  $\bar{M}$ ), sowie die Bedingung  $AP + PA = 2\rho P$  mit einer reellen Zahl  $\rho \neq 0$  erfüllt. Mit Theorem 1 und Theorem 2 in 5.3 sowie den entsprechenden Anmerkungen über die Hauptkrümmungen folgt mit elementarer Rechnung:

**Theorem:** Sei  $M$  eine zusammenhängende Kontakt-Hyperfläche von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  ( $m \geq 2$ ). Dann ist  $M$  holomorph kongruent zu einem offenen Teil

- a) für  $\mathbb{C}P^m$ : einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $r \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  in  $\mathbb{C}P^m$ ; oder einer Röhre vom Radius  $r \in ]0, \frac{\pi}{4}[$  um die komplexe Quadrik  $Q^{m-1}$  in  $\mathbb{C}P^m$ .
- b) für  $\mathbb{C}H^m$ : einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  in  $\mathbb{C}H^m$ ; oder einer Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{C}H^{m-1}$  in  $\mathbb{C}H^m$ ; oder einer Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{R}H^m$  in  $\mathbb{C}H^m$ ; oder einer Horosphäre in  $\mathbb{C}H^m$ .

**Anmerkungen:** a) Kon (für  $\mathbb{C}P^m$ ; [Ko], S.348) und Vernon (für  $\mathbb{C}H^m$ ; [Ve], S.221) haben dieses Resultat unter den zusätzlichen Voraussetzungen " $M$  vollständig" und " $m \geq 3$ " bewiesen.

b) Jede zu einer Sasaki-Mannigfaltigkeit homothetische Mannigfaltigkeit ist eine Kontakt-Mannigfaltigkeit. Daher läßt sich Theorem 5.4 auch aus Theorem 5.5 folgern. Wir wollen aber bemerken, daß der hier angeführte Beweis von Theorem 5.4 sehr einfach ist.

c) Zur Theorie über Kontakt-Mannigfaltigkeiten siehe [Bl].

§6: Zur Geometrie der Hopf-Hyperflächen von  $\mathbb{C}P^m$  und  $\mathbb{C}H^m$  mit konstanten Hauptkrümmungen

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Geometrie der Modellräume  $P_{1,k}, P_2, P_3, P_4, P_5$  (vgl. Theorem 1 in 5.3) sowie  $H_{1,k}, H_2, H_3$  (vgl. Theorem 2 in 5.3). Mit  $\bar{M}$  bezeichnen wir eine der beiden komplexen Raumformen  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$ , und  $M$  sei einer der oben genannten Modellräume. Mit Ausnahme der Horosphäre  $H_3$  handelt es sich dabei um Röhren. Für alles folgende gelte  $r :=$  Radius der Röhre  $M (\neq H_3)$ , also

$$\begin{aligned} r \in ]0, \frac{\pi}{2}[ & \text{ für } M = P_{1,k}, \\ r \in ]0, \frac{\pi}{4}[ & \text{ für } M = P_2 - P_5, \\ r \in \mathbb{R}_+ & \text{ für } M = H_{1,k}, H_2. \end{aligned}$$

$\varepsilon :=$  Vorzeichen der Schnittkrümmung von  $\bar{M}$ .

Im projektiven Fall kann man  $M$  als Röhre um zwei verschiedene Fokalflächen auffassen. Wir bleiben im folgenden aber stets bei der Festlegung aus Theorem 1 in 5.3.  $\xi$  sei das globale Einheitsnormalenfeld auf  $M$ , so daß die Hauptkrümmungen von  $M$  denen in Tabelle 6 bzw. Tabelle 8 in 5.3 entsprechen. Ferner sei  $\alpha$  die Hauptkrümmung von  $M$  zum Hopf-Feld  $U := -J\xi$ . Für  $p \in M$  bezeichnen wir mit  $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}$  die Geodätische von  $\bar{M}$  mit  $\gamma_p(0) = p$  und  $\dot{\gamma}_p(0) = \xi_p$ . Ferner definieren wir  $\sigma(\mathcal{D}) := \text{Spec}(A|\mathcal{D})$  und bezeichnen für  $\lambda \in \sigma(\mathcal{D})$  mit  $T_\lambda \subset \mathcal{D}$  das zugehörige Vektorbündel der Eigenräume von  $A|\mathcal{D}$  bezüglich  $\lambda$ .

6.1 Die Integralkurven des Hopf-Feldes  $U$

**Satz:** (i) Die Integralkurven von  $U$  sind Geodätische in  $M$  und sphärische Kurven in  $\bar{M}$ ; in den Räumen  $P_{1,k}, P_2 - P_5$  sowie  $H_{1,k}$  sind sie geschlossen. Für die geodätische Krümmung in  $\bar{M}$  und die Länge der Integralkurven von  $U$  gilt:

$M$	geodätische Krümmung	Länge
$P_{1,k}$	$2 \cot(2r) $	$\pi \sin(2r)$
$P_2 - P_5$	$2 \cot(2r)$	$\pi \sin(2r)$
$H_{1,k}$	$2 \coth(2r)$	$\pi \sinh(2r)$
$H_2$	$2 \tanh(2r)$	—
$H_3$	2	—

(ii) Seien  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Integralkurve von  $U$  und  $p := \gamma(0)$ . Weiterhin sei  $B$  die zu  $\mathbb{C}P^1$  bzw.  $\mathbb{C}H^1$  holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  mit  $p \in B$  und  $T_p B = \mathbb{C}\dot{\gamma}(0) = \mathbb{C}\xi_p$ . Dann verläuft  $\gamma$  in dem 1-dimensionalen Durchschnitt von  $M$  und  $B$ .

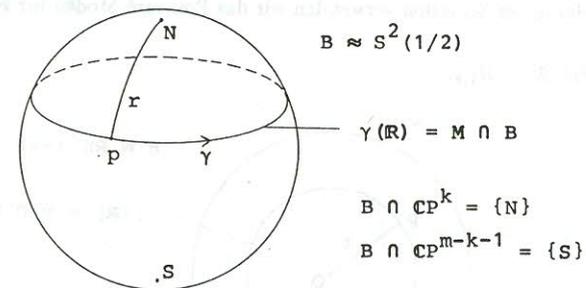
*Beweis:* Man wende Theorem 1 in 5.2 an. □

**Anmerkung:** Die Röhren vom Radius  $\frac{\pi}{4}$  um  $\mathbb{C}P^k, k \in \{0, \dots, m-1\}$ , in  $\mathbb{C}P^m$  sind die einzigen der Modellräume, bei denen die Integralkurven von  $U$  sogar Geodätische im umgebenden Raum sind.

Wir wollen die Aussage (ii) etwas genauer beschreiben.

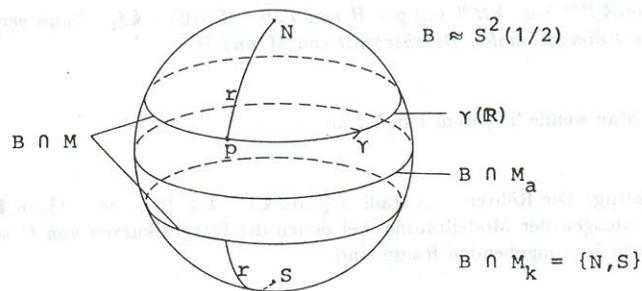
a) Im projektiven Fall ist  $B$  isometrisch zur 2-dimensionalen Riemannschen Sphäre  $S^2(\frac{1}{2})$  vom Radius  $\frac{1}{2}$  (vgl. 1.10). Mit Hilfe der "Uhren" gemäß 4.5 (für  $P_3, P_4$  und  $P_5$  sind die "Uhren" vom gleichen Typ wie für  $P_2$ ) erhält man die folgenden Bilder:

1. Der Fall  $M = P_{1,k}$ :



Der Durchschnitt von  $M$  und  $B$  ist in diesem Fall sogar gleich  $\gamma(\mathbb{R})$ ; der Durchschnitt von  $B$  und der Fokalfläche  $\mathbb{C}P^k$  (bzw. der zu  $\mathbb{C}P^{m-k-1}$  holomorph kongruenten Fokalfläche von  $M$ ) ist gerade der Nordpol  $N$  (bzw. der Südpol  $S$ ) von  $S^2(\frac{1}{2})$ .

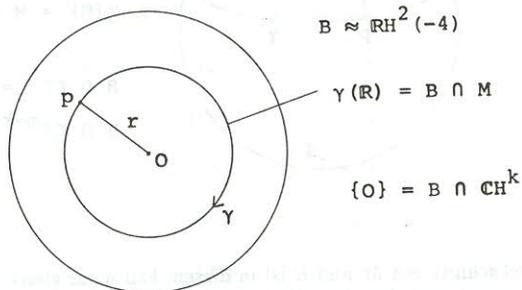
2. Der Fall  $M \in \{P_2, \dots, P_5\}$ :



Der Durchschnitt von  $M$  und  $B$  besteht aus zwei gleich großen "Breitenkreisen". Der Äquator von  $B$  ist der Durchschnitt von  $B$  und der anti-holomorphen Fokalfäche  $M_a$  von  $M$  (dieser Durchschnitt läßt sich somit durch eine Geodätische von  $M_a$  parametrisieren). Schließlich besteht der Durchschnitt von  $B$  und der komplexen Fokalfäche  $M_k$  von  $M$  genau aus dem Nord- und dem Südpol. (Zu den Fokalfächen von  $M$  vgl. Anmerkung d) zu Theorem 1 in 5.3.)

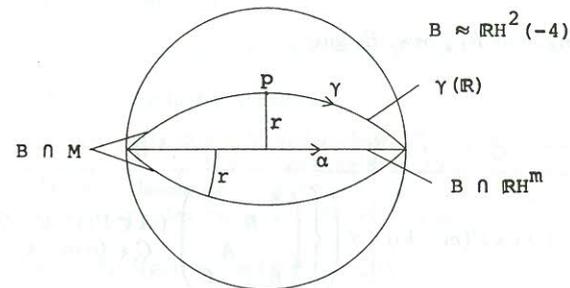
b) Im hyperbolischen Fall ist  $B$  isometrisch zum 2-dimensionalen reell hyperbolischen Raum  $\mathbb{RH}^2(-4)$  der konstanten Schnittkrümmung  $-4$ . Zur anschaulichen Beschreibung der Situation verwenden wir das Poincaré-Modell für  $\mathbb{RH}^2(-4)$ .

1. Der Fall  $M = H_{1,k}$ :



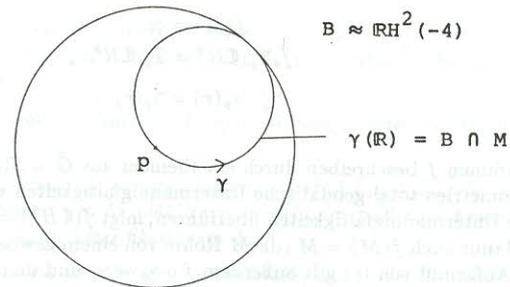
Der Durchschnitt von  $B$  und der Fokalfäche  $\mathbb{CH}^k$  ist ein Punkt  $O \in B$ ; der Durchschnitt von  $M$  und  $B$  ist ein Abstandskreis um  $O$  und daher gleich  $\gamma(\mathbb{R})$ .

2. Der Fall  $M = H_2$ :



Der Durchschnitt von  $B$  und der Fokalfäche  $\mathbb{RH}^m$  läßt sich durch eine Geodätische  $\alpha$  von  $\mathbb{RH}^m$  parametrisieren.  $B \cap M$  besteht dann aus den beiden Parallelkurven zu  $\alpha$  vom Abstand  $r$  in  $B$ .

3. Der Fall  $M = H_3$ :



Der Durchschnitt von  $M$  und  $B$  ist ein Horokreis in  $B$  und daher gleich  $\gamma(\mathbb{R})$ .

## 6.2 Homogenität

**Satz:** Jeder der Modellräume  $M$  ist eine homogene reelle Hyperfläche von  $\bar{M}$ , d.h. es existiert eine Untergruppe  $G$  der Isometriengruppe von  $\bar{M}$ , die  $M$  invariant läßt und transitiv auf  $M$  operiert. Somit "ist"  $M$  ein homogener Raum  $\tilde{G}/\tilde{H}$ . Insbesondere ist  $M$  vollständig.

**Anmerkung:** Für  $H_{1,k}$  bzw.  $H_2$  gilt:

	$\tilde{G}$	$\tilde{H}$
$H_{1,k}$	$S(U(1, k) \times U(m - k))$	$S \left( \left\{ \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & B & \\ 0 & & C \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} A \in U(1), B \in U(k), \\ C \in U(m - k - 1) \end{matrix} \right\} \right)$
$H_2$	$SO(1, m)$	$\left\{ \begin{pmatrix} \pm I_2 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in SO(m - 1) \right\}$

Eine entsprechende Darstellung von  $H_3$  mit Untergruppen von  $SU(1, m)$  ist dem Autor nicht bekannt. Für  $P_{1,k}, P_2 - P_5$  siehe [Ta1].

**Beweis:** zu  $H_{1,k}$ : Seien  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{C}H^k$  die Fokalabbildung von  $M = H_{1,k}$  auf  $\mathbb{C}H^k$ ,  $p, q \in M$ ,  $p_0 := \Phi(p)$  und  $q_0 := \Phi(q)$ . Aufgrund der komplexen freien Beweglichkeit in  $\mathbb{C}H^m$  (vgl. 1.13) existiert eine holomorphe Isometrie  $f$  von  $\mathbb{C}H^m$  mit

- (a)  $f(p_0) = q_0$ ,
- (b)  $f_* T_{p_0} \mathbb{C}H^k = T_{q_0} \mathbb{C}H^k$ ,
- (c)  $f_* \dot{\gamma}_p(r) = \dot{\gamma}_q(r)$ .

Wir können  $f$  beschreiben durch ein Element aus  $\tilde{G} = S(U(1, k) \times U(m - k))$ . Da Isometrien total-geodätische Untermannigfaltigkeiten wieder in total-geodätische Untermannigfaltigkeiten überführen, folgt  $f(\mathbb{C}H^k) = \mathbb{C}H^k$  aus (a) und (b) und damit auch  $f(M) = M$  (da  $M$  Röhre von einem gewissen Radius  $r$  um  $\mathbb{C}H^k$  ist). Aufgrund von (c) gilt außerdem  $f \circ \gamma_p = \gamma_q$  und damit auch  $f(p) = q$ . Da  $p, q \in M$  beliebig gewählt waren, operiert also  $\tilde{G}$  transitiv auf  $M$ . Eine leichte Rechnung zeigt, daß die Isotropiegruppe  $\tilde{H}$  von  $\tilde{G}$  in

$$p = [\cosh(r), 0, \dots, 0, \sinh(r), 0, \dots, 0] \in M,$$

wobei  $\sinh(r)$  an der  $(k + 2)$ -ten Stelle steht, der Darstellung in der Anmerkung entspricht.

zu  $H_2$ : Der Beweis verläuft analog. Wir betrachten hier die Fokalabbildung  $\Phi$  von  $M := H_2$  auf  $\mathbb{R}H^m$ . Die Bedingung (b) ersetzen wir durch  $f_* T_{p_0} \mathbb{R}H^m = T_{q_0} \mathbb{R}H^m$ . Wegen  $f_* J = J f_*$  können wir  $f$  tatsächlich so wählen, daß neben (a) und (b) auch (c) gilt.  $f$  wird beschrieben durch ein Element aus  $\tilde{G} = SO(1, m)$ . Die Isotropiegruppe  $\tilde{H}$  von  $\tilde{G}$  in

$$p = [\cosh(r), i \sinh(r), 0, \dots, 0] \in M$$

entspricht der Darstellung in der Anmerkung.

zu  $H_3$ : Seien  $M = H_3$ ,  $p, q \in M$  und  $F_p$  bzw.  $F_q$  die Busemann-Funktion von  $M$  bezüglich  $\gamma_p$  bzw.  $\gamma_q$ . Mit Anmerkung e) in 2.2 (v) folgt  $F_p = F_q$ . Sei nun  $f$  eine holomorphe Isometrie von  $\mathbb{C}H^m$  mit  $f(p) = q$  und  $f_* \xi_p = \xi_q$ . Dann gilt  $f \circ \gamma_p = \gamma_q$ , und für jeden Punkt  $p_0 \in M$  erhalten wir

$$\begin{aligned} F_p(f(p_0)) &= F_q(f(p_0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{d}(f(p_0), \gamma_q(t)) - t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{d}(f(p_0), f \circ \gamma_p(t)) - t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{d}(p_0, \gamma_p(t)) - t) = F_p(p_0), \end{aligned}$$

d.h. es gilt auch  $f(p_0) \in M$ . Somit haben wir  $f(M) \subset M$  gezeigt. Mit einer analogen Überlegung folgert man  $f^{-1}(M) \subset M$  und damit insgesamt  $f(M) = M$ . Da  $p, q \in M$  beliebig gewählt waren, folgt hiermit die Homogenität von  $M$ .

zu  $P_{1,k}, P_2 - P_5$ : siehe [Ta1]. □

## 6.3 Integrabilität der Eigenbündel

**Satz:** Sei  $\lambda \in \sigma(\mathcal{D})$ . Dann ist  $T_\lambda$  (bzw.  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U$ ) genau dann integrabel, wenn  $T_\lambda$  total-reell (bzw. komplex) ist. (Beachte, daß  $T_\lambda$  stets entweder komplex oder total-reell ist, vgl. 5.3.)

Im Falle der Integrabilität sind die Integral-Mannigfaltigkeiten total-geodätisch in  $M$ .

Ist  $T_\lambda$  total-reell, so ist jede Integral-Mannigfaltigkeit  $L$  von  $T_\lambda$  eine sphärische Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ ; das Normalenfeld der mittleren Krümmung von  $L$  in  $\bar{M}$  ist  $\lambda \xi|_L$  (siehe Klassifikation in 2.5)

Ist  $T_\lambda$  komplex, so ist jede Integral-Mannigfaltigkeit  $L$  von  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U$  eine reelle Hyperfläche in einer total-geodätischen komplexen Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$ ; und zwar hat  $L$  zwei konstante Hauptkrümmungen, nämlich  $\alpha$  und  $\lambda$ , wobei  $\alpha$  eine einfache Hauptkrümmung von  $L$  zur Hauptkrümmungsrichtung  $U|_L$  ist (siehe Klassifikationen in 2.4 und 5.3).

*Beweis:* Zunächst bemerken wir, daß im Fall  $\#\sigma(\mathcal{D}) = 1$  die Behauptung trivial ist (vgl. auch Satz 2 in 5.2). Wir setzen daher im folgenden  $\#\sigma(\mathcal{D}) \geq 2$  voraus. Sei  $\lambda \in \sigma(\mathcal{D})$ . Nach den Anmerkungen zu Theorem 1 sowie Theorem 2 in 5.3 ist  $T_\lambda$  komplex oder total-reell. Seien im folgenden  $\lambda \neq \mu \in \sigma(\mathcal{D})$ ,  $X \in \Gamma(T_\lambda)$  und  $Z \in \Gamma(T_\mu)$ . Dann gilt nach (3) in 5.1

$$(1) \quad \nabla_X U = PAX = \lambda PX \quad .$$

Mit der Codazzi-Gleichung sowie (1) folgt

$$(2) \quad \begin{aligned} \langle \nabla_U X, Z \rangle &= \frac{1}{\lambda - \mu} \langle (\nabla_U A)X, Z \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} (\langle (\nabla_X A)U, Z \rangle + \varepsilon \langle PX, Z \rangle) \\ &= \frac{\lambda(\alpha - \mu) + \varepsilon}{\lambda - \mu} \langle PX, Z \rangle \quad . \end{aligned}$$

Mit (1) und (2) erhalten wir

$$(3) \quad \langle [X, U], Z \rangle = \frac{\lambda^2 - \alpha\lambda - \varepsilon}{\lambda - \mu} \langle PX, Z \rangle \quad .$$

Weiterhin gilt nach Lemma 1 in 5.3

$$(4) \quad \nabla_X Y + \lambda \langle PX, Y \rangle U \in \Gamma(T_\lambda)$$

für alle  $X, Y \in \Gamma(T_\lambda)$ .

Ist  $T_\lambda$  integabel, so gilt nach (4)

$$0 = \langle [X, Y], U \rangle = -2\lambda \langle PX, Y \rangle$$

für alle  $X, Y \in \Gamma(T_\lambda)$ . Wegen  $\lambda \neq 0$  ist  $T_\lambda$  daher total-reell.

Ist  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U$  integabel, so gilt nach (3)

$$(5) \quad \lambda^2 - \alpha\lambda - \varepsilon = 0$$

oder

$$(6) \quad \langle PX, Z \rangle = 0 \quad \text{für alle } X \in \Gamma(T_\lambda), Z \in \Gamma(T_\mu), \mu \neq \lambda \quad .$$

Nach Theorem 2 in 5.2 gilt (5) genau dann, wenn  $T_\lambda$  komplex ist. Offenbar gilt (6) ebenfalls genau dann, wenn  $T_\lambda$  komplex ist. Für die Integribilität von  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U$  ist daher notwendig, daß  $T_\lambda$  komplex ist.

Sei nun  $T_\lambda$  total-reell. Nach (4) gilt dann  $\nabla_X Y \in \Gamma(T_\lambda)$  für alle  $X, Y \in \Gamma(T_\lambda)$ , d.h.  $T_\lambda$  ist integabel und die induzierte Blätterung von  $M$  ist total-geodätisch. Seien  $L$  eine Integral-Mannigfaltigkeit von  $T_\lambda$  und  $\tilde{\nabla}$  die Levi-Civita-Ableitung von  $L$ . Mit der Gauß-Gleichung folgt dann für alle  $X, Y \in \mathcal{X}(L)$

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \lambda \langle X, Y \rangle \xi|L = \tilde{\nabla}_X Y + \lambda \langle X, Y \rangle \xi|L \quad ,$$

d.h.  $L$  ist sphärisch in  $\bar{M}$  und  $\lambda \xi|L$  ist das Normalenfeld der mittleren Krümmung von  $L$  in  $\bar{M}$ .

Sei nun  $T_\lambda$  komplex. Nach (1), (2) und (4) ist dann  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U$  autoparallel, also integabel, und die induzierte Blätterung von  $M$  total-geodätisch. Sei  $L$  eine Integral-Mannigfaltigkeit von  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U$ . Mit (1), (2), der Gauß-Gleichung sowie der Weingarten-Gleichung folgt, daß  $E := (T_\lambda \oplus \mathbb{C}U)|L$  ein komplexer paralleler Constraint für  $L$  in  $T\bar{M}$  ist, d.h. für alle  $p \in L$  gilt  $T_p L \subset E_p$  und für alle  $X \in \mathcal{X}(L)$  und  $Z \in \Gamma(E)$  gilt  $\tilde{\nabla}_X Z \in \Gamma(E)$ . Ist  $p \in L$  und  $B$  die zusammenhängende komplexe total-geodätische vollständige Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$  mit  $p \in B$  und  $T_p B = E_p$  (zur Existenz von  $B$  siehe Theorem 2.4), so gilt daher  $L \subset B$  (vgl. [Re3], S.97). Mit der Weingarten-Gleichung folgt dann leicht der Rest der Behauptung.  $\square$

**Anmerkung:** Man kann die maximalen Integral-Mannigfaltigkeiten von  $T_\lambda$  bzw.  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U$  folgendermaßen konstruieren:

a) (Integral-Mannigfaltigkeiten als Fasern einer Fokalabbildung)

Im projektiven Fall läßt sich jede maximale Integral-Mannigfaltigkeit als Faser einer Fokalabbildung von  $M$  auf eine geeignete Fokalfläche realisieren: Sei  $\lambda \in \sigma(\mathcal{D})$ , also  $\lambda = \cot(s)$  für ein  $s \in \{r, r + \frac{\pi}{4}, r + \frac{\pi}{2}, r + \frac{3\pi}{4}\}$  (vgl. Tabelle 6 in 5.3). Dann ist  $\Phi_s : M \rightarrow N$ ,  $p \mapsto \gamma_p(s) = \exp^+(s\xi_p)$  eine Fokalabbildung von  $M$  auf eine Fokalfläche  $N$  von  $M$ . Es gilt  $T_\lambda = \text{Kern } \Phi_{s^*}$  (bzw.  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U = \text{Kern } \Phi_{s^*}$ ) genau dann, wenn  $s \in \{r + \frac{\pi}{4}, r + \frac{3\pi}{4}\}$  (bzw.  $s \in \{r, r + \frac{\pi}{2}\}$ ) ist, d.h. wenn  $T_\lambda$  total-reell (bzw. komplex) ist;  $N$  ist eine anti-holomorphe (bzw. komplexe) Fokalfläche von  $M$  (man beachte Theorem 3 in 5.2 sowie die Anmerkungen zu Theorem 1 in 5.3). Im hyperbolischen Fall läßt sich eine analoge Konstruktion nur für die Hauptkrümmungen der Form  $\lambda = \coth(r)$  durchführen; zu den Hauptkrümmungen der Form  $\lambda = \tanh(r)$  existiert keine geeignete Fokalfläche in  $\mathbb{C}H^m$ .

b) (Integral-Mannigfaltigkeiten als Durchschnitte von  $M$  mit total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten von  $\overline{M}$ )

Seien  $\lambda \in \sigma(\mathcal{D})$ ,  $p \in M$  und

$$\begin{aligned} n &:= \dim_{\mathbb{R}} T_{\lambda} & , & \text{ falls } T_{\lambda} \text{ total-reell} \\ n &:= \dim_{\mathbb{C}} T_{\lambda} & , & \text{ falls } T_{\lambda} \text{ komplex} \end{aligned}$$

Ferner sei  $B$  die zu

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^{n+1} \text{ bzw. } \mathbb{R}H^{n+1} & , & \text{ falls } T_{\lambda} \text{ total-reell} \\ \mathbb{C}P^{n+1} \text{ bzw. } \mathbb{C}H^{n+1} & , & \text{ falls } T_{\lambda} \text{ komplex} \end{aligned}$$

holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  mit  $p \in B$  und

$$\begin{aligned} T_p B &= T_{\lambda}(p) \oplus \mathbb{R}\xi_p & , & \text{ falls } T_{\lambda} \text{ total-reell} \\ T_p B &= T_{\lambda}(p) \oplus \mathbb{C}\xi_p & , & \text{ falls } T_{\lambda} \text{ komplex} \end{aligned}$$

Ist  $T_{\lambda}$  total-reell (bzw. komplex), so ist die maximale Integral-Mannigfaltigkeit von  $T_{\lambda}$  (bzw.  $T_{\lambda} \oplus \mathbb{R}U$ ) durch den Punkt  $p$  die Zusammenhangskomponente von  $M \cap B$ , die  $p$  enthält. (Zum Beweis: Der total-reelle Fall folgt mit dem vorhergehenden Satz und Theorem 2.5; der komplexe Fall wurde am Ende des Beweises zum vorhergehenden Satz untersucht.) Explizit erhalten wir folgende vollständige Übersicht:

Die maximale Integral-Mannigfaltigkeit von  $T_{\lambda}$  durch  $p$  ist holomorph kongruent zu

- einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $\frac{\pi}{4} + r$  in  $\mathbb{R}P^{n+1}$ , falls  $\lambda = \cot(r + \frac{\pi}{4})$ ,  $\overline{M} = \mathbb{C}P^m$ ;
- einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $\frac{\pi}{4} - r$  in  $\mathbb{R}P^{n+1}$ , falls  $\lambda = \cot(r + \frac{3\pi}{4})$ ,  $\overline{M} = \mathbb{C}P^m$ ;
- einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $r$  in  $\mathbb{R}H^{n+1}$ , falls  $\lambda = \coth(r)$ ,  $\overline{M} = \mathbb{C}H^m$ ,  $M = H_2$ ;
- einer Parallelfäche zu  $\mathbb{R}H^n$  vom Abstand  $r$  in  $\mathbb{R}H^{n+1}$ , falls  $\lambda = \tanh(r)$ ,  $\overline{M} = \mathbb{C}H^m$ ,  $M = H_2$ ;

die maximale Integral-Mannigfaltigkeit von  $T_{\lambda} \oplus \mathbb{R}U$  durch  $p$  ist holomorph kongruent zu

- einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $r$  in  $\mathbb{C}P^{n+1}$ , falls  $\lambda = \cot(r)$ ,  $\overline{M} = \mathbb{C}P^m$ ;
- einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $\frac{\pi}{2} - r$  in  $\mathbb{C}P^{n+1}$ , falls  $\lambda = \cot(r + \frac{\pi}{2})$ ,  $\overline{M} = \mathbb{C}P^m$ ;
- einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $r$  in  $\mathbb{C}H^{n+1}$ , falls  $\lambda = \coth(r)$ ,  $\overline{M} = \mathbb{C}H^m$ ,  $M = H_{1,k}$ ;
- einer Röhre vom Radius  $r$  um  $\mathbb{C}H^n$  in  $\mathbb{C}H^{n+1}$ , falls  $\lambda = \tanh(r)$ ,  $\overline{M} = \mathbb{C}H^m$ ,  $M = H_{1,k}$ .

(Der Fall  $\lambda = 1$ ,  $M = H_3$  ist uninteressant.)

**Korollar:** Sei  $\Phi$  die Fokalabbildung von  $M$  auf eine Fokalfläche  $N$  von  $M$  (siehe Anmerkung d) zu Theorem 1 bzw. Theorem 2 in 5.9). Dann gilt

(i) Kern  $\Phi_* = T_{\lambda}$  oder Kern  $\Phi_* = T_{\lambda} \oplus \mathbb{R}U$  für ein geeignetes  $\lambda \in \sigma(\mathcal{D})$ ; und zwar tritt der erste bzw. zweite Fall genau dann ein, wenn  $N$  anti-holomorph bzw. komplex ist.  $\Phi$  ist eine Submersion mit total-geodätischen Fasern. Ist  $N$  komplex (bzw. anti-holomorph), so ist jede Faser von  $\Phi$  (als Untermannigfaltigkeit von  $\overline{M}$ ) holomorph kongruent zu einer geodätischen Hypersphäre in einer zusammenhängenden vollständigen komplexen (bzw. total-reellen) total-geodätischen Untermannigfaltigkeit von  $\overline{M}$ .

(ii)  $\Phi$  ist ein  $C^{\infty}$ -Sphärenbündel über  $N$ .

*Beweis:* zu (i): Die Behauptung folgt aus dem vorhergehenden Satz und der Anmerkung a).

zu (ii): Jede solche geodätische Hypersphäre gemäß (i) ist diffeomorph zu einer Sphäre. Die Behauptung folgt dann mit einem Resultat von Ehresmann ([Eh], S.31).  $\square$

#### 6.4 Diffeomorphie- bzw. Isometrietypen

**Satz:** (i)  $H_{1,k}$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{R}^{2k} \times S^{2(m-k-1)+1}$ .

(ii)  $H_2$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{R}^m \times S^{m-1}$ .

(iii)  $H_3$  ist eine einfach zusammenhängende vollständige Sasaki-Raumform der  $\varphi$ -Schnittkrümmung  $-3$  und daher (als Sasaki-Mannigfaltigkeit) isometrisch zu  $\mathbb{R}^{2m-1}$  mit der Sasaki-Struktur  $(\varphi, \xi, \eta, g)$ , wobei

$$g := \frac{1}{4} \left( \eta \otimes \eta + \sum_{i=1}^{m-1} (dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i) \right),$$

$$\eta := \frac{1}{2} \left( dz - \sum_{i=1}^{m-1} y_i dx_i \right)$$

$$\xi := 2 \frac{\partial}{\partial z},$$

$$-\varphi := \nabla^g \xi \quad (\nabla^g = \text{Levi-Civita-Ableitung von } (\mathbb{R}^{2m-1}, g))$$

und  $(x_1, y_1, \dots, x_{m-1}, y_{m-1}, z)$  die kanonischen Koordinatenfunktionen von  $\mathbb{R}^{2m-1}$  sind.

**Anmerkungen:** a) Die Fundamentalgruppe von  $H_{1,m-1}$  ( $m \geq 2$ ) und  $H_2$  ( $m = 2$ ) ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$ ; alle anderen Modellräume in  $\mathbb{C}H^m$  sind einfach zusammenhängend.

b) Die Diffeomorphietypen der Modellräume in  $\mathbb{C}P^m$  sind dem Autor bis auf eine Ausnahme nicht bekannt;  $P_{1,0}$  (oder auch  $P_{1,m-1}$ ) ist diffeomorph zu  $S^{2m-1}$ .

*Beweis:* zu (i): Sei  $\Phi : H_{1,k} \rightarrow \mathbb{C}H^k$  die Fokalabbildung von  $H_{1,k}$  auf  $\mathbb{C}H^k$ . Nach Korollar 6.3 ist  $\Phi$  ein  $C^\infty$ -Sphärenbündel über  $\mathbb{C}H^k$ . Da  $\mathbb{C}H^k$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^{2k}$  ist (vgl. 1.11), ist  $\mathbb{C}H^k$  kontrahierbar und somit  $\Phi$  trivial, d.h.  $\Phi$  ist kongruent zu einem Produktbündel über  $\mathbb{C}H^k$  ([St], S.53). Hieraus folgt die Behauptung.

zu (ii): Die Behauptung beweist man mit einer zu (i) analogen Argumentation, indem man die Fokalabbildung  $\Phi$  von  $H_2$  auf  $\mathbb{R}H^m$  untersucht.

zu (iii):  $H_3$  ist eine einfach zusammenhängende (vgl. 2.2 (v)) vollständige (vgl. 6.2) Sasaki-Raumform der konstanten  $\varphi$ -Schnittkrümmung  $-3$  (vgl. 5.4). Die Behauptung folgt aus dem Kongruenztheorem von Tanno ([Ta4], S.504) über Sasaki-Raumformen. Zur Sasaki-Struktur auf  $\mathbb{R}^{2m-1}$  siehe [Bl], S. 29/99.  $\square$

### 6.5 Über einige Quotientenräume $M/RU$

**Satz:** (i) Sei  $M$  einer der Modellräume  $P_{1,k}, H_{1,k}, H_3$ ;  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ . Dann ist die Hopf-Blätterung  $L$  von  $M$  eine Riemannsche Blätterung von  $M$ . Die Menge  $M/L$  aller Blätter von  $L$  kann mit einer holomorphen Struktur und einer Hermiteschen Metrik versehen werden, so daß die kanonische Projektion von  $M$  auf die Hermitesche Mannigfaltigkeit  $M/L$  zu einer Riemannschen Submersion wird.

(ii) Sei speziell  $M$  einer der Modellräume  $P_{1,0}, P_{1,m-1}, H_{1,0}, H_{1,m-1}, H_3$ . Dann ist  $M/L$  holomorph isometrisch zu einem Standardraum konstanter holomorpher Schnittkrümmung  $c$ :

$M$	$M/L$	$c$
$P_{1,0}$	$\mathbb{C}P^{m-1}(c)$	$4/\sin^2(r)$
$P_{1,m-1}$	$\mathbb{C}P^{m-1}(c)$	$4/\cos^2(r)$
$H_{1,0}$	$\mathbb{C}P^{m-1}(c)$	$4/\sinh^2(r)$
$H_{1,m-1}$	$\mathbb{C}H^{m-1}(c)$	$-4/\cosh^2(r)$
$H_3$	$\mathbb{C}P^{-1}$	0

$P_{1,2}$  bzw.  $H_{1,2}$  ist keine Kontakt-Hypersphäre von  $\mathbb{C}P^m$  (vgl. Theorem 5.5) und damit keine fast-Sasaki-Off. im Sinne von Ogino. Daher ist Theorem 4.3 von [Og1] nicht anwendbar.

**Anmerkungen:** a) Für die Räume  $P_{1,0}, P_{1,m-1}$  bzw.  $H_{1,m-1}$  entspricht die kanonische Projektion gerade der Fokalabbildung auf  $\mathbb{C}P^{m-1}$  bzw.  $\mathbb{C}H^{m-1}$ .

b) Auf  $P_{1,k}$  bzw.  $H_{1,k}$ ,  $k \in \{1, \dots, m-2\}$ , ist die kanonische fast-kontakt metrische Struktur nicht homothetisch zu einer Sasaki-Struktur (vgl. 5.4); daher ist  $M/L$  in diesen Fällen keine Kähler-Mannigfaltigkeit (vgl. [Og1], S.59). } f

c) Im Falle der Räume  $P_{1,k}$  sowie  $H_{1,k}$  ist die Riemannsche Submersion gemäß (i) ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe  $S^1$  und Zusammenhang  $\mathcal{D}$  (vgl. [Mo3], S. 93).

d) Seien  $M$  einer der Modellräume  $P_2 - P_5$  oder  $H_2$  und  $L$  die Hopf-Blätterung von  $M$ . Dann existiert keine Riemannsche Struktur auf  $M/L$ , so daß die kanonische Projektion zu einer Riemannschen Submersion wird (denn die Fasern einer Riemannschen Submersion bilden eine Riemannsche Blätterung, vgl. [Re6], S.163; nach Theorem 4 in 5.2 ist aber  $L$  keine Riemannsche Blätterung von  $M$ ).

*Beweis:* Für die angegebenen Modellräume ist die Hopf-Blätterung  $L$  eine Riemannsche Blätterung von  $M$  (vgl. Theorem 4 in 5.2). Wir erinnern noch einmal daran, daß die Blätter von  $L$  durch die Integralkurven von  $U$  parametrisiert werden.

Sei zunächst  $M$  einer der Modellräume  $P_{1,k}$  oder  $H_{1,k}$ . Da die Blätter von  $L$  kompakt sind (vgl. 6.1), kann die Menge  $N := M/L$  aller Blätter von  $L$  mit einer differenzierbaren Struktur versehen werden, bezüglich welcher die kanonische Projektion  $\pi : M \rightarrow N$  eine (differenzierbare) Submersion ist ([Pa], S. 21 f.). Weiterhin ist  $U$  ein Killingfeld auf  $M$  (vgl. Theorem 4 in 5.2); daher kann  $N$  sogar mit einer Riemannschen Metrik versehen werden, so daß  $\pi$  zu einer Riemannschen Submersion wird. Die normale fast-kontakt metrische Struktur auf  $M$  (vgl. Theorem 4 in 5.2) induziert dann eine holomorphe Struktur auf  $N$ ; diesbezüglich ist  $N$  eine Hermitesche Mannigfaltigkeit (vgl. [Mo3], S.93, und [Og1], S.57 f.). Damit ist (i) für die Räume  $P_{1,k}$  und  $H_{1,k}$  bewiesen.

Seien nun speziell  $M = P_{1,0}$  und  $\Phi : M \rightarrow B$  die Fokalabbildung von  $M$  auf die zu  $\mathbb{C}P^{m-1}$  holomorph kongruente Fokalfläche  $B$  von  $M$  (vgl. Beispiel 1 in 4.5). Durch Berechnung des Differentials von  $\Phi$  (z.B. mit Theorem 4.5) erhält man, daß

$$\Phi : M \rightarrow (B, \sin^2(r) \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

eine Riemannsche Submersion ist, deren Fasern genau die Blätter von  $L$  sind. Damit folgt (ii) für  $M = P_{1,0}$ . Für den Raum  $P_{1,m-1}$  bzw.  $H_{1,m-1}$  kann man mit Hilfe der Fokalabbildung auf  $\mathbb{C}P^{m-1}$  bzw.  $\mathbb{C}H^{m-1}$  auf analoge Weise die Behauptung in (ii) herleiten.

Sei nun  $M = H_{1,0}$  eine geodätische Hypersphäre vom Radius  $r$  in  $\mathbb{C}H^m$ . Die Sasaki-Struktur auf  $M$  gemäß 5.4 impliziert, daß  $N$  eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist ([Og1], S.58). Sei  $\lambda := \coth(r)$ ;  $\lambda$  ist also der Eigenwert von  $A|D$ . Da

$(M, \lambda^2 \langle, \rangle)$  nach 5.4 konstante  $\varphi$ -Schnittkrümmung  $1 - 4/\lambda^2$  hat, ist die holomorphe Schnittkrümmung von  $(N, \lambda^2 \langle, \rangle)$  konstant vom Wert  $4(1 - 1/\lambda^2)$  ([YK1], S.152), d.h.  $N$  hat konstante holomorphe Schnittkrümmung  $4(\lambda^2 - 1) = 4/\sinh^2(r) =: c$ . Sei nun  $p$  der Mittelpunkt von  $M$  in  $\mathbb{C}H^m$ . Bekanntlich ist die Exponentialabbildung  $\exp_p : T_p \mathbb{C}H^m \rightarrow \mathbb{C}H^m$  von  $\mathbb{C}H^m$  in  $p$  ein Diffeomorphismus (vgl. [KN2], S.102). Nun ist  $M$  das Bild unter  $\exp_p$  von der Sphäre  $S^{2m-1}(r)$  vom Radius  $r$  um den Nullpunkt in  $T_p \mathbb{C}H^m$ . Ist  $W$  ein 1-dimensionaler komplexer Untervektorraum von  $T_p \mathbb{C}H^m$ , so ist  $W \cap S^{2m-1}(r)$  ein Großkreis in  $S^{2m-1}(r)$ . Das Bild  $\exp_p(W)$  ist holomorph kongruent zu  $\mathbb{C}H^1$ ; nach 6.1 ist daher  $\exp_p(W) \cap M$  gerade ein Blatt von  $L$ . Diese Untersuchungen zeigen, daß  $N$  diffeomorph zu dem Quotientenraum  $S^{2m-1}/S^1 = \mathbb{C}P^{m-1}$  ist.  $N$  ist somit eine einfach zusammenhängende Kähler-Mannigfaltigkeit der konstanten holomorphen Schnittkrümmung  $c$ . Aus der Vollständigkeit von  $M$  (vgl. 6.2) folgt ferner die Vollständigkeit von  $N$ . Nach 1.12 ist  $N$  daher holomorph isometrisch zu  $\mathbb{C}P^{m-1}(c)$ .

Es bleibt noch der Fall  $M = H_3$  zu untersuchen. Sei  $(\mathbb{R}^{2m-1}, g)$  wie in Satz 6.4 (iii). Wir betrachten  $\mathbb{R}^{2m-1}$  in kanonischer Weise als Produkt  $\mathbb{C}^{m-1} \times \mathbb{R}$ . Dann ist die Projektion

$$\pi : (\mathbb{R}^{2m-1}, g) \mapsto (\mathbb{C}^{m-1}, \frac{1}{4} \langle, \rangle)$$

auf die erste Komponente eine Riemannsche Submersion, wobei  $\langle, \rangle$  die übliche Riemannsche Metrik auf  $\mathbb{C}^{m-1}$  ist (vgl. 1.9). Mit Satz 6.4 (iii) erhält man nun leicht die Behauptung.  $\square$

### 6.6 Modifizierte Hopf-Abbildungen auf $\mathbb{C}P^m$

**Satz:** Sei  $M$  eine geodätische Hypersphäre vom Radius  $r \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  in  $\mathbb{C}P^{m+1}$  bzw. vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  in  $\mathbb{C}H^{m+1}$ . Dann existiert eine Riemannsche Submersion mit total-geodätischen Fasern von

$$\widetilde{M} := (M, \frac{1}{\sin^2(r)} \langle, \rangle) \text{ bzw. } \widetilde{M} := (M, \frac{1}{\sinh^2(r)} \langle, \rangle)$$

auf  $\mathbb{C}P^m$ . Die horizontalen Geodätischen von  $\widetilde{M}$  sind geschlossen und haben die Länge  $2\pi$ ; die Fasern der Submersion lassen sich parametrisieren durch geschlossene Geodätische von  $\widetilde{M}$  mit der Länge  $2\pi \cos(r)$  bzw.  $2\pi \cosh(r)$ .

**Beweis:** Die Existenz der Riemannschen Submersion folgt aus 6.5; die Fasern entsprechen den Integralkurven von  $U$  und sind daher nach 6.1 total-geodätisch in  $\widetilde{M}$ .

Sei  $\gamma$  eine horizontale Geodätische von  $\widetilde{M}$ . Dann ist  $\gamma$  eine sphärische Kurve in  $\mathbb{C}P^{m+1}$  bzw.  $\mathbb{C}H^{m+1}$  mit  $\nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} = \lambda \|\dot{\gamma}\|^2 \xi \circ \gamma$ , wobei  $\lambda = \cot(r)$  bzw.  $\lambda = \coth(r)$  (vgl. Tabelle 6 bzw. Tabelle 8 in 5.3). Da  $\gamma$  sphärisch ist, verläuft  $\gamma$  in der 2-dimensionalen vollständigen total-reellen total-geodätischen Untermannigfaltigkeit  $L$  von  $\mathbb{C}P^{m+1}$  bzw.  $\mathbb{C}H^{m+1}$ , die durch  $\dot{\gamma}(0), \xi \circ \gamma(0)$  in  $\gamma(0)$  festgelegt ist (vgl. 2.5).  $L$  ist isometrisch zu  $\mathbb{R}P^2$  bzw.  $\mathbb{R}H^2$ .  $\gamma$  entspricht daher einem Kreis vom Radius  $r$  in  $\mathbb{R}P^2$  bzw.  $\mathbb{R}H^2$ ; die Länge eines solchen Kreises ist  $2\pi \sin(r)$  bzw.  $2\pi \sinh(r)$  (vgl. auch Beweis zu Theorem 1 (iii) in 5.2). Jede Faser der Submersion entspricht nach 6.1 einer geschlossenen Geodätischen von  $M$  mit der Länge  $\pi \sin(2r)$  bzw.  $\pi \sinh(2r)$ . Insgesamt läßt sich nun leicht die Länge der Geodätischen in  $\widetilde{M}$  berechnen.  $\square$

**Anmerkungen:** a) Die so konstruierten Riemannschen Submersionen auf  $\mathbb{C}P^m$  unterscheiden sich von der üblichen Hopf-Abbildung  $\pi_1$  von  $S^{2m+1}$  auf  $\mathbb{C}P^m$  dadurch, daß die Länge der Fasern kleiner bzw. größer als bei  $\pi_1$  ist. Daher bezeichnen wir sie als modifizierte Hopf-Abbildungen auf  $\mathbb{C}P^m$ . Zusammen mit  $\pi_1$  haben wir somit eine Familie  $(\pi_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$  von Riemannschen Submersionen  $\pi_s$  mit 1-dimensionalen total-geodätischen Fasern auf  $\mathbb{C}P^m$  konstruiert derart, daß die Länge der horizontalen Geodätischen gleich  $2\pi$  und die Länge der Fasern gleich  $2\pi s$  ist.

b) Geodätische Hypersphären in  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  sind Berger-Sphären (für  $\mathbb{C}P^m$  siehe [We]).

### 6.7 Geodätische

**Satz:** Sei  $M$  ein beliebiger der Modellräume in  $\mathbb{C}P^m$  oder  $\mathbb{C}H^m$ ,  $p \in M$ ,  $\lambda \in \sigma(\mathcal{D})$  und  $v \in T_\lambda(p)$  mit  $\|v\| = 1$ . Ferner sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  die Geodätische in  $M$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Dann gilt

- (i)  $\gamma$  ist eine Krümmungslinie in  $M$ , d.h. für jedes  $t \in \mathbb{R}$  gilt  $\dot{\gamma}(t) \in T_\lambda(\gamma(t))$ .
- (ii)  $\gamma$  ist die eindeutig bestimmte maximale sphärische Kurve in  $\overline{M}$  mit

$$\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = v, \quad \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} = \lambda \xi_p.$$

(iii) Sei  $B$  die zu  $\mathbb{R}P^2$  bzw.  $\mathbb{R}H^2$  holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\overline{M}$  mit  $p \in B$  und  $T_p B = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}\xi_p$ . Dann ist  $\gamma(\mathbb{R})$  die Zusammenhangskomponente von  $B \cap M$ , die  $p$  enthält.

(iv) Im projektiven Fall ist  $\gamma$  geschlossen und von der Länge  $2\pi \sin(s)$ , wobei  $s \in \{r, r + \frac{\pi}{4}, r + \frac{\pi}{2}, r + \frac{3\pi}{4}\}$  die Zahl mit  $\cot(s) = \lambda$  ist. Im hyperbolischen Fall ist  $\gamma$  nur für  $\lambda = \coth(r)$  geschlossen; die Länge von  $\gamma$  ist dann gleich  $2\pi \sinh(r)$ .

*Beweis:* zu (i):  $T_\lambda$  ist entweder total-reell oder komplex (vgl. Anmerkung a) zu Theorem 1 bzw. Theorem 2 in 5.3). Ist  $T_\lambda$  total-reell, so induziert  $T_\lambda$  nach Satz 6.3 eine total-geodätische Blätterung  $L$  von  $M$ , womit in diesem Fall (i) bewiesen ist. Ist  $T_\lambda$  komplex, so induziert  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U$  nach Satz 6.3 eine total-geodätische Blätterung  $L$  von  $M$ . Zum Nachweis von (i) ist dann noch  $\langle \dot{\gamma}, U \circ \gamma \rangle = 0$  zu zeigen: Mit der Ricci-Identität folgt

$$\langle \dot{\gamma}, U \circ \gamma \rangle' = \langle \dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} U \rangle = \langle \dot{\gamma}, PA\dot{\gamma} \rangle = -\langle AP\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle.$$

Für komplexes  $T_\lambda$  gilt  $P\dot{\gamma}(t) \in T_\lambda(\gamma(t))$  und damit  $AP\dot{\gamma}(t) = \lambda P\dot{\gamma}(t)$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$ . Daher ist  $\langle \dot{\gamma}, U \circ \gamma \rangle$  konstant vom Wert  $\langle \dot{\gamma}(0), U \circ \gamma(0) \rangle = \langle v, U_p \rangle = 0$ . Damit ist (i) bewiesen.

zu (ii): Mit der Gauß-Gleichung, der Weingarten-Gleichung und (i) erhält man

$$\bar{\nabla}_\theta \dot{\gamma} = \langle A\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \xi \circ \gamma = \lambda \xi \circ \gamma$$

und

$$\bar{\nabla}_\theta \xi \circ \gamma = \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \xi = -A\dot{\gamma} = -\lambda \dot{\gamma}.$$

Damit folgt, daß  $\gamma$  eine sphärische Kurve in  $\bar{M}$  mit der angegebenen Eigenschaft ist.

zu (iii): Als sphärische Kurve verläuft  $\gamma$  in der zu  $\mathbb{R}P^2$  bzw.  $\mathbb{R}H^2$  holomorph kongruenten total-geodätischen Untermannigfaltigkeit  $B$  von  $\bar{M}$  mit  $p \in B$  und  $T_p B = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}\xi_p$  (vgl. Anmerkung über sphärische Kurven in 2.5).

zu (iv): (iv) folgt aus bekannten Tatsachen über sphärische Kurven in  $\mathbb{R}P^2$  und  $\mathbb{R}H^2$ .  $\square$

## 6.8 Zur Geometrie der Röhren um $\mathbb{C}P^k$ und $\mathbb{C}H^k$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Geometrie der Modellräume  $P_{1,k}$  und  $H_{1,k}$ .

**Satz 1:** Seien  $M$  einer der Modellräume  $P_{1,k}$  oder  $H_{1,k}$ ,  $k \in \{1, \dots, m-2\}$  und  $\lambda \in \sigma(\mathcal{D})$ . Dann induziert  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U$  eine Riemannsche Blätterung  $L$  von  $M$ . Die Menge  $M/L$  aller Blätter von  $L$  kann mit einer Riemannschen Struktur versehen werden, so daß die kanonische Projektion  $\pi : M \rightarrow M/L$  zu einer Riemannschen Submersion mit total-geodätischen Fasern wird. Darüberhinaus existiert auf  $M/L$  eine Kähler-Struktur, so daß  $M/L$  holomorph isometrisch zu

einem Standardraum konstanter holomorpher Schnittkrümmung  $c$  ist:

$M$	$M/L$	$c$	$\lambda$
$P_{1,k}$	$\mathbb{C}P^k(c)$	$4/\cos^2(r)$	$\cot(r)$
	$\mathbb{C}P^{m-k-1}(c)$	$4/\sin^2(r)$	$-\tan(r)$
$H_{1,k}$	$\mathbb{C}H^k(c)$	$-4/\cosh^2(r)$	$\coth(r)$
	$\mathbb{C}P^{m-k-1}(c)$	$4/\sinh^2(r)$	$\tanh(r)$

In den Fällen  $\lambda = \cot(r)$  bzw.  $\lambda = -\tan(r)$  bzw.  $\lambda = \coth(r)$  entspricht die kanonische Projektion  $\pi$  gerade der Fokalabbildung von  $P_{1,k}$  auf  $\mathbb{C}P^k$  bzw. von  $P_{1,k}$  auf  $\mathbb{C}P^{m-k-1}$  bzw. von  $H_{1,k}$  auf  $\mathbb{C}H^k$ .

*Beweis:*  $T_\lambda$  ist nach Anmerkung a) zu Theorem 1 bzw. Theorem 2 in 5.3 komplex. Nach 6.3 ist daher  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U$  integrabel. Die hierdurch induzierte Blätterung  $L$  von  $M$  ist genau dann eine Riemannsche Blätterung, wenn

$$(7) \quad \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle = 0$$

für alle  $X \in \Gamma(T_\lambda \oplus \mathbb{R}U)$  und  $Y, Z \in \Gamma(T_\mu)$  gilt, wobei  $\lambda \neq \mu \in \sigma(\mathcal{D})$  (vgl. (15) in 5.2). Offenbar genügt es, (7) für alle  $X \in \Gamma(T_\lambda)$  und  $X = U$  nachzuweisen. Für  $X \in \Gamma(T_\lambda)$  gilt (7) nach Lemma 1 (17) in 5.3. Weiterhin ist  $U$  nach Theorem 4 in 5.2 ein Killingfeld; also gilt (7) für  $X = U$ . Damit ist gezeigt, daß  $L$  eine Riemannsche Blätterung von  $M$  ist.

1. Fall:  $P_{1,k}, \lambda = \cot(r)$ . Sei  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{C}P^k$  die Fokalabbildung von  $M = P_{1,k}$  auf  $\mathbb{C}P^k$ .  $\Phi$  ist eine Submersion mit total-geodätischen Fasern (vgl. Korollar 6.3) und für jedes  $v \in T_\mu$  ( $\mu = -\tan(r)$ ) folgt mit Theorem 4.5

$$\|\Phi_* v\| = (\cos(r) + \tan(r) \sin(r)) \|v\| = \frac{1}{\cos(r)} \|v\|.$$

Da die Fasern von  $\Phi$  den Blättern von  $L$  entsprechen, folgt die Behauptung.

2. Fall:  $P_{1,k}, \lambda = -\tan(r)$ . Der Beweis ist analog zum 1. Fall, wobei hier die Fokalabbildung von  $P_{1,k}$  auf die zu  $\mathbb{C}P^{m-k-1}$  holomorph kongruente Fokalfläche von  $P_{1,k}$  untersucht wird.

3. Fall:  $H_{1,k}, \lambda = \coth(r)$ . Der Beweis ist ebenfalls analog zum 1. Fall. Hier wird die Fokalabbildung von  $H_{1,k}$  auf  $\mathbb{C}H^k$  untersucht.

4. Fall:  $H_{1,k}, \lambda = \tanh(r)$ . Seien  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{C}H^k(\tilde{c})$  die Riemannsche Submersion gemäß dem 3. Fall,  $\tilde{c} := -4/\cosh^2(r)$ ,  $\tilde{L}$  die durch die Fasern von  $\Phi$  induzierte Riemannsche Blätterung von  $M$ ,  $p \in M$  und  $E$  die normale

Exponentialabbildung von  $\tilde{L}_p$  in  $M$ . Da in  $\mathbb{C}H^k(\tilde{c})$  keine konjugierten Punkte existieren, hat  $\tilde{L}_p$  keine Brennpunkte in  $M$  ([ON2], S.369). Somit ist  $E$  ein lokaler Diffeomorphismus. Da  $T_\lambda|_{\tilde{L}_p}$  gerade das Normalenbündel von  $\tilde{L}_p$  in  $M$  ist, folgt leicht mit Satz 6.7, daß  $E$  sogar ein Diffeomorphismus von  $\perp\tilde{L}_p$  auf  $M$  ist. Die Abbildung

$$\tau \circ E^{-1} : M \longrightarrow \tilde{L}_p$$

ist daher eine surjektive Submersion, wobei  $\tau : \perp\tilde{L}_p \rightarrow \tilde{L}_p$  die kanonische Projektion ist. Aufgrund von Satz 6.7 (i) ist jede Faser von  $\tau \circ E^{-1}$  enthalten in einem Blatt von  $L$ . Nun ist  $\tilde{L}_p$  holomorph kongruent zu einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $r$  in  $\mathbb{C}H^{m-k}$  (vgl. 6.3). Nach 6.5 existiert daher eine surjektive Submersion

$$f : \tilde{L}_p \longrightarrow \mathbb{C}P^{m-k-1}(c)$$

mit  $c := 4/\sinh^2(r)$ ; die Fasern von  $f$  werden gerade durch die Integralkurven von  $U|_{\tilde{L}_p}$  parametrisiert. Insgesamt erhalten wir nun die surjektive Submersion

$$g := f \circ \tau \circ E^{-1} : M \longrightarrow \mathbb{C}P^{m-k-1}(c)$$

Für jedes  $q \in M$  ist  $L_q \cap \tilde{L}_p$  die Faser von  $f$  durch den Punkt  $\tau \circ E^{-1}(q)$ . Daher sind die Fasern von  $g$  genau die Blätter von  $L$ . Da  $L$  eine Riemannsche Blätterung von  $M$  ist, ist  $g$  sogar eine Riemannsche Submersion (vgl. Anmerkung zu Theorem 4 in 5.2).  $\square$

**Korollar:** Seien  $M$  die Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{C}H^k$  in  $\mathbb{C}H^m$ ,  $k \in \{1, \dots, m-1\}$  und  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{C}H^k$  die Fokalabbildung von  $M$  auf  $\mathbb{C}H^k$ . Die Fasern von  $\Phi$  sind die maximalen Integral-Mannigfaltigkeiten der durch  $T_\lambda \oplus \mathbb{R}U$ ,  $\lambda = \coth(r)$ , induzierten total-geodätischen Riemannschen Blätterung  $L$  von  $M$ . Seien  $p \in M$  und  $N$  die zu  $\mathbb{C}H^{m-k}$  holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}H^m$  mit  $\Phi(p) \in N$  und  $T_{\Phi(p)}N = \perp_{\Phi(p)}\mathbb{C}H^k$ . Dann ist  $L_p = M \cap N$  die geodätische Hypersphäre vom Radius  $r$  um  $\Phi(p)$  in  $N$ . Für jedes  $q \in M$  ist der Abstand in  $M$  zwischen  $q$  und  $L_p$  gleich  $\cosh(r)\bar{d}(\Phi(p), \Phi(q))$ . Ist  $q \in M \setminus L_p$ , so erhält man auf folgende Weise eine Kürzeste  $\gamma$  zwischen  $q$  und  $L_p$ . Seien  $s := \bar{d}(\Phi(p), \Phi(q))$  und  $c : [0, s] \rightarrow \mathbb{C}H^k$  die Geodätische von  $\mathbb{C}H^k$  mit  $c(0) = \Phi(q)$  und  $c(s) = \Phi(p)$ . Ferner sei  $v \in T_\lambda(q)$  derjenige Vektor, den man durch Parallelverschiebung von  $\dot{c}(0)$  längs der Geodätischen  $\gamma_q$  von  $\Phi(q)$  nach  $q$  erhält. Dann ist die Geodätische  $\gamma : [0, \cosh(r)s] \rightarrow M$  von  $M$  mit  $\gamma(0) = q$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$  eine Kürzeste von  $q$  nach  $L_p$  (vgl. auch 6.7).

**Anmerkung:** Eine entsprechende Aussage gilt auch für die Röhren vom Radius  $r \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  um  $\mathbb{C}P^k$  in  $\mathbb{C}P^m$ ,  $k \in \{1, \dots, m-1\}$ .

*Beweis:* Die Behauptung folgt mit Korollar 6.3, Satz 6.5, Satz 6.7 und Satz 1 sowie der Tatsache, daß bei Riemannschen Blätterungen die Blätter zueinander parallel sind (vgl. [He], S.453), d.h. für je zwei Blätter  $L_1, L_2$  von  $L$  und für beliebige  $p \in L_1, q \in L_2$  gilt  $d(p, L_2) = d(L_1, L_2) = d(L_1, q)$ .  $\square$

**Satz 2:** Seien  $M$  die Röhre vom Radius  $r \in \mathbb{R}_+$  um  $\mathbb{C}H^k$  in  $\mathbb{C}H^m$ ,  $k \in \{1, \dots, m-1\}$ , und  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{C}H^k$  die Fokalabbildung von  $M$  auf  $\mathbb{C}H^k$ . Ferner seien  $F$  eine Busemann-Funktion auf  $\mathbb{C}H^k$  und  $L$  die zugehörige Riemannsche Blätterung von  $\mathbb{C}H^k$  durch Horosphären. Durch  $Z := -\text{grad } F$  wird auf  $\mathbb{C}H^k$  ein globales Einheitsvektorfeld  $Z$  definiert, das in jedem Punkt  $p \in M$  orthogonal zur Horosphäre  $L_p$  durch  $p$  ist. Die Integralkurven von  $Z$  sind zueinander asymptotische Geodätische von  $\mathbb{C}H^k$ . Es existiert genau ein Einheitsvektorfeld  $\tilde{Z} \in \mathcal{X}(M)$  mit  $\cosh(r)\Phi_*\tilde{Z} = Z \circ \Phi$ . Die Integralkurven von  $\tilde{Z}$  sind zueinander asymptotische Geodätische von  $M$ . Sei  $\Psi$  bzw.  $\tilde{\Psi}$  der maximale Fluß von  $Z$  bzw.  $\tilde{Z}$ . Dann gilt für jedes  $p \in M$  und jedes  $t \in \mathbb{R}$

$$(8) \quad \Phi \circ \tilde{\Psi}(p, \cosh(r)t) = \Psi(\Phi(p), t)$$

Sei  $\tilde{L}$  die Blätterung von  $M$  mit  $T_p\tilde{L} = \Phi_*^{-1}(T_{\Phi(p)}L)$  für alle  $p \in M$ .  $\tilde{L}$  ist eine Riemannsche Blätterung von  $M$  durch Hyperflächen von  $M$ . Sei  $\{\tilde{\Psi}_s \mid s \in \mathbb{R}\}$  die Einparametergruppe von  $\tilde{Z}$ . Dann gilt für jedes  $p \in M$  und jedes  $s \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\Psi}_s(\tilde{L}_p) = \tilde{L}_{\tilde{\Psi}_s(p)} \quad \text{und} \quad M = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \tilde{\Psi}_s(\tilde{L}_p)$$

Seien  $\gamma$  eine Integralkurve von  $Z$  und  $N := \Phi^{-1}(\gamma(\mathbb{R}))$ . Dann ist  $\tilde{Z}|_N$  ein Parallelfeld (insbesondere also auch ein Killingfeld) auf  $N$ .  $N$  ist isometrisch zum Riemannschen Produkt einer geodätischen Hypersphäre (aufgefaßt als Riemannsche Mannigfaltigkeit) vom Radius  $r$  in  $\mathbb{C}H^{m-k}$  und  $\mathbb{R}$ .

*Beweis:* Zu den Aussagen über  $Z$  siehe [HI], S.483 f. Das Vektorfeld  $\cosh(r)\tilde{Z}$  ist der eindeutig bestimmte horizontale Lift von  $Z$  bezüglich der Riemannschen Submersion von  $M$  auf  $\mathbb{C}H^k(c)$  (vgl. Satz 1). Damit folgt leicht die Gleichung (8). Die Integralkurven von  $Z$  sind Geodätische von  $\mathbb{C}H^k$ , daher sind die Integralkurven von  $\tilde{Z}$  Geodätische von  $M$ . Für  $p \in M$  sei  $\tilde{\gamma}_p$  bzw.  $\gamma_{\Phi(p)}$  die Integralkurve von  $\tilde{Z}$  bzw.  $Z$  mit  $\tilde{\gamma}_p(0) = p$  bzw.  $\gamma_{\Phi(p)}(0) = \Phi(p)$ . Mit dem vorhergehenden Korollar erhalten wir dann für beliebige  $p, q \in M$  und  $t \in \mathbb{R}$  die Abschätzung

$$d(\tilde{\gamma}_p(s), \tilde{\gamma}_q(s)) \leq \cosh(r)\bar{d}(\gamma_{\Phi(p)}(t), \gamma_{\Phi(q)}(t)) + K$$

wobei  $s = \cosh(r)t$  und  $K$  der Durchmesser der zueinander isometrischen kompakten Fasern von  $\Phi$  ist. Da die Integralkurven von  $Z$  zueinander asymptotisch sind, folgt dies somit auch für die Integralkurven von  $\tilde{Z}$ . Wegen  $\nabla_{\tilde{Z}}\tilde{Z} = 0$  ist

$\tilde{L}$  eine Riemannsche Blätterung von  $M$  ([To], S.75). Die Behauptung über die Einparametergruppe von  $\tilde{Z}$  folgt mit (8) und den entsprechenden Eigenschaften der Einparametergruppe von  $Z$ . Nun gilt für  $X, Y \in \Gamma(T_\mu)$  (wobei  $\mu = \coth(r)$ )

$$0 = \langle \nabla_X \tilde{Z}, Y \rangle \text{ nach 5.3 (17),}$$

$$0 = \langle \nabla_X \tilde{Z}, U \rangle \text{ nach Ricci-Identität und 5.1 (3),}$$

$$0 = \langle \nabla_U \tilde{Z}, Y \rangle \text{ nach 6.3 (2),}$$

$$0 = \langle \nabla_U \tilde{Z}, U \rangle \text{ nach Ricci-Identität und 5.1 (3),}$$

$$0 = \langle \nabla_X \tilde{Z}, \tilde{Z} \rangle = \langle \nabla_U \tilde{Z}, \tilde{Z} \rangle, \text{ da } \|\tilde{Z}\| = 1.$$

(Die Voraussetzungen für die Anwendung von 6.3 (2) sind hier erfüllt.) Da außerdem  $\nabla_{\tilde{Z}} \tilde{Z} = 0$ , folgt insgesamt

$$\nabla_X \tilde{Z} \perp (T_\mu \oplus \mathbb{R}U \oplus \mathbb{R}\tilde{Z})$$

für alle  $X \in \Gamma(T_\mu \oplus \mathbb{R}U \oplus \mathbb{R}\tilde{Z})$ . Aufgrund der Gauß-Gleichung für  $N \hookrightarrow M$  und wegen  $TN = (T_\mu \oplus \mathbb{R}U \oplus \mathbb{R}\tilde{Z})|N$  ist  $\tilde{Z}|N$  daher ein Parallelfeld auf  $N$ . Sei  $S := \Phi^{-1}(\{\gamma(0)\})$ ;  $S$  ist holomorph kongruent zu einer geodätischen Hypersphäre vom Radius  $r$  in  $\mathbb{C}H^{m-k}$  (vgl. vorhergehendes Korollar). Aus den Eigenschaften von  $\tilde{\Psi}$  und der Parallelität von  $\tilde{Z}|N$  folgt, daß

$$f: S \times \mathbb{R} \rightarrow N, (p, t) \mapsto \tilde{\Psi}(p, t)$$

ein Diffeomorphismus ist, der die Länge von Vektoren tangential zu  $S$  (bzw.  $\mathbb{R}$ ) erhält. Da außerdem  $f_*v$  orthogonal ist zu  $f_*w$  für alle  $v, w \in T_{(p,t)}(S \times \mathbb{R})$  mit  $v \in T_p S, w \in T_t \mathbb{R}$  und  $(p, t) \in S \times \mathbb{R}$ , ist  $f$  sogar eine Isometrie.  $\square$

### 6.9 Familien mit konstanten Hauptkrümmungen

Mit E.Cartans [Ca] Klassifikation der isoparametrischen Hyperflächen im reell hyperbolischen Raum erhält man

**Theorem 1:** Seien  $p \in \mathbb{R}H^m (m \geq 2)$ ,  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $V$  bzw.  $W$  zwei zueinander orthogonale Untervektorräume von  $T_p \mathbb{R}H^m$  der Dimension  $k$  bzw.  $m-k-1$  und  $\eta$  ein Einheitsvektor aus  $T_p \mathbb{R}H^m$  orthogonal zu  $V \oplus W$ . Dann existiert genau eine Familie  $(M_s)_{s \in \mathbb{R}}$  von zusammenhängenden vollständigen Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}H^m$  mit den Eigenschaften

(i)  $M_0$  ist die zu  $\mathbb{R}H^k$  kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}H^m$  mit  $p \in M_0$  und  $T_p M_0 = V$ .

(ii) Für jedes  $s \neq 0$  ist  $M_s$  eine Hyperfläche von  $\mathbb{R}H^m$  mit konstanten Hauptkrümmungen und einem globalen Einheitsnormalenfeld  $\xi^s$  auf  $M_s$ , so daß

$$p \in M_s, T_p M_s = V \oplus W, \xi_p^s = \eta;$$

die Hauptkrümmungen von  $M_s$  bezüglich  $\xi^s$  sind  $s$  und  $1/s$  mit den Vielfachheiten  $k$  bzw.  $m-k-1$  sowie den Eigenräumen  $V$  bzw.  $W$  in  $p$ .

**Anmerkungen:** a) Die Familie  $(M_s)$  konstruiert man wie im nachfolgenden komplexen Analogon. Daher verzichten wir hier auf einen Beweis.

b) Speziell für  $k = m-1$  erhält man die bekannte Blätterung von  $\mathbb{R}H^m$  mit einer Singularität in  $p$  durch die sphärischen Hyperflächen von  $\mathbb{R}H^m$ , deren Normalenfeld der mittleren Krümmung in  $p$  den Wert  $s\eta$  hat.

c) Jede zusammenhängende Hyperfläche von  $\mathbb{R}H^m$  mit konstanten Hauptkrümmungen ist offener Teil einer Hyperfläche  $M_s$  einer solchen Familie  $(M_s)$ .

d) Eine entsprechende Aussage läßt sich auch für Hyperflächen mit höchstens zwei verschiedenen konstanten Hauptkrümmungen in  $S^m$  formulieren (vgl. auch komplexes Analogon für  $\mathbb{C}P^m$  in Theorem 2).

Wir formulieren nun das komplexe Analogon von Theorem 1 sowohl für  $\mathbb{C}H^m$  als auch für  $\mathbb{C}P^m$ .

**Theorem 2:** Seien  $\bar{M}$  entweder  $\mathbb{C}P^m$  oder  $\mathbb{C}H^m (m \geq 2)$ . Ferner seien  $p \in \bar{M}$ ,  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $V$  bzw.  $W$  zwei zueinander orthogonale komplexe Untervektorräume von  $T_p \bar{M}$  der komplexen Dimension  $k$  bzw.  $m-k-1$  und  $\eta$  ein Einheitsvektor aus  $T_p \bar{M}$  orthogonal zu  $V \oplus W$ . Dann existiert genau eine Familie  $(M_s)_{s \in \mathbb{R}}$  von zusammenhängenden vollständigen Untermannigfaltigkeiten von  $\bar{M}$  mit den Eigenschaften

(i)  $M_0$  ist die zu  $\mathbb{C}P^k$  bzw.  $\mathbb{C}H^k$  holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\bar{M}$  mit  $p \in M_0$  und  $T_p M_0 = V$ .

(ii) Für jedes  $s \neq 0$  ist  $M_s$  eine reelle Hyperfläche von  $\bar{M}$  mit konstanten Hauptkrümmungen und einem globalen Einheitsnormalenfeld  $\xi^s$  auf  $M_s$ , so daß

$$p \in M_s, T_p M_s = V \oplus W \oplus \mathbb{R}J\eta, \xi_p^s = \eta;$$

die Hauptkrümmungen von  $M_s$  bezüglich  $\xi^s$  sind  $-\epsilon s, 1/s$  und  $1/s - \epsilon s$  mit den Vielfachheiten  $2k, 2(m-k-1)$  bzw.  $1$  sowie den Eigenräumen  $V, W$  bzw.  $\mathbb{R}J\eta$  in  $p$ . (Im Falle  $\epsilon = -1$  und  $s \in \{-1, 1\}$  gilt  $-\epsilon s = 1/s$ ; der zugehörige Eigenraum ist dann  $V \oplus W$ .)

**Beweis:** Sei  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}$  die Geodätische von  $\bar{M}$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = \eta$ . Für  $r \in \mathbb{R}$  sei  $\tau_r$  die Parallelverschiebung längs  $\gamma$  von  $\gamma(0)$  nach  $\gamma(r)$ . Wir definieren im hyperbolischen Fall für

$0 < |s| < 1$ :  $M_s$  sei die Röhre vom Radius  $|r|$  um  $N$  in  $\mathbb{C}H^m$ , wobei  $r \in \mathbb{R}$  mit  $s = \tanh(r)$  und  $N$  die zu  $\mathbb{C}H^k$  holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}H^m$  mit  $\gamma(r) \in N$  und  $T_{\gamma(r)} N = \tau_r(V)$  ist.

$|s| = 1$ :  $M_1$  bzw.  $M_{-1}$  sei die Horosphäre in  $\mathbb{C}H^m$  durch  $p$ , die durch die Busemann-Funktion von  $\mathbb{C}H^m$  bezüglich  $\gamma$  bzw.  $t \mapsto \gamma(-t)$  definiert ist.

$|s| > 1$ :  $M_s$  sei die Röhre vom Radius  $|r|$  um  $N$  in  $\mathbb{C}H^m$ , wobei  $r \in \mathbb{R}$  mit  $s = \coth(r)$  und  $N$  die zu  $\mathbb{C}H^{m-k-1}$  holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}H^m$  mit  $\gamma(r) \in N$  und  $T_{\gamma(r)}N = \tau_r(W)$  ist.

Im projektiven Fall sei  $M_s$  ( $s \neq 0$ ) die Röhre vom Radius  $|r|$  um  $N$  in  $\mathbb{C}P^m$ , wobei  $r \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  mit  $s = \tan(r)$  und  $N$  die zu  $\mathbb{C}P^k$  holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  mit  $\gamma(r) \in N$  und  $T_{\gamma(r)}N = \tau_r(V)$  ist.

Für  $s \neq 0$  sei  $\xi_p^s$  das globale Einheitsnormalenfeld auf  $M_s$  mit  $\xi_p^s = \eta$ . Mit den Aussagen über die Hauptkrümmungen dieser Hyperflächen (vgl. Beispiel 1 in 4.4 sowie die Tabellen 6 bzw. 8 in 5.3) sowie den Klassifikationen in 5.3 folgt die Behauptung.  $\square$

**Anmerkungen:** a) Im Gegensatz zu  $\mathbb{R}H^m$  ist nicht jede reelle Hyperfläche von  $\mathbb{C}H^m$  mit konstanten Hauptkrümmungen in einer Hyperfläche dieser Familien ( $M_s$ ) enthalten; z.B. eine Röhre um  $\mathbb{R}H^m$  in  $\mathbb{C}H^m$ . Diesbezüglich kann man also sagen, daß in  $\mathbb{C}H^m$  reelle Hyperflächen mit konstanten Hauptkrümmungen existieren, zu denen es kein Analogon in  $\mathbb{R}H^m$  gibt. Im Fall  $\bar{M} = \mathbb{C}H^m$  umfaßt ( $M_s$ ) $_{s \neq 0}$  genau die Modellräume  $H_{1,k}$ ,  $H_{1,m-k-1}$  (mit allen möglichen Radien  $r$ ) und  $H_3$ .

b) Bemerkenswert ist, daß in jeder dieser Familien ( $M_s$ ) zwei Horosphären vorkommen (unabhängig von  $k$ ), und zwar für  $s = 1$  und  $s = -1$ . Geometrisch läßt sich dies derart interpretieren, daß jede solche Familie ( $M_s$ ) $_{0 < s < 1}$  für  $s \rightarrow 1$  gegen die Horosphäre  $M_1$  "konvergiert". Speziell für  $k = 0$  erhält man die bekannte Interpretation einer Horosphäre als Grenzmännigfaltigkeit einer Familie von geodätischen Hypersphären (vgl. 2.2 (v)a)). In  $\mathbb{C}P^m$  dagegen existiert keine in diesem Sinne ausgezeichnete reelle Hyperfläche.

c) Vertauschen wir bei obiger Konstruktion  $V$  und  $W$ , so erhalten wir eine Familie ( $\bar{M}_s$ ) $_{s \in \mathbb{R}}$  mit den entsprechenden Eigenschaften.  $\bar{M}_0$  ist die zu  $\mathbb{C}P^{m-k-1}$  bzw.  $\mathbb{C}H^{m-k-1}$  holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  mit  $p \in \bar{M}_0$  und  $T_p\bar{M}_0 = W$ ; für alle  $s \neq 0$  gilt  $M_s = \bar{M}_{c/s}$ . Aufgrund der letzten Gleichung ist es naheliegend, die Familie ( $M_s$ ) $_{s \in \mathbb{R}}$  fortzusetzen zu einer Familie ( $M_s$ ) $_{s \in \mathbb{R}}$ , wobei  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $M_\infty := \bar{M}_0$ . Man beachte, daß im projektiven Fall  $\bar{M}_\infty$  bis auf holomorphe Kongruenz die Fokalfäche von  $M_0$  in  $\mathbb{C}P^m$  ist; im hyperbolischen Fall besitzt  $M_0$  keine Fokalfäche in  $\mathbb{C}H^m$ .

d) Es ist interessant, den Schnitt einer solchen Familie ( $M_s$ ) $_{s \in \mathbb{R}}$  mit geeigneten 2-dimensionalen total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten von  $\bar{M}$  zu untersuchen. Wir führen dies hier für den hyperbolischen Fall durch.

Seien  $u \in V$  (bzw.  $u \in W$  bzw.  $u = J\eta$ ) mit  $u \neq 0$  und  $N$  die zu  $\mathbb{R}H^2$  (bzw.  $\mathbb{R}H^2$  bzw.  $\mathbb{C}H^1$ ) holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit

von  $\mathbb{C}H^m$  mit  $p \in N$  und  $T_pN = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}\eta$ . Mit Satz 6.7 sowie 6.1 folgt, daß  $N \cap M_s$  für  $s \neq 0$  die 1-dimensionale zusammenhängende vollständige sphärische Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist, die in  $p$  tangential zu  $\mathbb{R}u$  ist und deren Normalenfeld der mittleren Krümmung in  $p$  den "Wert"  $s\eta$  (bzw.  $\frac{1}{s}\eta$  bzw.  $(s + \frac{1}{s})\eta$ ) hat. Für  $u \in V$  (bzw.  $u \in W$ ) ist  $N \cap M_0$  (bzw.  $N \cap M_\infty$ ) die 1-dimensionale zusammenhängende vollständige total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $N$ , die in  $p$  tangential zu  $\mathbb{R}u$  ist; in allen anderen Fällen gilt  $N \cap M_0 = \{p\} = N \cap M_\infty$ . Bis auf Kongruenz entspricht  $(N \cap M_s)_{s \in \mathbb{R}}$  (für  $u \in V$ ) bzw.  $(N \cap M_s)_{s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$  (für  $u \in W$ ) also der bekannten in einem Punkt singulären Blätterung von  $\mathbb{R}H^2$  durch sphärische Untermannigfaltigkeiten (vgl. Anmerkung b) zu Theorem 1).

e) Ein Analogon zu Theorem 2 läßt sich auch mit der Voraussetzung herleiten, daß  $V$  ein  $(m-1)$ -dimensionaler total-reeller Untervektorraum von  $\bar{M}$  und  $W = JV$  ist. Die Familie ( $M_s$ ) wird dann mit den Röhren um  $\mathbb{R}P^m$  bzw.  $\mathbb{R}H^m$  konstruiert.

## 6.10 Integral-Untermannigfaltigkeiten des Kontaktbündels

In der Theorie der Kontakt-Männigfaltigkeiten sind die Integral-Untermannigfaltigkeiten des "Kontaktbündels" von besonderem Interesse, da sie zur geometrischen Interpretation der Kontaktbedingung  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  dienen (vgl. [Bl], S.36 ff.). Im Fall einer Kontakt-Hyperfläche einer Kähler-Männigfaltigkeit ist gerade  $\mathcal{D}$  das Kontaktbündel. Wir untersuchen nun die Integral-Untermannigfaltigkeiten des Kontaktbündels  $\mathcal{D}$  der Kontakt-Hyperflächen von  $\mathbb{C}P^m$  und  $\mathbb{C}H^m$  (vgl. 5.5).

**Satz:** Sei  $M$  eine zusammenhängende Kontakt-Hyperfläche von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$ . Dann gilt

(i) Jede Integral-Untermannigfaltigkeit von  $\mathcal{D}$  ist total-reell.

(ii) Sei speziell  $M$  gleich  $P_{1,0}$  bzw.  $H_{1,0}$  oder  $H_{1,m-1}$  oder  $H_3$ . Ferner seien  $p \in M$ ,  $V$  ein  $s$ -dimensionaler ( $s \in \{1, \dots, m-1\}$ ) total-reeller Untervektorraum von  $\mathcal{D}_p$  und  $\lambda$  die Hauptkrümmung von  $M$  bezüglich  $A|_{\mathcal{D}}$ . Dann existiert (vgl. Theorem 2.5) genau eine zusammenhängende vollständige sphärische Untermannigfaltigkeit  $N$  von  $\bar{M}$  mit  $p \in N$ ,  $T_pN = V$  und der mittleren Krümmungsnormale  $\lambda\xi_p$  in  $p$ .  $N$  ist eine total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $M$  und eine Integral-Untermannigfaltigkeit von  $\mathcal{D}$ .

**Beweis:** zu (i): Sei  $N$  eine Integral-Untermannigfaltigkeit von  $\mathcal{D}$ . Dann gilt notwendigerweise  $0 = \eta|_{TN}$  und  $0 = d\eta|(TN \oplus TN)$  (Whitney-Summe), wobei

$\eta := \langle \cdot, U \rangle$  die Kontaktstruktur auf  $M$  ist. Nun gilt für  $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$

$$\begin{aligned} 0 &= d\eta(X, Y) = \langle Y, \nabla_X U \rangle - \langle X, \nabla_Y U \rangle \\ &= \langle Y, PAX \rangle - \langle X, PAY \rangle \\ &= \langle (AP + PA)X, Y \rangle \\ &= \rho \langle PX, Y \rangle, \end{aligned}$$

wobei  $\rho \neq 0$  mit  $AP + PA = 2\rho P$  (vgl. 5.5). Hiermit folgt (i).

zu (ii): Sei  $B$  die zu  $\mathbb{R}P^{s+1}$  bzw.  $\mathbb{R}H^{s+1}$  holomorph kongruente total-geodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  mit  $p \in B$  und  $T_p B = V \oplus \mathbb{R}\xi_p$ . Für  $M = P_{1,0}$  bzw.  $M = H_{1,0}$  ist  $N := B \cap M$  eine geodätische Hyper-sphäre vom Radius  $r$  in  $B$ ; für  $M = H_{1,m-1}$  ist die Zusammenhangskomponente  $N$  von  $B \cap M$  mit  $p \in N$  holomorph kongruent zu einer Parallellfläche von  $\mathbb{R}H^s$  vom Abstand  $r$  in  $\mathbb{R}H^{s+1} \subset \mathbb{C}H^m$ ; und für  $M = H_3$  ist  $N := B \cap M$  eine Horosphäre in  $B$ . In allen Fällen ist  $N$  eine zusammenhängende vollständige sphärische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$  (vgl. 2.5) mit  $p \in N$ ,  $T_p N = V$  und dem Normalenfeld der mittleren Krümmung  $\lambda\xi|_N$  in  $\mathbb{C}P^m$  bzw.  $\mathbb{C}H^m$ , wobei  $\lambda$  die Hauptkrümmung von  $M$  bezüglich  $A|_{\mathcal{D}}$  ist. Aufgrund der Gauß-Gleichung ist  $N$  total-geodätisch in  $M$ . Nach Konstruktion ist  $N$  auch eine Integral-Untermannigfaltigkeit von  $\mathcal{D}$ . Die Eindeutigkeit von  $N$  folgt aus der Starrheit total-geodätischer Untermannigfaltigkeiten.  $\square$

**Anmerkung:** Die Aussage (ii) des Satzes ist auch interessant im Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz von total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten der Modellräume.

## Literaturverzeichnis

- [BBB] Ballmann, W.; Brin, M.; Burns, K.: On the differentiability of horocycles and horocycle foliations. *J. Differ. Geom.* **26**, 337-347 (1987).
- [Be1] Bejancu, A.: *Geometry of CR-submanifolds*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1986.
- [Be2] Berndt, J.: *Über Untermannigfaltigkeiten von komplexen Raumformen*. Diplomarbeit, Köln, 1986.
- [Be3] Besse, A.L.: *Einstein manifolds*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.
- [Bl] Blair, D.E.: *Contact manifolds in Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1976.
- [BFS] Buchner, M.; Fritzsche, K.; Sakai, T.: Geometry and cohomology of certain domains in the complex projective space. *J. reine angew. Math.* **323**, 1-52 (1981).
- [Ca] Cartan, E.: Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. **17**, 177-191 (1938).
- [Ce] Cecil, T.E.: Geometric applications of critical point theory to submanifolds of complex projective space. *Nagoya Math. J.* **55**, 5-31 (1974).
- [CR] Cecil, T.E.; Ryan, P.J.: Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **269**, 481-499 (1982).
- [CLM] Chen, B.Y.; Ludden, G.D.; Montiel, S.: Real submanifolds of a Kaehler manifold. *Algebras Groups Geom.* **1**, 176-212 (1984).
- [CN] Chen, B.Y.; Nagano, T.: Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, II. *Duke Math. J.* **45**, 405-425 (1978).
- [CO1] Chen, B.Y.; Ogiue, K.: On totally real submanifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* **193**, 257-266 (1974).
- [CO2] Chen, B.Y.; Ogiue, K.: Two theorems on Kaehler manifolds. *Michigan Math. J.* **21**, 225-229 (1974).
- [CV] Chen, B.Y.; Vanhecke, L.: Differential geometry of geodesic spheres. *J. reine angew. Math.* **325**, 28-67 (1981).
- [DN] Dorfmeister, J.; Neher, E.: Isoparametric hypersurfaces, case  $g = 6$ ,  $m = 1$ . *Commun. Algebra* **13**, 2299-2368 (1985).
- [EO] Eberlein, P.; O'Neill, B.: Visibility manifolds. *Pacific J. Math.* **46**, 45-109 (1973).

- [Eh] Ehresmann, C.: Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Centre Belge Rech. math., *Colloque Topologie*, Bruxelles, du 5 au 8 juin 1950, 29-55 (1951).
- [FKM] Ferus, D.; Karcher, H.; Münzner, H.F.: Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen. *Math. Z.* **177**, 479-502 (1981).
- [Gr] Greene, R.E.: Complex differential geometry. *Differential geometry*, Proc. Nord. Summer Sch., Lyngby/Den. 1985, Lect. Notes Math. **1263**, 228-288 (1987).
- [GKM] Gromoll, D.; Klingenberg, W.; Meyer, W.: *Riemannsche Geometrie im Großen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1975.
- [HI] Heintze, E.; Im Hof, H.C.: Geometry of horospheres. *J. Differ. Geom.* **12**, 481-491 (1977).
- [He] Hermann, R.: On the differential geometry of foliations. *Ann. Math.* **72**, 445-457 (1960).
- [Im] Im Hof, H.C.: *Die Geometrie der Weylkammern in symmetrischen Räumen vom nichtkompakten Typ*. Habilitationsschrift, Bonn, 1979.
- [Ki1] Ki, U.: Cyclic-parallel real hypersurfaces of a complex space form. *Tsukuba J. Math.* **12**, 259-268 (1988).
- [Ki2] Kimura, M.: Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **296**, 137-149 (1986).
- [KM] Kimura, M.; Maeda, S.: On real hypersurfaces of a complex projective space. Preprint (erscheint in *Math. Z.*).
- [Kl] Klein, F.: *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*. Julius Springer, Berlin, 1928. Nachdruck: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1967.
- [KN1] Kobayashi, S.; Nomizu, K.: *Foundations of differential geometry, Volume I*. Interscience Publishers, New York, 1963.
- [KN2] Kobayashi, S.; Nomizu, K.: *Foundations of differential geometry, Volume II*. Interscience Publishers, New York, 1969.
- [Ko] Kon, M.: Pseudo-Einstein real hypersurfaces in complex space forms. *J. Differ. Geom.* **14**, 339-354 (1979).
- [La] Lawson Jr., H.B.: *Lectures on minimal submanifolds, Volume I*. Publish or Perish Inc., Berkeley, 1980.
- [Le] Levi-Civita, T.: Famiglie di superficie isoparametriche nell' ordinario spazio euclideo. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **26**, 355-362 (1937).
- [Ma] Maeda, Y.: On real hypersurfaces of a complex projective space. *J. Math. Soc. Japan.* **28**, 529-540 (1976).

- [Me] Meumertzheim, T.: *Über  $C^\infty$ -Abbildungen mit differentiellen Nebenbedingungen*. Dissertation, Köln, 1988.
- [Mo1] Molino, P.: *Riemannian foliations*. Birkhäuser, Boston, 1988.
- [Mo2] Montiel, S.: Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space. *J. Math. Soc. Japan.* **37**, 515-535 (1985).
- [MR] Montiel, S.; Romero, A.: On some real hypersurfaces of a complex hyperbolic space. *Geom. Dedicata* **20**, 245-261 (1986).
- [Mo3] Morimoto, A.: On normal almost contact structures with a regularity. *Tohoku Math. J.* **16**, 90-104 (1964).
- [Mü] Münzner, H.F.: Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. *Math. Ann.*, I, **251**, 57-71 (1980), II, **256**, 215-232 (1981).
- [No] Nomizu, K.: Elie Cartan's work on isoparametric families of hypersurfaces. *Differential geometry*, Proc. Symp. pure Math. **27**, Part 1, Stanford 1973, 191-200 (1975).
- [NS] Nomizu, K.; Smyth, B.: Differential geometry of complex hypersurfaces II. *J. Math. Soc. Japan.* **20**, 498-521 (1968).
- [NY] Nomizu, K.; Yano, K.: On circles and spheres in Riemannian geometry. *Math. Ann.* **210**, 163-170 (1974).
- [Og1] Ogiue, K.: On fiberings of almost contact manifolds. *Kodai Math. Sem. Rep.* **17**, 53-62 (1965).
- [Og2] Ogiue, K.: Differential geometry of Kaehler submanifolds. *Advances Math.* **13**, 73-114 (1974).
- [Ok1] Okumura, M.: Certain almost contact hypersurfaces in Kaehlerian manifolds of constant holomorphic sectional curvatures. *Tohoku Math. J.* **16**, 270-284 (1964).
- [Ok2] Okumura, M.: Contact hypersurfaces in certain Kaehlerian manifolds. *Tohoku Math. J.* **18**, 74-102 (1966).
- [Ok3] Okumura, M.: On some real hypersurfaces of a complex projective space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **212**, 355-364 (1975).
- [ON1] O'Neill, B.: The fundamental equations of a submersion. *Michigan Math. J.* **13**, 459-469 (1966).
- [ON2] O'Neill, B.: Submersions and geodesics. *Duke Math. J.* **34**, 363-373 (1967).
- [ON3] O'Neill, B.: *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, New York London, 1983.
- [OT] Ozeki, H.; Takeuchi, M.: On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres. *Tohoku Math. J.*, I, **27**, 515-559 (1975), II, **28**, 7-55 (1976).

- [Pa] Palais, R.S.: A global formulation of the Lie theory of transformation groups. *Mem. Amer. Math. Soc.* **22** (1957).
- [Re1] Reckziegel, H.: Completeness of curvature surfaces of an isometric immersion. *J. Differ. Geom.* **14**, 7-20 (1979).
- [Re2] Reckziegel, H.: On the eigenvalues of the shape operator of an isometric immersion into a space of constant curvature. *Math. Ann.* **243**, 71-82 (1979).
- [Re3] Reckziegel, H.: On the problem whether the image of a given differentiable map into a Riemannian manifold is contained in a submanifold with parallel second fundamental form. *J. reine angew. Math.* **325**, 87-104 (1981).
- [Re4] Reckziegel, H.: Horizontal lifts of isometric immersions into the bundle space of a pseudo-Riemannian submersion. *Global differential geometry and global analysis*, Proc. Conf., Berlin 1984, Lect. Notes Math. **1156**, 264-279 (1985).
- [Re5] Reckziegel, H.: A correspondence between horizontal submanifolds of Sasakian manifolds and totally real submanifolds of Kählerian manifolds. *Topics in differential geometry*, Coll. Math. Soc. János Bolyai 46, Debrecen/Hun. 1984, North Holland Publishing House, Amsterdam, Vol. 2, 1063-1081 (1988).
- [Re6] Reinhart, B.L.: *Differential geometry of foliations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1983.
- [Se] Segre, B.: Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni. *Atti Accad. naz. Lincei*, Rend., VI. s. **27**, 203-207 (1938).
- [Sm1] Smyth, B.: Differential geometry of complex hypersurfaces. *Ann. Math.* **85**, 246-266 (1967).
- [Sm2] Smyth, B.: Homogeneous complex hypersurfaces. *J. Math. Soc. Japan* **20**, 643-647 (1968).
- [St] Steenrod, N.: *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1951.
- [Ta1] Takagi, R.: On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space. *Osaka J. Math.* **10**, 495-506 (1973).
- [Ta2] Takagi, R.: Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures. *J. Math. Soc. Japan* **27**, 43-53 (1975).
- [Ta3] Takagi, R.: Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures II. *J. Math. Soc. Japan* **27**, 507-516 (1975).

- [Ta4] Tanno, S.: Sasakian manifolds with constant  $\phi$ -holomorphic sectional curvature. *Tohoku Math. J.* **21**, 501-507 (1969).
- [Ta5] Tashiro, Y.: On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds, I. *Tohoku Math. J.* **15**, 62-78 (1963).
- [To] Tondeur, P.: *Foliations on Riemannian manifolds*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [Ve] Vernon, M.: Contact hypersurfaces of a complex hyperbolic space. *Tohoku Math. J.* **39**, 215-222 (1987).
- [Wa1] Wang, Q.M.: Isoparametric hypersurfaces in complex projective spaces. *Differential geometry and differential equations*, Proc. 1980 Beijing Sympos., Vol. 3, 1509-1523 (1982).
- [Wa2] Wang, Q.M.: Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex projective spaces (1). *Sci. Sin.*, Ser. A **26**, 1017-1024 (1983).
- [Wa3] Wang, Q.M.: Isoparametric functions on Riemannian manifolds I. *Math. Ann.* **277**, 639-646 (1987).
- [We] Weinstein, A.: Distance spheres in complex projective spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **39**, 649-650 (1973). Erratum: *Proc. Amer. Math. Soc.* **48**, 519 (1975).
- [Wo] Wolf, J.A.: Elliptic spaces in Grassmann manifolds. *Illinois J. Math.* **7**, 447-462 (1963).
- [YK1] Yano, K.; Kon, M.: *Anti-invariant submanifolds*. Marcel Dekker Inc., New York, 1976.
- [YK2] Yano, K.; Kon, M.: Generic submanifolds. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. **123**, 59-92 (1980).
- [YK3] Yano, K.; Kon, M.: *CR submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds*. Birkhäuser, Boston, 1983.
- [YK4] Yano, K.; Kon, M.: *Structures on manifolds*. World Scientific Publishing, Singapore, 1984.

## Lebenslauf

Ich wurde am 10.10.1959 als Sohn des Kommunalbeamten Erhard Berndt und seiner Ehefrau Marianne, geb. Peukert, in Wolfenbüttel geboren. Von April 1966 bis Juli 1969 besuchte ich die Grundschule in Bergisch Gladbach-Heidkamp. Danach wechselte ich auf das Nicolaus-Cusanus-Gymnasium in Bergisch Gladbach, wo ich im Mai 1979 die allgemeine Hochschulreife erlangte. Den Grundwehrdienst leistete ich in der Zeit zwischen Juli 1979 und September 1980 ab. Im Wintersemester 1980/81 nahm ich an der Universität zu Köln das Studium der Mathematik mit dem Nebenfach Betriebswirtschaftslehre auf, das ich im Februar 1987 mit der Diplom-Hauptprüfung abschloß. Meine akademische Ausbildung erhielt ich vor allem bei den Herren Professoren H. Benz, P. Dombrowski, W. Henke, M. Herrmann, T. Meis, H. Reckziegel, J. Schröder und H.J. Stender. Seit Oktober 1983 bin ich ununterbrochen am Mathematischen Institut der Universität zu Köln beschäftigt, zunächst als studentische Hilfskraft und seit Februar 1987 als wissenschaftliche Hilfskraft.