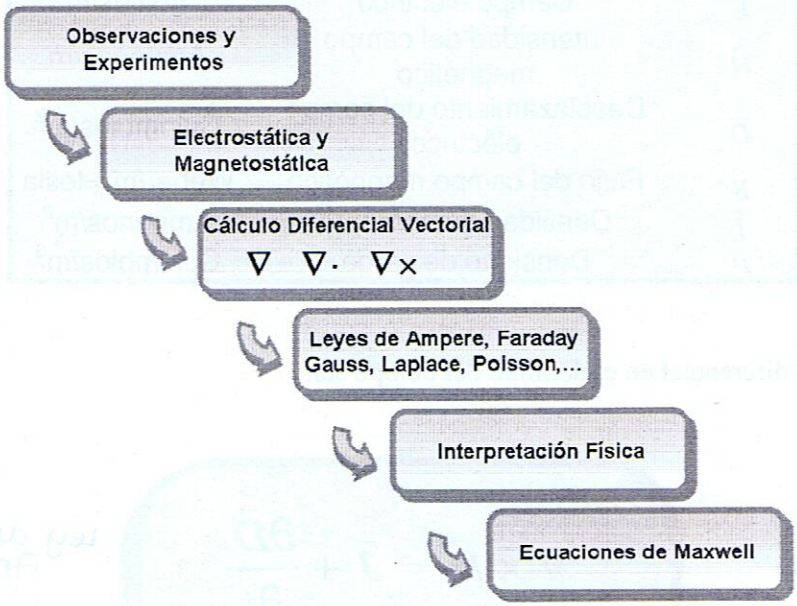
Introducción

La evolución del electromagnetismo ha pasado desde los primeras observaciones y experimentos, hasta la formulación de las ecuaciones de Maxwell.



Maxwell las unifica y las escribe matemáticamente
↓
la forma actual de las ecuaciones es distinta a como Maxwell las planteó

Ecuaciones de Maxwell

James Clerk Maxwell. (13 Junio 1831 - 5 Noviembre 1879)

Las investigaciones de Maxwell sobre el electromagnetismo le convirtieron en uno de los grandes científicos de la historia. Su libro " Treatise on Electricity and Magnetism" (1873), es el mejor exponente de su teoría. Maxwell transformó las ideas de Faraday en ecuaciones matemáticas.

Maxwell desarrolló un modelo mecánico para intentar explicar la ley de la inducción de Faraday (un campo magnético variable puede inducir campos electromagnéticos). Planteó la existencia de corrientes de desplazamiento en los dieléctricos y dedujo que se podían propagar ondas transversales a la velocidad de la luz.

polémica entre continentales e isleños (UK)

La formulación de las ecuaciones de Maxwell permite unificar las Leyes de Faraday, Ampere y Gauss, y suponen uno de los resultados más relevantes de la Física Matemática, junto con la ley de la gravitación de Isaac Newton (1642-1727), la teoría de la relatividad especial de Albert Einstein (1879-1955) y la ecuación de onda en la mecánica cuantica de Erwin Schrodinger (1887-1961).

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero, Mariano Baquero. Universidad Politécnica de Valencia

Las leyes de Maxwell se pueden escribir en distintas formas, en el dominio del tiempo o de la frecuencia, en formato integral o diferencial.

Las ecuaciones de Maxwell relacionan las siguientes magnitudes

$\vec{E}$	Campo eléctrico	Voltios/m
$\vec{H}$	Intensidad del campo magnético	Amperios/m
$\vec{D}$	Desplazamiento del campo eléctrico	Culombios/m^2
$\vec{B}$	Flujo del campo magnético	Weber/m^2=tesla
$\vec{J}$	Densidad de corriente	Amperios/m^2
ρ	Densidad de carga	Culombios/m^3

A veces se introducen conceptos físicamente no defendibles para simetrizar las ecuaciones: corriente y carga magnética

En formato diferencial en el dominio del tiempo son

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ Ley de Ampere

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Ley de Faraday

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$ Ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Las ecuaciones de Maxwell son el punto de partida para deducir la totalidad de las leyes del electromagnetismo.

La relación entre las cargas y las corrientes se denomina Ecuación de continuidad , se puede deducir a partir de la ley de Ampere, calculando su divergencia.

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \nabla \cdot \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Existiría otra ecuación de continuidad para las cargas magnéticas

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero, Mariano Baquero. Universidad Politécnica de Valencia

Ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia

En el espacio libre las corrientes y las cargas son cero y las ecuaciones de Maxwell se pueden simplificar eliminando los términos correspondientes. Asimismo si las fuentes varían armónicamente con el tiempo, las ecuaciones electromagnéticas y sus soluciones se simplifican, utilizando para ello una notación fasorial, de forma que las derivadas respecto al tiempo se transforman en productos por el factor $j\omega$.

En medios materiales hay que considerar la relación entre los vectores intensidad $\vec{E},\vec{H}$ e inducción $\vec{D},\vec{B}$ utilizando la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética, que en el espacio libre toman los valores

$$\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \text{ F/m}$$
$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$$

En general

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_r\mu_0\vec{H}$$

Posibilidades para ε y μ

Los valores relativos de la permitividad y permeabilidad pueden ser reales o complejos (medios sin pérdidas o con pérdidas) escalares o matrices (medios isótropos o anisotrópos) , constantes o variables (homogéneos o inhomogéneos), sus valores pueden depender de la amplitud de los campos (medios no lineales) o incluso tener efectos de memoria (histéresis).

→ misma relación en todas las direcciones

En este caso las ecuaciones de Maxwell para campos variables sinusoidalmente se pueden escribir como

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\nabla\cdot\vec{H} = 0$$
$$\nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$
$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E}$$

Se han supuesto ε y μ homogéneos (ya que hemos sacado ε de la divergencia)

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero, Mariano Baquero. Universidad Politécnica de Valencia

Ecuaciones de Onda para los Campos

Las ecuaciones de Maxwell son la base para deducir las leyes del Electromagnetismo, mediante manipulaciones matemáticas, utilizando las bases del cálculo diferencial y vectorial.

Una de las consecuencias más importantes es la ecuación de onda para los campos eléctricos, que en el espacio libre, sin fuentes, toman la forma de ecuaciones diferenciales vectoriales homogéneas.

El precio a pagar es que son de segundo orden

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{H} = 0$$

La solución de las ecuaciones de onda toma la forma de ondas, que dependiendo de las fuentes y las condiciones de contorno, pueden tomar formas muy diversas.

Las fuentes puntuales crean ondas esféricas. Varias fuentes puntuales producen ondas en todas las direcciones del espacio, que en cada dirección tienen una amplitud diferente. Dichas ondas, lejos de las fuentes pueden considerarse ondas planas. Por ejemplo la radiación solar, observada desde la tierra es una onda plana.

Los experimentos de **Heinrich Rudolf Hertz** (Hamburgo 22 de Febrero de 1857- Bonn 1 de Enero de 1894), permitieron demostrar que la luz era una radiación electromagnética. Entre los años 1885 y 1889, siendo profesor de Física en el Politécnico de Karlsruhe, consiguió producir ondas electromagnéticas en el laboratorio, midiendo su longitud de onda y velocidad.

Demostró que dichas ondas se comportaban como la radiación luminosa, con los mismos fenómenos de reflexión y refracción.

La deducción rigurosa de las soluciones de la ecuación de onda es muy simple para la ecuación escalar, en los problemas abiertos y sin obstáculos, pero se convierte en un problema realmente complejo en medios inhomogénos, anisótropos, no lineales y cuando las dimensiones del problema es del orden de varias longitudes de onda.

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero, Mariano Baquero. Universidad Politécnica de Valencia

En la actualidad se están dedicando miles de investigadores a resolver dicho problema con multitud de variantes y en aplicaciones de antenas, propagación, microondas, radar, óptica, comunicaciones, etc.

Las ecuaciones de Maxwell, desde un punto de vista matemático son un sistema de ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden, apareciendo entremezclados los campos eléctricos y magnéticos. A continuación se van a obtener unas nuevas ecuaciones diferenciales inhomogéneas, de segundo orden donde se encuentren separados los campos.

Tomando el rotacional de la Ley de Faraday se obtiene la ecuación de onda para el campo eléctrico

$$\nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

μ sale fuera suponiendo homogeneidad (no varía con las coordenadas espaciales)

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu\nabla\times\vec{H}$$

$$\nabla\nabla\cdot\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = -j\omega\mu(\vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E})$$

$$\nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} = j\omega\mu\vec{J} + \nabla(\frac{\rho}{\varepsilon})$$

Si consideráramos cargas magnéticas, en el lado derecho aparecerían dos términos mas.

Tomando el rotacional de la Ley de Ampère se obtiene la ecuación de onda para el campo magnético.

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H} = \nabla\times\vec{J} + j\omega\varepsilon\nabla\times\vec{E}$$

$$\nabla\nabla\cdot\vec{H} - \nabla^2\vec{H} = \nabla\times\vec{J} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{H}$$

$$\nabla^2\vec{H} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{H} = -\nabla\times\vec{J}$$

Las dos ecuaciones de onda inhomogéneas para los campos son

Como se puede observar, la relación entre los campos y las fuentes no es directa, apareciendo operaciones vectoriales (divergencia y rotacional) de las cargas y corrientes.

$$\nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} = j\omega\mu\vec{J} + \nabla(\frac{\rho}{\varepsilon})$$

$$\nabla^2\vec{H} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{H} = -\nabla\times\vec{J}$$

Utilizando la forma simétrica, se haría:

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} = \nabla\times\vec{M} + j\omega\mu\vec{J} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho_e \\ \nabla^2\vec{H} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{H} = -\nabla\times\vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{M} + \frac{1}{\mu}\nabla\rho_m \end{cases}$$

La justificación de usar los potenciales $\vec{A}$ y $\vec{F}$ sale de aquí ¿se mezclan $\vec{J}$ y $\vec{M}$? se inventan los vectores potenciales $\vec{A}$ y $\vec{F}$ para evitar esto y $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$, $\vec{D} = \nabla\times\vec{F}$

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero, Mariano Baquero. Universidad Politécnica de Valencia

y si además sustituimos la ecuación de continuidad:

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} = \nabla\times\vec{M} + j\omega\mu\vec{J} - \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla(\nabla\vec{J}) \\ \nabla^2\vec{H} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{H} = -\nabla\times\vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{M} - \frac{1}{j\omega\mu}\nabla(\nabla\vec{M}) \end{cases}$$

- Con los dos vectores potenciales $\vec{A}$ y $\vec{F}$ se obtienen los campos
- Alternativa: con dos potenciales escalares de Hertz se obtienen los campos
- Con un vector potencial y escalar potencial (usamos en esta asignatura) se obtienen los campos.

Ecuaciones de onda para los potenciales

Para simplificar el cálculo de los campos eléctricos y magnéticos se puede recurrir a una funciones potenciales escalar y vector, que simplifiquen los cálculos.

El potencial vector se puede definir teniendo en cuenta la ley de Gauss para el flujo magnético. Si se define $\vec{B}$ como el rotacional de un vector, automáticamente se cumple que la divergencia es cero.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$ ← exijo esto

El potencial escalar se puede definir a partir de la Ley de Faraday y de la definición del potencial vector. Teniendo en cuenta que el rotacional del gradiente de una función es cero, se puede definir el potencial escalar como:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega(\nabla \times \vec{A})$$

$$\nabla \times (\vec{E} - j\omega\vec{A}) = 0$$

$$\vec{E} - j\omega\vec{A} = -\nabla\Phi$$

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla\Phi$$

La ley de Ampère y las definiciones anteriores nos permiten obtener la siguiente ecuación de onda para el potencial vector eléctrico.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu\vec{J} + j\omega\mu\varepsilon(-\nabla\Phi - j\omega\vec{A})$$

$$\nabla\nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J} + j\omega\mu\varepsilon(-\nabla\Phi - j\omega\vec{A})$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{A} = -\mu\vec{J} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\mu\varepsilon\Phi)}$$

Utilizando la Ley de Gauss para el campo eléctrico se obtiene la ecuación de onda para el potencia escalar

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \cdot (-j\omega\vec{A} - \nabla\Phi) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi + \omega^2\mu\varepsilon\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} + (-j\omega\nabla \cdot \vec{A} + \omega^2\mu\varepsilon\Phi)}$$

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero, Mariano Baquero. Universidad Politécnica de Valencia

Se ha definido el campo magnético a partir del rotacional del potencial vector, pero es necesario definir también su divergencia. Esta relación se denomina condición de Lorentz.

$$\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\mu\varepsilon\Phi = 0$$

Es posible simplificar las expresiones de las ecuaciones de onda para los potenciales.

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

Hemos "desacoplado la excitación"

En el caso de usar los potenciales $\vec{A}$ y $\vec{F}$ quedaría

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{A} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{A} = -\mu\vec{J} \\ \nabla^2\vec{F} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{F} = -\varepsilon\vec{M} \end{cases}$$

Solución de la ecuación de Onda inhomogénea

Los campos eléctricos y magnéticos y el potencial eléctrico están relacionados con las fuentes (cargas y corrientes) mediante **la ecuación de onda vectorial inhomogénea.** El potencial escalar está relacionado con la carga mediante la ecuación de onda escalar inhomogénea.

Un primer paso para resolver los problemas con fuentes es resolver el problema inhomogéneo, tanto escalar como vectorial, en los distintos sistemas de coordenadas.

Podemos hallar la solución mediante la convolución de la función de Green con la distribución de las fuentes

En un segundo paso se encontrarán las **funciones de Green de la ecuación de onda.** Las funciones de Green son las soluciones cuando la fuente es un delta. ← ecuación de onda escalar

En el caso más complejo, las fuentes pueden ser vectoriales, y la solución de la ecuación de onda también será vectorial En este caso será necesario obtener las **funciones diádicas de Green**, que permiten por ejemplo relacionar el campo eléctrico en una determinado problema con las corrientes, que pueden tener cualquier orientación en el espacio. ← ecuación de onda vectorial

La ecuación de onda escalar homogénea, (en ausencia de fuentes) se puede escribir como

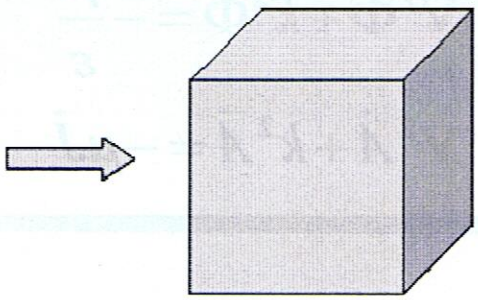
$$\nabla^2\Omega + k^2\Omega = 0$$

En el caso de potenciales $\vec{A}$ y $\vec{F}$ se pueden reducir a parte escalar $\vec{A} = A_z\hat{z}$, $\vec{F} = F_z\hat{z}$ distintos modos TE y TM

otra forma de solucionar es encontrar el conjunto de soluciones en región sin fuentes tal que formen una base completa (cualquier distribución de campo que pueda existir será expresable en dicha base) y luego 'encajarlas' con las corrientes en el contorno

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero, Mariano Baquero. Universidad Politécnica de Valencia

La solución de esta ecuación permite diseñar innumerables dispositivos y resolver problemas como los de propagación de ondas en entornos complejos. Aunque aparentemente es simple, hay casos donde no ha sido posible encontrar soluciones analíticas. Hay innumerables ejemplos, pero uno muy simple podría ser un cubo metálico iluminado por una onda plana. Se conocen las soluciones para los campos en el interior de un resonador en forma de cubo, pero no en el exterior, por lo menos de una forma simple y hay que recurrir a métodos aproximados en baja frecuencia, cuando el objeto es comparable a la longitud de onda, o en alta frecuencia, cuando las dimensiones del objeto son muy superiores a la longitud de onda.



La ecuación de onda escalar se puede resolver de forma analítica en diversos sistemas de coordenadas (cartesianas, cilíndricas, esféricas, esferoidales, etc). Se puede resolver mediante el método de separación de variables, en forma de productos de series. Los coeficientes de las series se determinan a partir de las condiciones de contorno del problema.

La ecuación de onda vectorial se puede resolver para cada una de las componentes de los vectores. En principio cabría pensar resolver como mínimo 3 ecuaciones, para cada una de las componentes del vector, pero se puede demostrar que es suficiente con obtener 2 soluciones linealmente independientes.

En algunos casos la ecuación de onda se puede resolver directamente. Los casos más simples son los del espacio libre, sin ningún tipo de obstáculo y también son relativamente simples los casos con simetrías.

A continuación se planten varios casos muy simples de soluciones, que equivalen a la solución elemental de las ondas planas, cilíndricas y esféricas.

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero, Mariano Baquero. Universidad Politécnica de Valencia

Ondas planas

En coordenadas cartesianas, si no hay variación en la dirección x y tampoco en la dirección y, la ecuación de onda tiene la solución conocida de ondas planas unidimensionales.

El lugar geométrico de los puntos de fase constante es un plano

$$\nabla^2\Omega + k^2\Omega = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} + k^2\Omega = 0 \end{cases}$$

$$\Omega = Ae^{-jkz} + Be^{jkz}$$

Como se puede observar, la expresión obtenida equivale a dos ondas planas que se propagan en el sentido positivo y negativo del eje z. El caso indicado es muy simple y podría ser la solución de la radiación de una lámina bidimensional de corrientes en el espacio libre. Cada una de las ondas representaría la solución en un semiespacio.

Ondas cilíndricas

La solución de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas, con la condición de no variación en las direcciones ϕ,z se puede obtener fácilmente a partir de la expresión de ∇^2 en cilíndricas y de las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel.

$$\nabla^2\Omega + k^2\Omega = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\phi} = 0$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} + k^2\Omega = 0$$

$$\Omega = AH_0^{(1)}(k\rho) + BH_0^{(2)}(k\rho)$$

Las funciones H que se obtienen son las funciones de Hankel modificadas de primera y segunda especie, que tienen un comportamiento asintótico como

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero, Mariano Baquero. Universidad Politécnica de Valencia

$$H_0^{(2)}(k\rho) \simeq \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

$$H_0^{(1)}(k\rho) \simeq \frac{e^{jk\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

Las expresiones obtenidas representan ondas cilíndricas que se propagan en la dirección radial en el sentido de radios crecientes y decrecientes. La solución indicada podría ser la solución de la radiación de un hilo conductor infinito, situado en el eje z.

Ondas esféricas

En coordenadas esféricas en el caso de que haya simetría en trono al origen, sin variación respecto a las variables angulares, la solución de la ecuación de onda en con la condición de no variación en las direcciones θ,ϕ es

$$\nabla^2\Omega + k^2\Omega = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\phi} = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r} + k^2\Omega = 0$$

$$\Omega = A\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} + B\frac{e^{jkr}}{4\pi r}$$

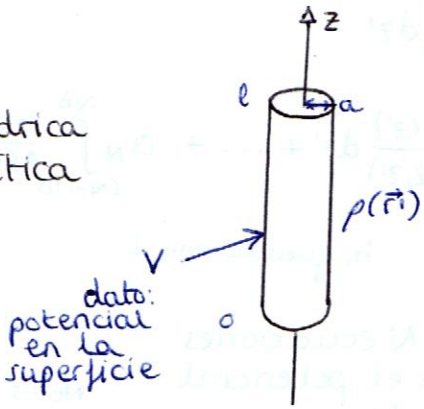
La solución se obtiene como superposición de dos ondas esféricas, progresiva (desde el origen a infinito) y regresiva, en sentido contrario. Podría ser la solución a la radiación de una fuente puntual situada en el origen de coordenadas.

© Miguel Ferrando, Alejandro Valero, Mariano Baquero. Universidad Politécnica de Valencia

MÉTODO DE LOS MOMENTOS

Ejemplo 1.

Varilla cilíndrica en electrostática



$\rho(\vec{r}')$ densidad de carga superficial

$$\rho(\vec{r}') = \rho_s(z, \overbrace{\rho=a}^{\text{fijo}}, \phi)$$

En general no se llega a la ecuación integral directamente, sino que se llega mediante las condiciones de contorno

El potencial viene determinado por la carga, expresión conocida de electrostática:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R(\vec{r},\vec{r}')}\, dv'$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

Suposiciones:

1- conductor perfecto

$$\rho(\vec{r}') = \rho_s(z, \rho=a, \phi)$$

2- 'a' es delgado ⇒ ρ no depende de ϕ

podemos simplicar con un 'hilo' de carga $\rho_l = 2\pi a \rho_s(z)$

El potencial queda:

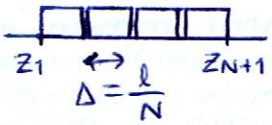
$$\underbrace{V(z, \rho=a)}_{\text{dato}} = \int_0^l \frac{\rho_l(z)}{R(z,z')}\, dz'$$

$$R(z,z') = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$$

Ecuación integral a resolver (en general será integrodiferencial)

El método de los momentos descompone en funciones base: En lugar de usar senos y cosenos en el hilo, vamos a usar funciones base 'por bloques' tambien llamadas 'discretas'

ej: pulsos



ej triángulos → mejor continuidad

Básicamente dividimos el hilo en trocitos

$$\rho_l(z') = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot h_n(z')$$

La ecuación del potencial queda:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\ell}\frac{1}{R(z,z')}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n h_n(z')\right]dz'$$

$$4\pi\varepsilon_0 V(z) = a_1\int_0^{\Delta}\frac{h_1(z')}{R(z,z')}dz' + a_2\int_{\Delta}^{2\Delta}\frac{h_2(z')}{R(z,z')}dz' + \ldots + a_N\int_{(N-1)\Delta}^{N\Delta}\frac{h_N(z')}{R(z,z')}$$

a_1: incógnitas; $\int_0^{\Delta}\frac{h_1(z')}{R(z,z')}dz'$: peso

h_i quedará como 1

N incógnitas → necesitamos N ecuaciones exigiendo el potencial en cada punto (point matching)

No es la única manera de tener N ecuaciones

Se está exigiendo sólo en los puntos, pero NO entre puntos

$$\begin{cases} 4\pi\varepsilon_0 V(z_1) = a_1\int_0^{\Delta}\frac{1}{R(z_1,z')}dz' + a_2\int_{\Delta}^{2\Delta}\frac{1}{R(z_1,z')}dz' + \ldots + a_N\int_{(N-1)\Delta}^{N\Delta}\frac{1}{R(z_1,z')}dz' \\ 4\pi\varepsilon_0 V(z_2) = a_1\int_0^{\Delta}\frac{1}{R(z_2,z')}dz' + \ldots \\ \vdots \end{cases}$$

Toda la carga de TODO el cilindro está forzando a que el potencial en z_1 sea $V(z_1)$

$V(z_m) = V$ cte en el cilindro

Expresándolo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} & Z_{mn} & \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = 4\pi\varepsilon_0\begin{bmatrix} V(z_1) \\ V(z_2) \\ \vdots \\ V(z_m) \end{bmatrix}$$

N incógnitas; M puntos; M = N

siendo $$Z_{mn} = \int_{(n-1)\Delta}^{\Delta}\frac{1}{\sqrt{(z_m - z')^2 - a^2}}dz'$$

La matriz tiene TODOS los elementos importantes (no tiene ceros) lo cual no permite ciertas optimizaciones y es costoso de resolver

En ocasiones, si el punto fuente coincide con el punto destino, aparece en la integral una singularidad.
Puede interesar resolverse analíticamente

Los elementos de la diagonal son particularmente importantes porque representan el potencial que genera un trozo sobre sí mismo. Hay que hacer la integral con cuidado (distancias pequeñas)

ej $m \neq n$ $m = n$

Integrando analíticamente los elementos de la matriz Z

$$Z_{mn} = \begin{cases} 2 \ln \dfrac{\frac{\Delta}{2} + \sqrt{a^2 + (\frac{\Delta}{2})^2}}{a} & \forall\, m = n \\ \ln\left(\dfrac{d^+_{mn}}{d^-_{mn}}\right) & \forall\, |m-n| > 2 \\ \text{fórmula larga} & \text{resto} \end{cases}$$

$$d^+_{mn} = l_m + \frac{\Delta}{2}$$
$$d^-_{mn} = l_m - \frac{\Delta}{2}$$
$$\downarrow$$
$$\sqrt{[(m-n)\Delta]^2 + a^2}$$

Y una vez calculados bastaría con resolver el sistema
ejemplo: por eliminación de Gauss

$$\begin{bmatrix} Z_{mn} \end{bmatrix}$$

En general conviene pararse a pensar para ver si algunos elementos de la matriz son iguales.

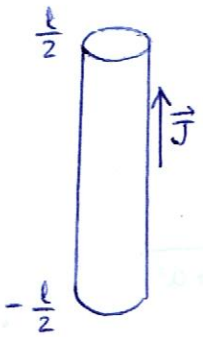
Resulta que es una matriz TOEPLITZ ⇐

en verdad, puesto que Z_{mn} simplemente está integrando distancias

$$Z_{mn} = Z_{nm}$$

y $Z_{mn} = Z_{m'n'}$ si $m-n = m'-n'$

Ejemplo 2



¿De dónde sacamos la ecuación integral?

$$\left.\begin{array}{l} E_{\substack{total\\tan}}\left(\substack{sup.\\metal}\right) = 0 \\ \uparrow \\ E^{inc}_{tan} + E^{disp}_{tan} \end{array}\right] \Longrightarrow \boxed{E^{disp}_{tan} = -E^{inc}_{tan}}$$

De aquí sacaremos la ecuación integral

Ya que $\vec{E}^{disp} = -j\omega\vec{A} - \nabla\phi$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\int_{0}^{2\pi} \underbrace{J_z(z',\phi')}_{\text{corriente}} \underbrace{\frac{e^{-jkR}}{R}}_{\text{función de Green}} \cdot a\, d\phi'\, dz'$$

Recordemos que, con la condición de Lorentz

$$\nabla\cdot\vec{A} = -j\omega\mu\varepsilon\phi$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = -j\omega\mu\varepsilon\phi$$

por simplificar, introducimos una derivada que luego molestará

Por lo que

$$E_z^{disp} = -j\frac{1}{\omega\mu_0\varepsilon_0}\left(k^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)$$

$$E_z^{disp} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \underbrace{\left[\frac{d^2G(z,z')}{dz^2} + k^2 G(z,z')\right]}_{G(z,z') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}} J_z(\phi', z')\, a\, d\phi'\, dz'$$

incógnita a discretizar

ECUACIÓN INTEGRAL DE POCKLINGTON

pesos de las incógnitas
||
elementos de la matriz Z

La presencia de las derivadas hará más difíciles las integrales. → términos $1/R^5$ → muy singular
Es muy importante que no coincida el punto fuente y destino para evitar singularidades en el integrando

Simplificando a un hilo de corriente:

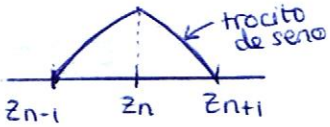
$$I(z') = 2\pi a J(z)$$

$$E_z^{disp} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\underbrace{\left[\frac{d^2G(z,z')}{dz^2} + k^2 G(z,z')\right]}I(z')\,dz' = -E^{inc}$$

$$\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}(1+jkR)(2R^2-3a^2)+(kaR)^2$$

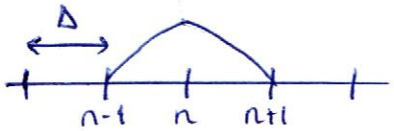
$$R = \sqrt{a^2+(z-z')^2}$$

Para discretizar usaremos unas funciones base especiales

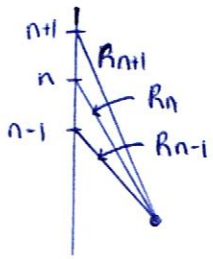


$$h_n(z) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } k(z-z_{n-1})}{\text{sen } k\Delta} & z_{n-1} < z < z_n \\ \dfrac{\text{sen } k(z_{n+1}-z)}{\text{sen } k\Delta} & z_n < z < z_{n+1} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Y se usa ésta función base precisamente porque es fácil escribir el campo creado por ese trocito con fórmula explícita

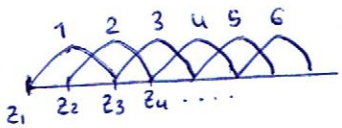


$$E_z^{disp} = -j\frac{30}{\text{sen}k\Delta}\left[\frac{e^{-jkR_{n-1}}}{R_{n-1}} + 2\frac{e^{-jkR_n}}{R_n}\cos k\Delta + \frac{e^{-jkR_{n+1}}}{R_{n+1}}\right]$$



De forma que el sistema

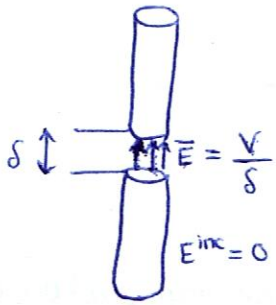
$$\left[\ Z_{mn}\ \right]\left[\ I\ \right] = \left[\ \ \right]$$



Z_{mn} es el campo producido por el trocito n sobre el punto z_m

En un dipolo ¿cuál es el campo 'incidente'?
Es el <u>campo de excitación</u>

1ª aproximación

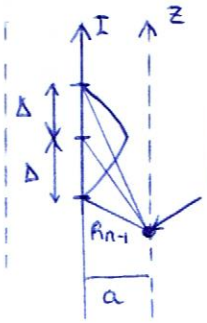


2ª aproximación

una apertura es como una corriente magnética

$$E^{inc} = \frac{V}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\left(\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{-jkR_2}}{R_2}\right)$$

EJERCICIO



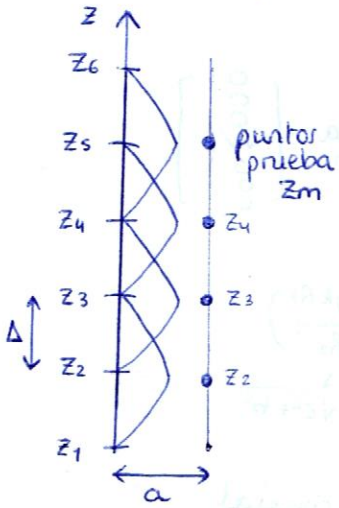
$$E_{z\,disp}(a,z) = -j\frac{30}{\operatorname{sen} k\Delta}\left[\frac{e^{-jkR_{n-1}}}{R_{n-1}} - 2\frac{e^{-jkR_n}}{R_n}\cos k\Delta + \frac{e^{-jkR_{n+1}}}{R_{n+1}}\right]$$

$$h_n(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} k(z-z_{n-1})}{\operatorname{sen} k\Delta} & z_{n-1} \le z \le z_n \\ \dfrac{\operatorname{sen} k(z_{n+1}-z)}{\operatorname{sen} k\Delta} & z_n \le z \le z_{n+1} \\ 0 & 0 \end{cases}$$

en $z = z_n \rightarrow h_n(z_n) = I_n = \dfrac{\operatorname{sen} k\Delta}{\operatorname{sen} k\Delta} = 1$

Por tanto, si $I(z') = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \cdot h_n(z')$ descomposición en funciones base

$$E_{z\,disp}(a,z) = -j\frac{30}{\operatorname{sen} k\Delta}\sum_{n=2}^{N-1}\left[\frac{e^{-jkR_{n-1}}}{R_{n-1}} - 2\frac{e^{-jkR_n}}{R_n}\cos k\Delta + \frac{e^{-jkR_{n+1}}}{R_{n+1}}\right]$$



Puesto que tenemos $N-2$ incógnitas, necesitamos escoger $N-2$ puntos prueba donde exigir la condición, para tener $N-2$ ecuaciones

para la función base n en el punto prueba m intervienen:

$$R_{n+1-m} = \sqrt{((n+1-m)\Delta)^2 + a^2}$$
$$R_{n-m} = \sqrt{((n-m)\Delta)^2 + a^2}$$
$$R_{n-1-m} = \sqrt{((n-1-m)\Delta)^2 + a^2}$$

además $R_k = R_{-k}$

$$E_{z\,disp}(a,z_m) = -j\frac{30}{\operatorname{sen} k\Delta}\cdot\sum_{n=2}^{N-1} a_n\left[\frac{e^{-jkR_{n-1-m}}}{R_{n-1-m}} - 2\frac{e^{jkR_{n-m}}}{R_{n-m}}\cos k\Delta + \frac{e^{-jkR_{n+1-m}}}{R_{n+1-m}}\right]$$

con $m = 2, 3, \ldots, N-1$

$$\begin{cases}
E_{z\,disp}(a,z_2) = -j\dfrac{30}{\operatorname{sen} k\Delta}\displaystyle\sum_{n=2}^{N-1}\left(\frac{e^{-jkR_{n-3}}}{R_{n-3}} - 2\frac{e^{jkR_{n-2}}}{R_{n-2}}\cos k\Delta + \frac{e^{-jkR_{n-1}}}{R_{n-1}}\right)a_n = -E_{z\,inc}(z_2) \\
E_{z\,disp}(a,z_3) = -j\dfrac{30}{\operatorname{sen} k\Delta}\displaystyle\sum_{n=2}^{N-1}\left(\frac{e^{-jkR_{n-4}}}{R_{n-4}} - 2\frac{e^{jkR_{n-3}}}{R_{n-3}}\cos k\Delta + \frac{e^{-jkR_{n-2}}}{R_{n-2}}\right)a_n = -E_{z\,inc}(z_3) \\
E_{z\,disp}(a,z_4) = -j\dfrac{30}{\operatorname{sen} k\Delta}\displaystyle\sum_{n=2}^{N-1}\left(\frac{e^{-jkR_{n-5}}}{R_{n-5}} - 2\frac{e^{jkR_{n-4}}}{R_{n-4}}\cos k\Delta + \frac{e^{-jkR_{n-3}}}{R_{n-3}}\right)a_n = -E_{z\,inc}(z_4) \\
\vdots \\
E_{z\,disp}(a,z_{N-1}) = -j\dfrac{30}{\operatorname{sen} k\Delta}\displaystyle\sum_{n=2}^{N-1}\left(\frac{e^{-jkR_{n-N}}}{R_{n-N}} - 2\frac{e^{jkR_{n-N-1}}}{R_{n-(N-1)}}\cos k\Delta + \frac{e^{-jkR_{n-N-2}}}{R_{n-(N-2)}}\right)a_n = -E_{z\,inc}(z_{N-1})
\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} z_{22} & z_{23} & \cdots & z_{2,N-1} \\ z_{32} & z_{33} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ z_{N-1,2} & & & z_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_{z\,inc}(z_2) \\ -E_{z\,inc}(z_3) \\ \vdots \\ -E_{z\,inc}(z_{N-1}) \end{bmatrix}$$

$(N-2)\times(N-2)$ $\quad$ $(N-2)\times 1$ $\quad$ $(N-2)\times 1$

Queda claro que:

$$Z_{mn} = -j\frac{30}{\operatorname{sen} k\Delta}\left[\frac{e^{-jkR_{n-m-1}}}{R_{n-m-1}} - 2\frac{e^{-jkR_{n-m}}}{R_{n-m}}\cos k\Delta + \frac{e^{-jkR_{n-m+1}}}{R_{n-m+1}}\right]$$

$$\text{con} \quad R_n = \sqrt{(n\Delta)^2 + a^2}$$

Ademas en realidad Z_{mn} sólo depende de $|(m-n)|$ por lo que lo llamamos Z_{m-n} y el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} Z_0 & Z_{+1} & Z_{+2} & \cdots & Z_{+N-3} \\ Z_1 & Z_0 & Z_{+1} & & \\ Z_2 & Z_1 & Z_0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ Z_{N-3} & & & & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_{z\,inc}(z_2) \\ -E_{z\,inc}(z_3) \\ \vdots \\ -E_{z\,inc}(z_{N-1}) \end{bmatrix}$$

↳ Delta Gap $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V/\delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

↓ Frill Generator

$$E_z^{inc} = \frac{V}{2\ln(b/a)}\left(\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{-jkR_2}}{R_2}\right)$$

$R_1 = \sqrt{z^2 + a^2}$ $\quad R_2 = \sqrt{z^2 + b^2}$

a y b?
Recuerda un coaxial

$Z_0 = 60 \ln(b/a) = 50\,\Omega$

$b = 2'3a$