

Seminario: Propagación de ondas en tecnología guiada. Junio 2009

Resumen del seminario. Francisco José Rodríguez Fortuño

1. Introducción e historia

El transporte de energía electromagnética puede ser por radiación (antenas) o por guiado (guías de OEM). Una posible clasificación de las guías es la de guías cerradas (tubo conductor, por ejemplo guía coaxial, circular, rectangular, ...), guías abiertas (línea bifilar, microtira, ...) y guías superficiales (utilizan dieléctricos y se basan en reflexión total interna, por ejemplo la fibra óptica).

En este seminario se estudian las guías cerradas: Rayleigh demostró teóricamente la posibilidad de utilizarlas, George C. Southworth las demostró experimentalmente, y se estudió en profundidad el tema durante la segunda guerra mundial debido a la invención del radar. En los años 60 y 70 se estudió todo tipo de guías cerradas tratando de optimizar el ancho de banda, la atenuación y la dispersión: pero curiosamente la mejor opción resultó ser la rectangular y la circular.

2. Conceptos básicos

Fenómenos físicos: se busca la propagación de energía en sólo una dirección privilegiada, para ello es necesario definir medios materiales, normalmente con simetría traslacional a lo largo de dicha dirección, lo cual permite distinguir entre coordenadas transversales (\vec{r}_t) y la coordenada axial (z).

Modo = solución de las ecuaciones de Maxwell para sistemas con simetría traslacional, con dependencia temporal armónica y factor de propagación β tal que:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}(\vec{E}(\vec{r}_t) e^{j(\omega t - \beta z)}) \\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) &= \text{Re}(\vec{H}(\vec{r}_t) e^{j(\omega t - \beta z)}) \\ \vec{E}(\vec{r}_t) &= \vec{e}_t(\vec{r}_t) + e_z(\vec{r}_t) \hat{z} \\ \vec{H}(\vec{r}_t) &= \vec{h}_t(\vec{r}_t) + h_z(\vec{r}_t) \hat{z}\end{aligned}\quad (1)$$

Como vemos, los fasores del modo sólo dependen de la coordenada transversal, y pueden separarse en componentes tangenciales y axiales.

3. Guías de onda homogéneas: Uno o más conductores rodeando un único medio dieléctrico.

Si se aplica la definición (1) de lo que es un modo a las ecuaciones de Maxwell suponiendo un medio lineal, **homogéneo**, isótropo y sin pérdidas, se llega a las ecuaciones de la divergencia y del rotor, que son el punto de partida para calcular los modos de una guía homogénea:

Ecuaciones de la divergencia:

$$\nabla_t \cdot \vec{e}_t = j\beta e_z$$

$$\nabla_t \cdot \vec{h}_t = j\beta h_z$$

Ecuaciones del rotor:

$$\nabla_t \times \vec{e}_t = -j\omega\mu h_z \hat{z}$$

$$\hat{z} \times (\nabla_t e_z) + j\beta \hat{z} \times \vec{e}_t = j\omega\mu \vec{h}_t$$

$$\nabla_t \times \vec{h}_t = j\omega\epsilon e_z \hat{z}$$

$$\hat{z} \times (\nabla_t h_z) + j\beta \hat{z} \times \vec{h}_t = -j\omega\epsilon \vec{e}_t$$

(2)

A partir de estas ecuaciones, se obtienen fórmulas para expresar las componentes transversales del modo en función de las axiales, de forma que el análisis de una guía puede reducirse a obtener las **componentes axiales**.

$$\vec{h}_t = \frac{-j}{\omega^2\mu\epsilon - \beta^2} (\omega\epsilon \hat{z} \times (\nabla_t e_z) + \beta (\nabla_t h_z))$$

$$\vec{e}_t = \frac{-j}{\omega^2\mu\epsilon - \beta^2} (-\omega\mu \hat{z} \times (\nabla_t h_z) + \beta (\nabla_t e_z))$$

(3)

Dichas componentes axiales se pueden obtener en una guía homogénea a partir de dos ecuaciones desacopladas en derivadas parciales, las *Ecuaciones de Helmholtz*:

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 + k_t^2) e_z &= 0 \\ (\nabla_t^2 + k_t^2) h_z &= 0 \end{aligned}$$

se ha definido:

$$k_t^2 \equiv \omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2 \quad (4)$$

Al estar desacopladas, podemos considerar soluciones por separado **anulando o bien e_z (modos TE^z) o bien h_z (modos TM^z) o ambos (modos TEM)**. Se puede demostrar que las tres soluciones forman un **conjunto completo** (en el caso de guía homogénea).

Para los modos TEM no nos sirven las ecuaciones (4) y hay que volver a (2), donde sustituyendo $e_z = h_z = 0$ podemos ver que e_z deriva de potencial, y que dicho potencial cumple la ecuación de Laplace como en electrostática. Los modos TEM resultan en una $\beta = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2}$ no dispersiva y siempre requieren de al menos dos conductores.

Las ecuaciones 4(a) y 4(b) dan lugar a los modos TM^z y TE^z respectivamente, y pueden verse como un **problema de autovalores** en el cual hay que aplicar la condición de contorno de Dirichlet para 4(a) [campo e_z se anula en el conductor] o la de Neumann para 4(b) [campo h_z anula su derivada respecto a la normal en el conductor].

Los distintos autovalores k_t permiten obtener de forma muy simple la constante de propagación β de los distintos modos [usando 4(c)] y además permiten hallar la frecuencia de corte del modo sin más que hacer $\beta = 0$. Los autovectores por otro lado representan los campos axiales del modo correspondiente, son ortogonales, y forman un conjunto completo. A partir de los campos axiales se deducen las componentes tangenciales mediante (3), y con éstas pueden definirse cosas como la impedancia del modo (relacion entre e_t y h_t).

4. Ortogonalidad entre modos TE^z y TM^z en guías homogéneas

Partiendo de (4), sabiendo que son válidas tanto para un modo φ_i (siendo φ la componente axial e_z o h_z) como para un modo distinto φ_j , pueden manejarse las ecuaciones realizando algunas operaciones algebraicas, y luego aplicar la identidad de Green, llegándose a deducir que:

$$\beta_i^2 \neq \beta_j^2 \implies \int_S \psi_i \psi_j dS = 0 \quad (5)$$

Es decir, ortogonalidad de las componentes axiales entre modos no degenerados.

Además, para los campos transversales también puede deducirse las siguientes condiciones :

Modos no degenerados:

$$\int_S \vec{e}_{t_m}^{TM^z} \cdot \vec{e}_{t_n}^{TM^z} dS = 0 \quad \int_S \vec{e}_{t_m}^{TE^z} \cdot \vec{e}_{t_n}^{TE^z} dS = 0$$

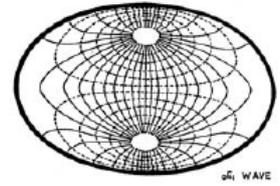
$$\int_S \vec{h}_{t_m}^{TM^z} \cdot \vec{h}_{t_n}^{TM^z} dS = 0 \quad \int_S \vec{h}_{t_m}^{TE^z} \cdot \vec{h}_{t_n}^{TE^z} dS = 0$$

Todos los modos:

$$\int_S \vec{e}_{t_m}^{TM^z} \cdot \vec{e}_{t_n}^{TE^z} dS = 0 \quad \int_S \vec{h}_{t_m}^{TM^z} \cdot \vec{h}_{t_n}^{TE^z} dS = 0 \quad (6)$$

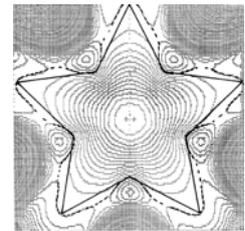
5. Ejemplos de guías cerradas homogéneas

En algunos casos simples, las ecuaciones (4) pueden resolverse por separación de variables. Los únicos 11 sistemas de coordenadas que admiten separación de variables son: rectangular, cilíndricas circulares, cilíndricas elípticas, cilíndricas parabólicas, esféricas, cónicas, parabólicas, esferoidales prolatas, esferoidales oblatas, elipsoidales y paraboidales. De ellos, sólo 6 permiten separar en componentes transversales y axiales. Por tanto las únicas guías con solución analítica son la guía rectangular (senos y cosenos), la guía circular (funciones de Bessel), la guía elíptica (funciones de Mathieu), la guía coaxial circular, la guía coaxial elíptica cofocal y la guía parabólica.



Para resolver guías con sección arbitraria hay que recurrir a métodos numéricos:

- **Método de la aproximación funcional:** se basa en construir un conjunto de funciones base que satisfagan las condiciones de contorno, y considerar que la solución del modo será combinación lineal de estas funciones base, de forma que (4) se transforma en (7), que mediante el método de Galerkin puede transformarse en un sistema lineal matricial de autovalores.



$$\nabla_t^2 \sum_{m=1}^N a_m f_m = -k_t^2 \sum_{m=1}^N a_m f_m \quad (7)$$

D. T. Thomas, "Functional approximations for solving boundary value problems by computer", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-17, no. 8, pp. 447-454, Aug. 1969

- **Método de la adaptación puntual:** método de los momentos versión point-matching

6. Guías de onda cerradas inhomogéneas: Pueden tener varios medios dieléctricos

Sustituyendo la expresión de un modo (1) en las ecuaciones de Maxwell pero sin dieléctrico homogéneo, se llega a ecuaciones del rotor y la divergencia iguales a (2) pero con un término más que representa la variación de ϵ y μ :

Ecuaciones de la divergencia:

$$\nabla_t \cdot \vec{e}_t = j\beta e_z - \vec{e}_t \cdot \frac{\nabla_t \epsilon}{\epsilon}$$

$$\nabla_t \cdot \vec{h}_t = j\beta h_z - \vec{h}_t \cdot \frac{\nabla_t \mu}{\mu}$$

Ecuaciones del rotor:

$$\nabla_t \times \vec{e}_t = -j\omega \mu h_z \hat{z}$$

$$\hat{z} \times (\nabla_t e_z) + j\beta \hat{z} \times \vec{e}_t = j\omega \mu \vec{h}_t$$

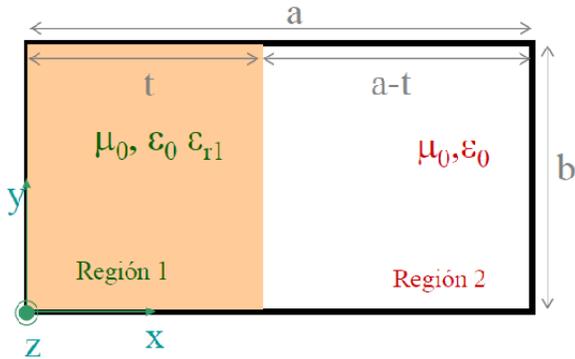
$$\nabla_t \times \vec{h}_t = j\omega \epsilon e_z \hat{z}$$

$$\hat{z} \times (\nabla_t h_z) + j\beta \hat{z} \times \vec{h}_t = -j\omega \epsilon \vec{e}_t \quad (8)$$

Con estas expresiones y la misma filosofía que en (3) se puede deducir la componente tangencial a partir de la componente axial, y se puede deducir un equivalente a las ecuaciones de Helmholtz (4) para las componentes axiales: Sin embargo dichas ecuaciones resultan ser tremendamente complejas, y no son prácticas para resolver las guías. Hay que recurrir a otros métodos.

7. Ejemplo - Guía rectangular cargada con lámina dieléctrica:

¿Modos TE^z y TM^z ?



Si intentamos calcular los modos TE^z , resolvemos la ecuación de Helmholtz 4(a) en cada medio, y aplicamos las condiciones de contorno (Dirichlet en la superficie del metal, y continuidad de componentes tangenciales en el interfaz entre regiones) se observa que NO hay soluciones. Lo MISMO ocurre si se intentan calcular modos TM^z con 4(b). ¿Porqué? Porque los modos en esta guía son **híbridos (HEM)** (TE^z y TM^z no están desacoplados, y se excitan el uno al otro, por lo que no pueden existir solos).

- Solución: Resolver 4(a) y 4(b) simultáneamente para hallar familia de modos híbridos
- Solución mejor: Utilizar familias alternativas de modos que NO acoplan las soluciones

Familias alternativas de modos:

Cualquier problema en guía rectangular se puede resolver alternativamente con cualquiera de estas tres familias de modos (se puede demostrar que todas forman un conjunto completo).

$$[TE^z, TM^z, TEM^z], \quad [TE^y, TM^y, TEM^y], \quad [TE^x, TM^x, TEM^x]$$

Solucionar la guía rectangular cargada usando modos TE^x y TM^x

Los modos TE^x y TM^x pueden calcularse a partir de un potencial escalar que cumple la ecuación $(\nabla_t^2 + k_t^2) \psi = 0$ cuya solución son senos y cosenos de amplitudes incógnita tanto en x como en y . Aplicando las condiciones de contorno de los campos (NO de los potenciales) correspondientes (según estemos calculando modos TE^x o TM^x) tanto en las paredes metálicas como en el interaz entre regiones se obtiene un sistema de ecuaciones trascendentes cuyas soluciones son los modos TE^x o TM^x , que resultan no estar acoplados.

8. Ortogonalidad de modos: caso general

Las familias alternativas de modos vistas anteriormente resulta que NO cumplen las relaciones vistas en (6), que eran válidas para modos TE^z y TM^z en guías homogéneas. Para deducir las condiciones de ortogonalidad en una guía inhomogénea se puede partir directamente de las ecuaciones de Maxwell sin ninguna suposición, y tras ciertas manipulaciones y la aplicación del teorema de la divergencia para superficies, se llega a:

Para **cualesquiera** dos modos:

$$\frac{\beta_m^2 - \beta_n^2}{\beta_n} \int_S \hat{z} \cdot (\vec{e}_{t_n} \times \vec{h}_{t_m}) dS = 0$$

Este debe ser el criterio para ortonormalizar modos en cualquier guía.

Y si no son degenerados:

$$\int_S \vec{e}_{t_n} \cdot \vec{e}_{t_m} dS = 0, \quad \int_S \vec{h}_{t_n} \cdot \vec{h}_{t_m} dS = 0 \quad (9)$$

Modos sin pérdidas y no degenerados:

$$\int_S (\vec{e}_{t_n} \times \vec{h}_{t_m}^*) \cdot \hat{z} dS = 0$$

Coincide con el vector de Poynting, indicando que los modos sin pérdidas no están acoplados en potencia (no hay término cruzado de dos modos al calcular la potencia, de forma que $P_{tot} = P_{modo1} + P_{modo2} + \dots$)

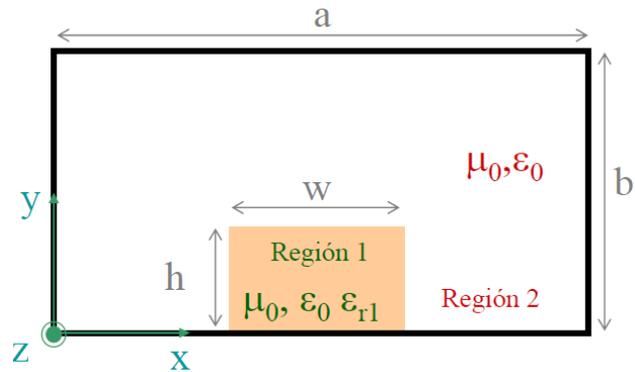
(10)

9. Estudio de la guía imagen

J. Strube, F. Arndt, "Rigorous Hybrid-Mode Analysis of the Transition from Rectangular Waveguide to Shielded Dielectric Image Guide", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-33, no. 5, pp.391-401, May 1985

Método:

- Dividir la guía en 4 regiones rectangulares
- Escribir conjunto de funciones ortogonal completo en cada región (TE^y y TM^y)
- Imponer condiciones de contorno en interfases, encontrando un problema lineal matricial $\mathbf{M} \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- El sistema tiene solución no-nula en aquellos valores de β (**constante de propagación compleja**) para los cuales $\det(\mathbf{M})=0$.



10. Curvas de dispersión con β compleja

Si se representa la constante de propagación compleja β en función de la frecuencia para la guía estudiada se obtienen resultados interesantes. Se distingue fácilmente entre propagación y corte (según β sea real o imaginaria) para cada modo.

Además aparecen unos nuevos **modos complejos** (donde β tiene parte real e imaginaria) a pesar de que la guía no tenga pérdidas. Se creía erróneamente que los modos complejos NO podían existir. No son un artificio matemático sino que son una oscilación física real que además es imprescindible tener en cuenta para el estudio de guías. Los modos complejos no transportan potencia activa, y la pareja de modos se propaga cada uno en una dirección, uno con β atenuándose mientras el otro con $-\beta^*$ ¡se amplifica! En realidad la energía que pierde uno la gana el otro y la pareja de modos se comporta como una onda evanescente (almacenan energía pero no la transportan). La pareja de modos está acoplada en potencia (por tanto uno siempre excita al otro) y la potencia total transportada es nula. Aunque el vector de Poynting no es cero, la integral sobre toda la guía se anula (es decir, la potencia va por unos sitios y vuelve por otros). Estos modos pueden servir para el diseño de filtros. Se puede trabajar 'normalmente' con ellos, ya que cumplen la relación de ortogonalidad 9(a). No existen criterios a priori para predecir la existencia de modos complejos, pero se sabe que siempre tienen que ser modos híbridos. Para inhomogeneidades débiles los modos complejos aparecen debido al *acoplo entre 2 modos evanescentes degenerados*. Para inhomogeneidades fuertes, aparecen como el acoplo de modos evanescentes o *propagativos* cerca de la degeneración o degenerados, en cuyo caso van acompañados de modos backward.

Los **modos backward** son aquellos que tienen una *pendiente negativa en la constante de propagación real*, lo cual implica que su velocidad de la *energía es opuesta a su velocidad de fase*. Suelen aparecer cuando aparecen modos complejos, pero no siempre. Son siempre híbridos. También es importante tenerlos en cuenta en el estudio de discontinuidades.

