

Tema 1. Teoría básica de señales y detección digital

Bloque I.1

1. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE SEÑALES

Conceptos básicos:

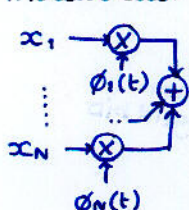
Producto interior: $\langle u(t), v(t) \rangle = \int_0^D u(t) \cdot v(t) dt$

Base ortonormal: $\langle \phi_n(t), \phi_k(t) \rangle = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$

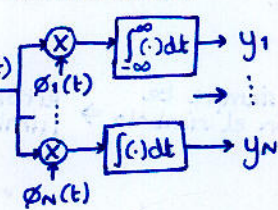
Símbolo asociado a una señal: $x(t) = \sum_{n=1}^N x_n \cdot \phi_n(t)$ suma ponderada de funciones base

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$ y cada componente se puede calcular como $x_n = \langle \underline{x}, \phi_n \rangle = \langle x(t), \phi_n(t) \rangle$

modulador



Demodulador



Fuente
 $R = \log_2 M$
↑
tasa [b/s]
dur. símbolo
mímb.

M símbolos

Codificador

N dimensiones

funciones base

Modulador

símbolo
ej $N=2$
 $M=4$
 $\underline{x}_i$

Canal

$x_i(t)$

$\hat{m}$

Detector (decisor)

y

Demod.

Canal Vectorial

funciones
 $p_y(y|\underline{x}_1)$
 $p_y(y|\underline{x}_2)$
 $\vdots$
 $p_y(y|\underline{x}_M)$

Energía de símbolo = Energía de señal modulada

$$E_{si} = \|\underline{x}_i\|^2 = \langle \underline{x}_i, \underline{x}_i \rangle$$

Energía de la constelación

$$E_x = E\{\|\underline{x}_i\|^2\} = \sum p_x(\underline{x}=\underline{x}_i) \cdot \|\underline{x}_i\|^2$$

Potencia media de señal

$$P_x = \frac{E_x}{D}$$

2. DETECCIÓN DE SEÑALES DIGITALES



Relación señal a ruido $SNR = \frac{E_x}{\sigma^2}$

Energía media por dimensión $\bar{E}_x = \frac{E_x}{N}$

Figura de mérito de la constelación $CFM = \frac{(d_{min}/2)^2}{\bar{E}_x}$

M funciones densidad de probabilidad
ej 2D
 $p_y(y|\underline{x}_1)$ $p_y(y|\underline{x}_2)$

Detector MAP (óptimo)

$$\hat{m} = \max_{m_i} \{p_y(y|\underline{x}_i) \cdot p_x(\underline{x}_i)\}$$

Max. a posteriori

Detector ML (coincide con MAP si simb equiprob)

$$\hat{m} = \max_{m_i} \{p_y(y|\underline{x}_i)\}$$

regiones de decisión

3. EL CANAL AWGN

media $E\{n_i\} = 0$
varianza $\sigma_{n_i}^2 = N_0/2$ $\underline{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$
d.e.p. $G_{n_i}(f) = N_0/2$
autocorrelación $R_{n_i}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$
↳ incorreladas
f.d.p. $p_n(\underline{n}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|\underline{n}\|^2}$
↳ muestras indep.

$p_y(y|\underline{x}_i) = p_n(y - \underline{x}_i)$
↳ Detección óptima (MAP)

(1) mínima distancia euclídea

$$\|\underline{y} - \underline{x}_i\|^2 - c_i \geq \|\underline{y} - \underline{x}_j\|^2 - c_j \quad \forall j \neq i$$

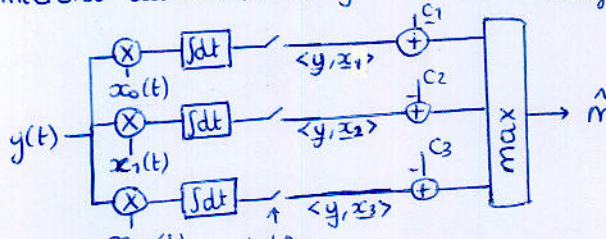
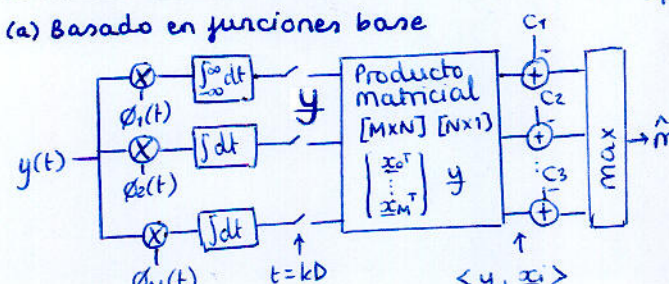
(2) Producto interior por cada símbolo

$$\langle \underline{y}, \underline{x}_i \rangle - c_i \geq \langle \underline{y}, \underline{x}_j \rangle - c_j$$

Dos implementaciones

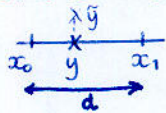
- (a) Basado en señales moduladas directamente
No interesa cuando $M > N$ ej 32QAM, QPSK, ...
Puede interesar cuando $M = N$ ej FSK (i.e. modulaciones ortogonales)

- (a) Basado en funciones base



4. PROBABILIDAD DE ERROR PARA EL CANAL AWGN

- Para 2 símbolos equiprobables



$$P_e = Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

función error comp. $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} [P_X(x_i) \cdot P_Y(y \notin D_i | x_i)]$$

Invarianza de P_e frente a

- rotaciones
- traslaciones

- Cota a la prob. error

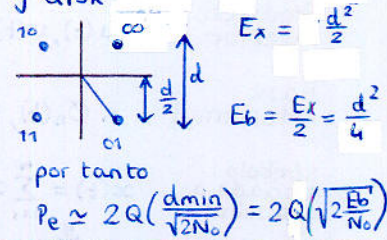
$$P_e \leq (M-1) \cdot Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Aprox a la P_e

$$P_e \approx N_e \cdot Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Nº medio de vecinos a $d_{\min}$ de cada símbolo
Puede tener en cuenta las distintas prob. de cada símbolo

lo típico es poner d en función de E_b
ej QPSK



- Cálculo de BER a partir de P_e

- modulaciones no ortogonales

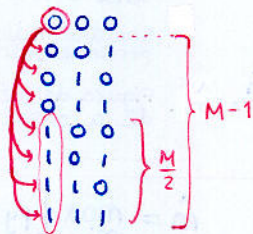
suponiendo código Gray y que sólo te equivocas con los símbolos adyacentes

$\Rightarrow$ error 1 simb $\equiv$ error 1 bit $\Rightarrow$ te equivocas en 1 de cada $\log_2 M$

$$\frac{P_e}{\log_2 M} \leq \text{BER} \leq P_e$$

suponiendo que siempre te equivocas con el símbolo $\Rightarrow$ error 1 simb $\equiv$ error $\log_2 M$ bits contrario

- modulaciones ortogonales (ej FSK)



$$\text{BER} \approx P_e \cdot \frac{M/2}{M-1}$$

Caracterización de fading

TX:

$$S_{bb}(t) = R(t) e^{j\phi(t)}$$

↓ variación amplit. y fase

$$R_{bb}(t) = \alpha(t) e^{-j\phi(t)} S_{bb}(t)$$

$$= \alpha(t) R(t) \cdot e^{j(\phi(t) - \theta(t))}$$

$$\alpha(t) = m(t) \cdot r_o(t)$$

↑ fading a gran escala (shadowing) (log-normal)
↑ fading a pequeña escala (multicamino) (Rayleigh o Rice)
↑ envolvente recibida

Los dos fadings se multiplican entre sí ⚠

Clasificación estadística del canal móvil

1. Canal Gaussiano

- SLI con AWGN
- BER gaussiano → a lo que todas aspiran

2. Canal Rayleigh

Componentes multicamino independ.

$$r_o = \sqrt{a_c^2 + a_s^2} \quad r_o \text{ tiene jdp rayleigh}$$

$$\phi = \tan^{-1}(a_s/a_c) \quad f_R(r_o) = \frac{2r_o}{\sigma^2} e^{-\frac{r_o^2}{\sigma^2}}$$

a_c, a_s gaussianas

3. Canal Rician

multicamino pero con camino dominante

$$k = \frac{\text{pot dominante}}{\text{pot scatter}} \quad \begin{cases} k=0 \rightarrow \text{Canal Rayleigh} \\ \downarrow \text{mejora BER} \\ k=\infty \rightarrow \text{Canal Gaussiano} \end{cases}$$

Caracterización del multicamino

Suponemos sin fading a gran escala $m(t)=1$

$$TX: s(t) = \text{Re} \{ S_{bb}(t) e^{j2\pi f_c t} \}$$

$$RX: r(t) = \sum_n \alpha_n(t) \cdot S(t - \tau_n(t))$$

multicamino n-ésimo
· amplitud α_n
· retardo τ_n

$$= \text{Re} \left\{ \underbrace{\sum_n \alpha_n(t) S_{bb}(t - \tau_n(t)) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)}}_{r_{bb}(t)} \cdot e^{j2\pi f_c t} \right\}$$

Canal equiv pero bajo

$$S_{bb}(t) \xrightarrow{C_{bb}(\tau, t)} r_{bb}(t)$$

lo que en si llamamos ej $h(t)$
variación del canal con el tiempo

$$C_{bb}(\tau, t) = \sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} \delta(t - \tau_n(t))$$

nota de Pak: ¿No faltaría aquí un 2 para que $r_{bb}(t) = \frac{1}{2} C_{bb}(t) * S_{bb}(t)$?

ejemplo: portadora sin modular

$$S_{bb}(t) = 1 \rightsquigarrow r_{bb}(t) = \sum \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)}$$

$r_{bb}(t)$ resulta ser suma de fasores aleatorios



proceso aleat gaussiano
proceso aleat jdp unif [0, 2π]

con partes real e imag. gaussianas

$$|r_{bb}(t)| = \sqrt{a_c^2 + a_s^2} \quad \text{rayleigh} \leftarrow \text{gaussianas}$$

Probabilidad de error de bit en canales con fading

$$r_{bb}(t) = \alpha(t) e^{-j\phi(t)} S_{bb}(t) + n_{bb}(t)$$

Si suponemos detección coherente (se estima y corrige $\phi(t)$)

$$r_{bb}(t) = \alpha(t) S_{bb}(t) + n_{bb}(t)$$

- Inicialmente suponemos variación lenta $\alpha(t) = \alpha$

$$r_{bb}(t) = \alpha \cdot S_{bb}(t) + n_{bb}(t)$$

se define $\gamma_b = \alpha^2 \frac{E_b}{N_0}$ y basta sustituir E_b/N_0 por γ en las fórmulas de P_b

- si dejamos de suponer variación lenta $\alpha(t) \Rightarrow \gamma_b(t)$ proceso aleat

Basta con tener en cuenta cada posible γ_b , ponderado por su prob.

$$P_b = \int_0^\infty P_b(\gamma_b) \cdot \underbrace{p(\gamma_b)}_{\text{jdp}} d\gamma_b$$

• Flat fading: α Rayleigh $\Rightarrow \gamma_b \text{ chi}^2 \quad p(\gamma_b) = \frac{1}{\gamma_b} e^{-\frac{\gamma_b}{\bar{\gamma}_b}}$ siendo $\bar{\gamma}_b = \alpha^2 \frac{E_b}{N_0}$

• Fast fading: imposible estimar $\phi(t)$ (no detección coherente)
Usar DPSK (que no requiere) → sin fading $P_b = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b}$
→ flat fast fading $P_b = \frac{1}{2(1+\gamma_b)}$

2.3 CANAL VIA SATELITE

- Fijo: (GEO)
 - gaussiano
 - desv. por lluvia $f > 10 \text{ GHz}$
 - limitación en pot (no vale QAM)
- Satélite-móvil:
 - LOS
 - Rician

3. TÉCNICAS DE DIVERSIDAD

- varias réplicas de misma señal
- EXPLÍCITA: ej 2 polarizaciones
- IMPLÍCITA: ej multicamino
- **Espacial**: fácil, antenas $d > 10\lambda$ para fadings indep. distancia de coherencia, plano horiz.
- **en Ángulo**: varios haces estrechos no solapados switched beams vs. smart antennas
- **en Frecuencia**: AB adicional, combinaren rx, $\Delta f > B_c$ espaciado entre portadoras
- **en Polarización**: explícita: tx 2 polariz. implícita: tx 1 polariz, rx 2 antenas limitado a 2 polariz ortogonales
usado en BS para rx de MS con orientación aleatoria
- **Temporal**: tx bits varias veces: $\Delta t = j(T_c)$
caso particular: $= j(v, f_c)$
ecor de multicamino, siempre y cuando la señal tenga AB suficiente.

TÉCNICAS DE COMBINACION DE DIVERSIDAD

- Selección: escoger la de mayor SNR (una u otra...)
- Combinación de máxima probab. MAR: ramas ajustan pesos y fases para minimizar el fading
- Combinación de ganancia igual ERC: sólo ajusta fases → similares resultados

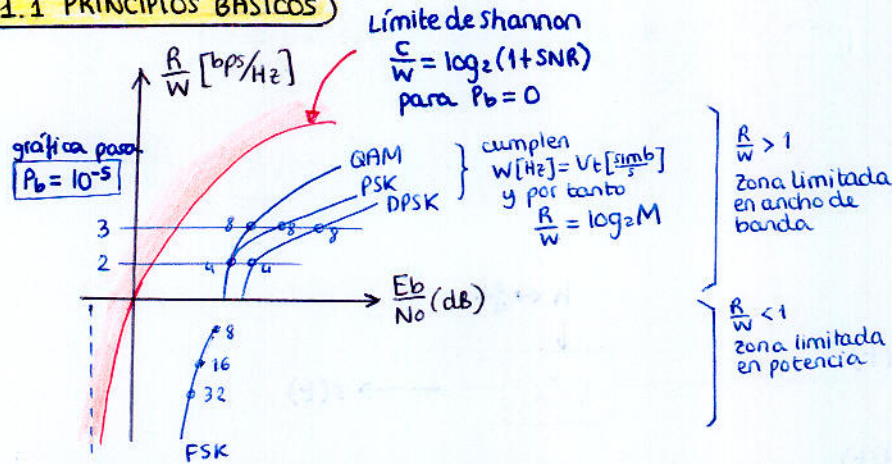
4. TÉCNICAS DE ACCESO MÚLTIPLE

- **FDMA** cada usuario una subbanda $\square\square\square\square$ (canales de guarda evitan interf. canales)
 - **TDMA** slots, tiempos de guarda, síncrona
 - **CDMA** códigos ortogonales en mismo tiempo y frec.
ventajas:
 - rechaza interferencias
 - no interfiere con banda estrecha en mismas frecs.
 - reutiliza frec. en celdas adyacentes
 - mitiga desvanecimientos
 - Técnicas: Direct Sequence (DS) o Frequency Hopping (FH)
- 2 tipos de canal
Canal MAC: usuarios comparten medio
Canal BC (broadcast t)
1 tx, varios rx
la info puede ser distinta para cada rx
- **TRMA** time random multiple access

Bloque I.3

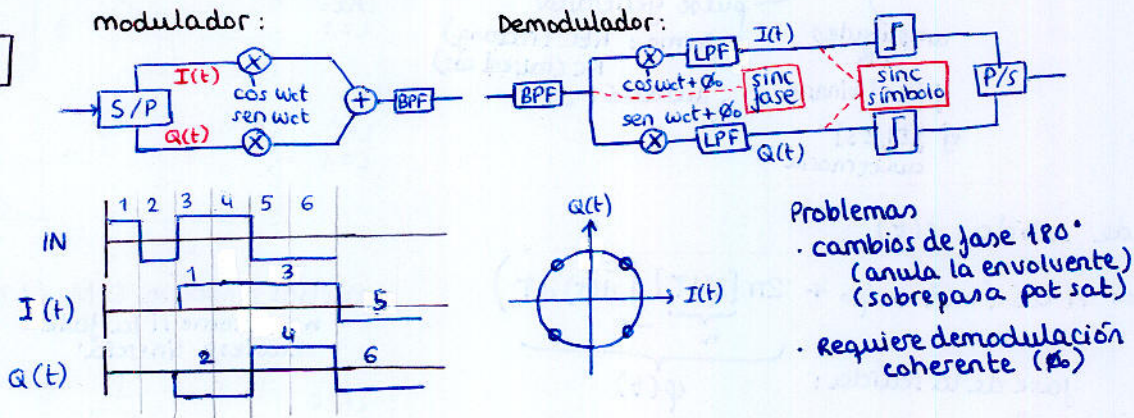
1. TÉCNICAS DE MODULACIÓN DIGITAL

1.1 PRINCIPIOS BÁSICOS



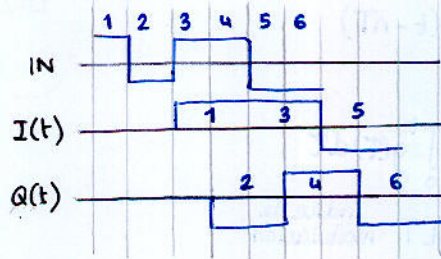
1.2 MODULACIONES CON EFICIENCIA $\leq 2 \text{ bps/Hz}$

QPSK



OQPSK offset

- se introduce un retardo $\Delta t = T_b = \frac{T_s}{2}$ en $Q(t)$



Evita cambios de fase de 180°

$\frac{\pi}{4}$ QPSK

- Rota la constelación $\pi/4$ en cada símbolo



- Efficiente en ancho de banda
- Buena P_b
- Sencillo de implementar
- Admite codificación diferencial
- Evita transiciones de π en la fase

Características propias de QPSK

Característica especial

DQPSK

Diferencial

- La información no va en la fase del símbolo sino en la diferencia de fase respecto al anterior

$$\phi_n = \phi_{n-1} + \Delta\phi_n$$

ej: D $\frac{\pi}{4}$ QPSK

$[a_{2n-1}, a_{2n}]$	$\Delta\phi_n$
0 0	$+\pi/4$
0 1	$+3\pi/4$
1 0	$-\pi/4$
1 1	$-3\pi/4$

ventajas: no requiere demodulación coherente

Desventaja: ligero incremento en P_e (los errores vienen en pareja)

MSK

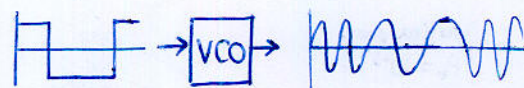
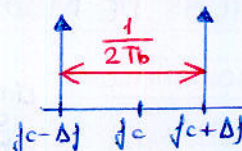
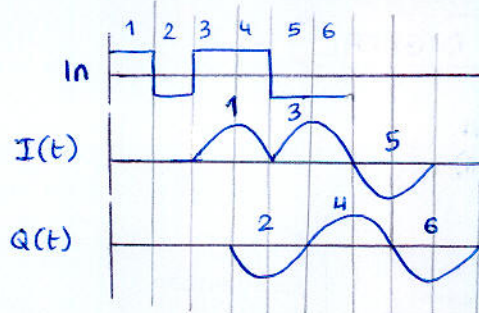
Dos formas de verla:

OQPSK con pulsos seno

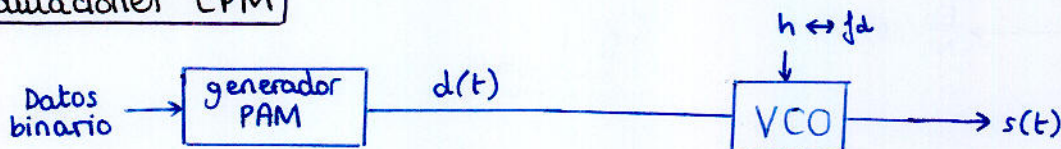
o

CPFSK LREC L=1
h=0.5

$I^2 + Q^2 = \text{cte}$
Fase continua en la circunferencia



Modulaciones CPM



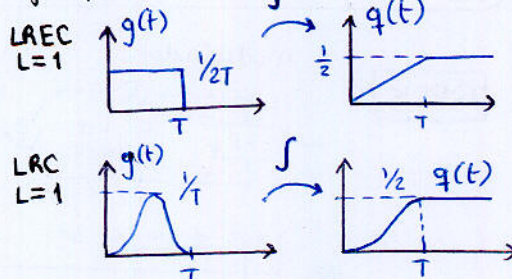
• señal PAM d(t)

$$d(t) = \sum a_n \cdot g(t - nT)$$

amplitudes BB
ej $\{\pm 1\}$ binaria
ej $\{\pm 1, \pm 3\}$ cuaternaria

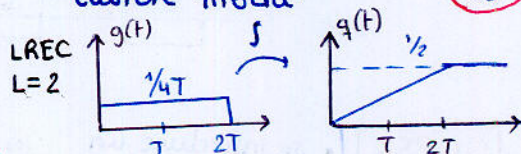
pulso generador
forma: REC (rectang)
RC (raised cos)
duración LT

ejemplos:



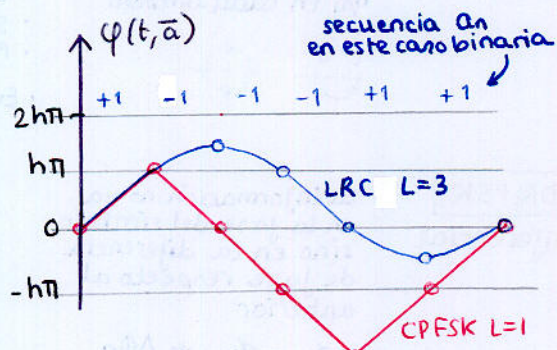
Partial response CPM ($L > 1$)
hace como si la fase tuviese 'inercia'

menor AB



g(t) es la forma que sigue la fase ponderada por $2\pi h a_k$ en cada símbolo

La fase a la salida sigue una trayectoria de fase



En la constelación no son puntos sino que la fase se mueve de forma continua

• señal de salida s(t)

$$s(t) = A \cos(\omega_c t + \phi_0 + \underbrace{2\pi [2f_d T] \int_{-\infty}^t d(\tau) d\tau}_h)$$

fase de la salida: ϕ_n

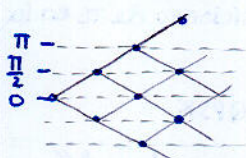
$$\phi(t) = \pi h \sum a_k + 2\pi h a_n q(t - nT)$$

$$= 2\pi \sum [a_k h + q(t - kT)]$$

$$h = 2f_d T \text{ índice de modulación}$$

$$q(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

ej: MSK = CPFSK, L=1, h=0.5



si $a_n = +1 \rightarrow \text{fase} + \frac{\pi}{2}$
si $a_n = -1 \rightarrow \text{fase} - \frac{\pi}{2}$



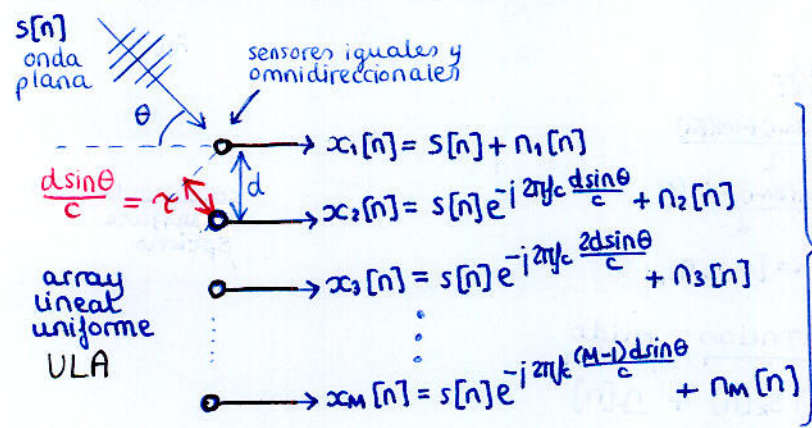
El diagrama Trellis de fase suele dibujarse envolviendo la fase en $[0, 2\pi]$

si $h \uparrow$ { AB ↑
trayectoria de fase ↑
más robusto }

Tema 5. Introducción al procesado en array

Bloque II

1. INTRODUCCIÓN. MODELO DE SEÑAL



SNAPSHOT:

$$\underline{x}[n] = \underline{a}(\theta_s) \cdot s[n] + \underline{n}[n]$$

$$\begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ \vdots \\ x_M[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi f_c \frac{d \sin \theta}{c}} \\ e^{-j2\pi f_c \frac{2d \sin \theta}{c}} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f_c \frac{(M-1)d \sin \theta}{c}} \end{bmatrix} s[n] + \begin{bmatrix} n_1[n] \\ n_2[n] \\ n_3[n] \\ \vdots \\ n_M[n] \end{bmatrix}$$

STEERING VECTOR

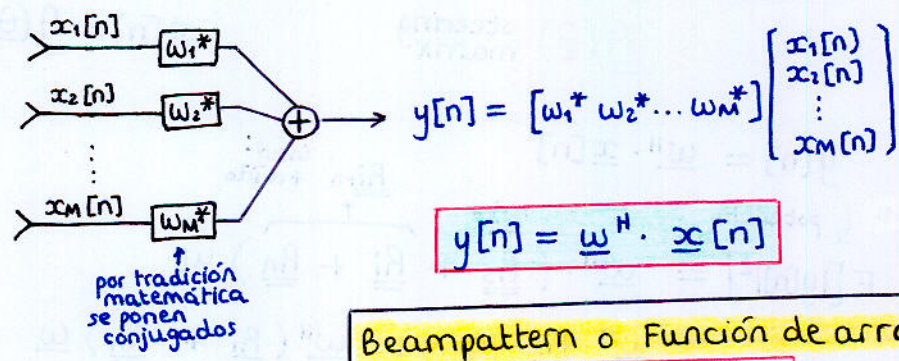
vector de ruidos

Nota: suponemos $B \ll f_c \Rightarrow s[n - i\tau] \approx s[n]$
el retardo no afecta a la señal, sólo a la fase de la portadora

2. CONFORMACIÓN DE HAZ (BEAMFORMING)

Análogo a un filtro FIR pero espacial

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix}$$



$$y[n] = \underline{w}^H \cdot \underline{x}[n]$$

Relación señal a ruido

En un sensor m-ésimo $SNR|_{\text{sensor } m} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$

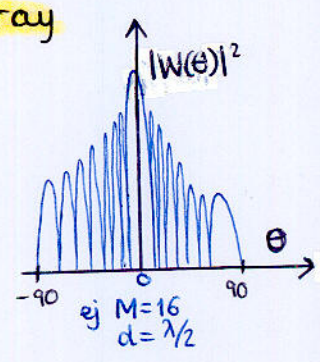
A la salida del beamform $SNR|_{\text{array}} = \frac{|\underline{w}^H \underline{a}(\theta)|^2}{\|\underline{w}\|^2} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$

GANANCIA DEL ARRAY

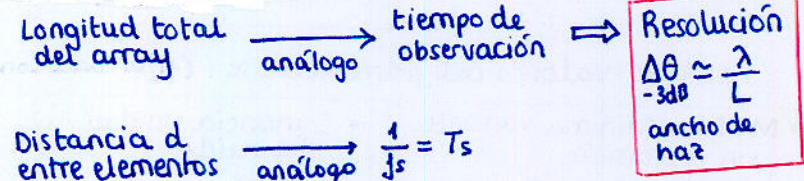
Beampattern o Función de array

$$|W(\theta)|^2 = \frac{|\underline{w}^H \cdot \underline{a}(\theta)|^2}{M}$$

- si $d = \lambda/2$
- M sensores $\rightarrow$ M-1 lóbulos
- lóbulos en broadside ($\theta=0^\circ$) más estrechos que en endfire ($\theta=90^\circ$) (anchura de si dibujásemos) $\sin \theta$ en lugar de θ



Conceptos análogos a muestreo

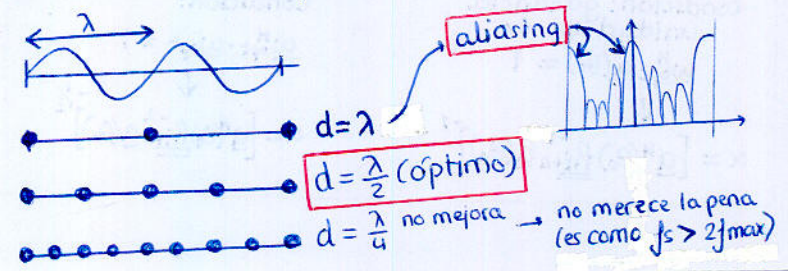


Dem:

$$y[n] = \underline{w}^H \cdot \underline{x}[n] = \underline{w}^H \cdot (\underline{a}(\theta) s[n] + \underline{n}[n]) = \underline{w}^H (\underline{a}(\theta) s[n]) + \underline{w}^H \underline{n}[n]$$

$E[|y|^2] = \underbrace{|\underline{w}^H \underline{a}(\theta)|^2}_{\text{ganancia}} \sigma_s^2 + \underbrace{\|\underline{w}\|^2}_{\text{ruido}} \sigma_n^2$

maximizar $SNR|_{\text{array}} \rightarrow$ Filtro adaptado $\underline{w} = \underline{a}(\theta)$



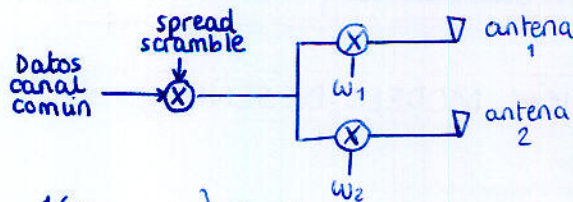
Filtro adaptado

Maximiza SNR array

$$\underline{w} = \underline{a}(\theta)$$

- para una dirección θ (compensa los retardos del array en esa θ)
- No tiene en cuenta interf.

ejemplo: Closed-mode Loop en estándar UMTS



$$\begin{cases} w_1 = 1/\sqrt{2} \\ w_2 = \frac{\cos(\theta_{n-1}) + \cos(\theta_n)}{2} + j \frac{\sin(\theta_{n-1}) + \sin(\theta_n)}{2} \end{cases}$$

con $\theta_n = \{0, \pi, \pi/2, -\pi/2\}$

Feedback usuario (2 bits en cada trama) $n=1,2,3,4$ calculando el desfasaje óptimo

Considerando interferencias

nuevo snapshot

$$\underline{x}[n] = \underbrace{\underline{a}(\theta_0) \cdot s_0[n]}_{\text{señal deseada}} + \underbrace{\sum_{k=1}^K \underline{a}(\theta_k) s_k[n]}_{\text{interferencias}} + \underbrace{n[n]}_{\text{ruido}}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-j2\pi f_c \frac{d \sin \theta_0}{c}} & 1 & e^{-j2\pi f_c \frac{d \sin \theta_1}{c}} & \dots & e^{-j2\pi f_c \frac{d \sin \theta_K}{c}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j2\pi f_c \frac{(M-1)d \sin \theta_0}{c}} & e^{-j2\pi f_c \frac{(M-1)d \sin \theta_1}{c}} & \dots & e^{-j2\pi f_c \frac{(M-1)d \sin \theta_K}{c}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0[n] \\ s_1[n] \\ \vdots \\ s_K[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1[n] \\ n_2[n] \\ \vdots \\ n_M[n] \end{bmatrix}$$

$\underline{A}(\theta)$ steering matrix

$$\underline{x}[n] = \underline{A}(\theta) \cdot \underline{s}[n] + \underline{n}[n]$$

y por tanto tras el filtro espacial

$$\begin{aligned} y[n] &= \underline{w}^H \cdot \underline{x}[n] \\ E[|y[n]|^2] &= \underbrace{\underline{w}^H}_{\text{potencia}} \cdot \underbrace{(\underline{R}_s + \underline{R}_i + \underline{R}_n)}_{\substack{\text{señal útil} \\ \text{interf.} \\ \text{+ ruido}}} \underline{w} \\ &= \underbrace{\underline{w}^H \cdot \underline{R}_s \cdot \underline{w}}_{\sigma_s^2 \underline{a}(\theta_0) \underline{a}^H(\theta_0)} + \underbrace{\underline{w}^H (\underline{R}_i + \underline{R}_n) \underline{w}}_{\substack{\sum \sigma_{s_i}^2 \underline{a}(\theta_i) \underline{a}^H(\theta_i) \\ \sigma_n^2 \underline{I}}} \end{aligned}$$

$\underline{R}_{i+n}$ matrices de autocorrelación

$$= \sigma_s^2 |\underline{w}^H \underline{a}(\theta_0)|^2 + \underline{w}^H \underline{R}_{i+n} \underline{w}$$

Relación señal a interf + ruido

$$SINR = \frac{\sigma_s^2 |\underline{w}^H \underline{a}(\theta_0)|^2}{\underline{w}^H \underline{R}_{i+n} \underline{w}}$$

max

Beamformer óptimo

$$\underline{w}_{opt} = \alpha \cdot \underline{R}_{i+n}^{-1} \cdot \underline{a}(\theta_0)$$

maximiza la SINR

Posibles valores del parámetro α : (fijar una condición)

cte: grado de libertad

• **MVDR**: mínima varianza sin distorsión.

Condición: ganancia unidad en θ_0

$$\underline{w}_{opt}^H \underline{a}(\theta_0) = 1$$

$$\alpha = [\underline{a}^H(\theta_0) \underline{R}_{i+n}^{-1} \underline{a}(\theta_0)]^{-1}$$

• Ganancia unidad del ruido

Condición:

$$\underline{w}_{opt}^H \cdot \underline{w}_{opt} = 1$$

$$\alpha = [\underline{a}^H(\theta_0) \underline{R}_{i+n}^{-1} \underline{a}(\theta_0)]^{-1/2}$$

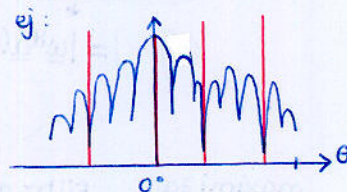
• Ganancia unidad del ruido + interf

Condición:

$$\underline{w}_{opt}^H \underline{R}_{i+n} \underline{w}_{opt} = 1$$

$$\alpha = [\underline{a}^H(\theta_0) \underline{R}_{i+n}^{-1} \underline{a}(\theta_0)]^{-1/2}$$

No sólo tiene máximo en la señal útil sino que anula las interf:

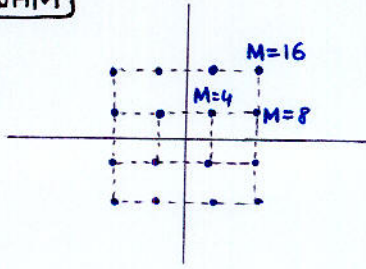


1.3 MODULACIONES CON EFICIENCIA ≥ 2 bps/Hz

2 grupos $\begin{cases} \text{MQAM} \\ \text{señaliz. resp. parcial (PRS)} \end{cases}$

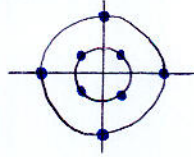
III-2

M-QAM

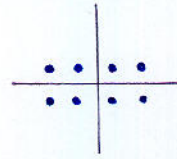


ej $M=8$

matemáticamente óptima:

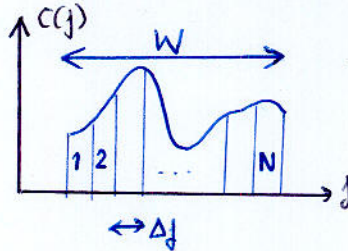


sencilla:



2. MODULACIONES MULTIPORTADORA

División en subbandas



- canal no ideal $C(f)$
- subbandas ancho Δf tal que canal $\approx$ ideal
- $\frac{|C(f)|^2}{G_n(f)} \approx \text{cte}$

Problema banda ancha: duración símbolo pequeña sensible a ISI

Solución: tx en portadoras en paralelo, cada una con duración de símbolo grande

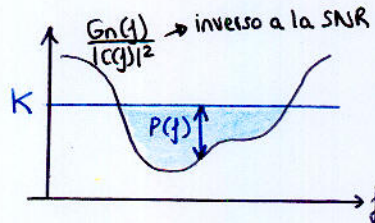
Capacidad:

$$\begin{aligned} C &= \sum C_i \\ &= \sum \Delta f \cdot \log_2 \left(1 + \frac{\Delta f |P(f_i)| |C(f_i)|^2}{\Delta f \cdot G_n(f_i)} \right) \\ &= \sum \Delta f \log_2 \left(1 + \frac{P(f_i) |C(f_i)|^2}{G_n(f_i)} \right) \xrightarrow{\lim_{\Delta f \rightarrow 0}} \\ &= \int_W \log_2 \left(1 + \frac{P(f) |C(f)|^2}{G_n(f)} \right) df \end{aligned}$$

Water Filling (Shannon, 1949)

se maximiza la capacidad

$$P(f) = \begin{cases} K - \frac{G_n(f)}{|C(f)|^2} & f \in W \\ 0 & f \notin W \end{cases}$$



Hay que transmitir más potencia allí donde haya mejor SNR

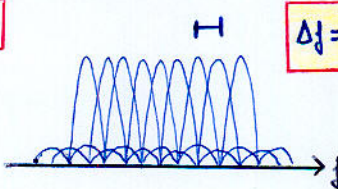
El caso peor para aprovechar esto es $\frac{G_n(f)}{|C(f)|^2}$ plano

i.e. si el canal es plano, el peor ruido es el blanco

Ejemplos multiportadora

- DMT: Discrete Multitone Transmission (ADSL)
- OFDM: Orthogonal Frequency Division Multiplexing (DAB y DVB)

OFDM



$$\Delta f = \frac{1}{T_s}$$

mínima separación que logra

ortogonalidad

$$\int_0^T \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t dt = 0$$

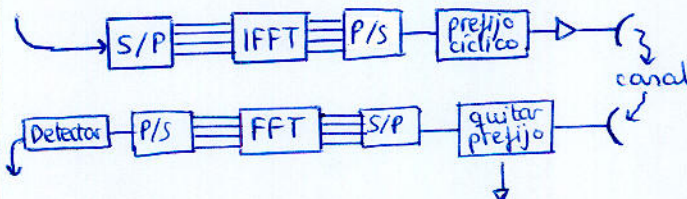
- FDM con máxima eficiencia espectral
- canales individuales no selectivos
- Lóbulos laterales caen rápidamente (pocas interf.)

Problema: No es de envoltura cte. la señal suma, presenta picos (malo en satélites y soportes magnéticos)

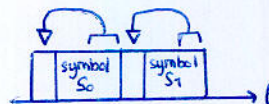
Implementación con FFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i 2\pi \frac{k}{N} n}$$

señal tx en cada símbolo $E[k]$ metemos un vector (PSK, QAM, ...)



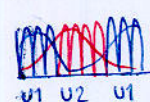
- Inserción al principio de la última parte del símbolo
- En recepción todas las portadoras tienen un n° entero de periodos (simplifica la ecualiz.)



Problema: Desvanecimiento puede hacer desaparecer portadora

Solución protección: codif. canal (bloque, convol), entrelazado, modulación codificada

aprovechar para OFDMA (multiple acceso)



OFDM Codificada (COFDM)

- códigos de corrección de errores previos a la conversión S/P + entrelazado de bits (cada bit a una portadora distinta → **diversidad en frecuencia**)
- improbable que el fading estropee toda la palabra

Conclusiones OFDMventajas

- FDM de max eficiencia espectral
- Convierte canal selectivo en frec. en no selectivo
- Inmunidad al multicamino si $T_p \gg T_{\text{ciclo}} > \text{delay spread}$
- Protección frente a ruido impulsivo al aumentar T (pero más vulnerable a interferencia de banda estrecha)
- Flexibilidad a distintos esquemas de modulación
- Lóbulos laterales decaen rápidamente en el espectro

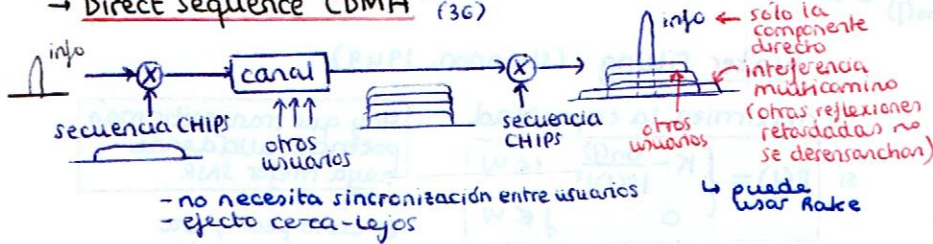
Inconvenientes

- No es de envolvente constante → problemas en tx satélite y grabación magnética
- Recuperación del sincronismo es crítica
- Requiere procesado en bloque

- OFDM no tendría sentido en un canal ideal plano (no mejora P_e)
- CDMA lo mismo

Modulaciones de espectro ensanchado CDMA

- Usar W mucho mayor al mínimo de Nyquist
- Ventajas único usuario:
 - interferencias y atenuaciones del canal. Al usar mayor W se concentra menos pot. en zonas malas
- Ventajas Múltiple Acceso → Code Division MA (minimiza guarda en T/F)

→ Direct Sequence CDMA (3G)→ Frequency Hopping

- cambia f_c cada periodo de salto T_2
 - salto rápido $T_2 < T_{\text{simb}}$
 - salto lento $T_2 > T_{\text{simb}}$
- Por estadística los usuarios no coinciden en frecuencia (código de corrección por si acaso)
- Multicamino: rechazo menos selectivo que DS CDMA
- sincronización sencilla
- complejidad en la generación de frec

→ Time-hopping

- El código de ensanchado transmite sólo en ciertos slots temporales dentro del símbolo
- cada usuario en slots distintos

• Receptor Rake

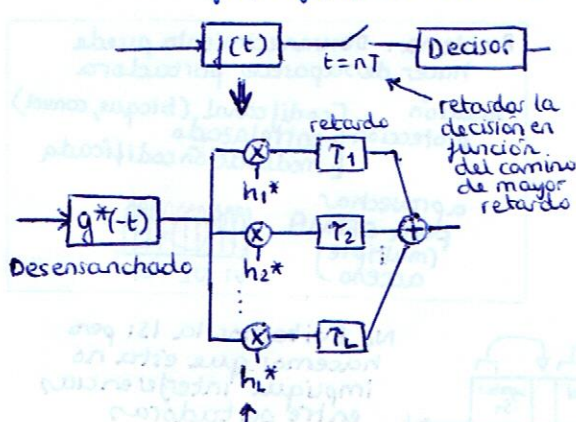
- aprovecha la señal multicamino
- L ramas (púas) paralelas
- basado en filtro adaptado

$$\text{MULTICAMINO: } c(t) = \sum h_i \cdot \delta(t - \tau_i)$$

Filtro ADAPTADO a multicamino: $f^*(-t) = g(t) * c(t)$

↑ pulso tx
↑ pulso canal
↑ código ensanchado

$$f(t) = g^*(-t) * \sum h_i^* \delta(t - \tau_i)$$



curioso: multiplicamos por la amplitud del canal
i.e. caminos con mucha atenuación les damos poco peso

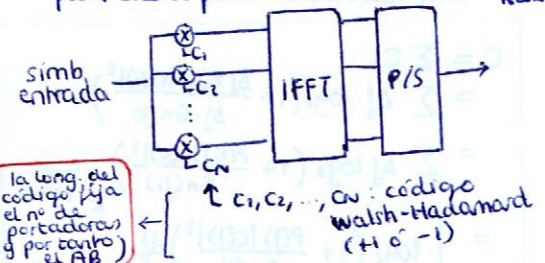
→ OFDM con multiple acceso

- OFDM-TDMA: cada usuario todas las f_i en un T
- **OFDMA**: Divide subportadoras entre usuarios
- OFDM-CDMA ó Multicarrier CDMA

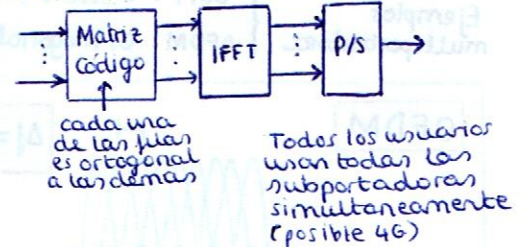
como un FDMA de toda la vida pero sin bandas de guarda!

→ Multicarrier CDMA

- El código de ensanchado multiplica EN FRECUENCIA (no en tiempo)
- cada bit se multiplica en paralelo con un chip del código de ensanchado para cada portadora



- Permite tx simultánea de varios usuarios en mismas subportadoras
- Transmisión a varios usuarios (EB)

ESTÁNDARES• DAB (Digital Audio Broadcast)

- radio digital (48 kHz)
- 175-240 MHz
- OFDM con $\frac{1}{4}$ -DQPSK
- 3 modos de operación (distinta N y Δf)

• DVB (Digital Video Broadcast)

- OFDM con 4, 16, 64-QAM
- 2 modos ($N=1705$ ó 6817)
- 768 pilotos para estimar canal

• ADSL

usa OFDM llamada DMT

UP	DOWN	
32	256	N
4' 3125 kHz		Δf

ADSL Lite

• Wireless LAN (al principio no usaba OFDM)

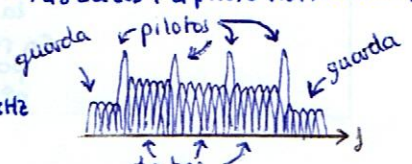
→ HIPERLAN/2: OFDM-TDMA

→ IEEE 802.11a: OFDM-CSMA/CA

- 2-16-64 QAM
- 6-24-54 Mbps
- $N=52$, $\Delta f = 20 \text{ MHz} / 64 \rightarrow 52 + 12 \text{ de guarda en extremos}$
- 48 datos + 4 piloto (estimar canal)

• WiMAX IEEE 802.16

- OFDM con 2-4-16-64 QAM
- N entre 128 y 1024, $\Delta f = 10.94 \text{ kHz}$
- guarda en extremos
- piloto entre datos



• LCMV (Linear Constrained Minimum Variance)

→ $K+1$ restricciones

→ M antenas / M pesos / M grados de libertad

• si $M = K+1$ → filtro adaptado

$$\underline{w}^H \underline{A}(\theta) = g \rightarrow$$

No hay libertad para reducir el ruido

$$\underline{w}_{opt} = \underline{A}^+(\theta) \cdot g^H$$

pseudoinversa
 $\underline{A}^+ = (\underline{A} \underline{A}^H)^{-1} \underline{A}$

• si $M > K+1$ → tenemos grados de libertad con los que intentaremos eliminar ruido

$$\underline{w}_{opt} = \underline{R}_{i+n}^{-1} \underline{A}(\theta) [\underline{A}^H(\theta) \underline{R}_{i+n}^{-1} \underline{A}(\theta)]^{-1} g^H$$

minimizar $\underline{w}^H \underline{R}_{i+n} \underline{w}$

con las restricciones

ejemplo:

$$\begin{aligned} \underline{w}^H \underline{a}(\theta_0) &= 1 \\ \underline{w}^H \underline{a}(\theta_1) &= 0 \\ &\vdots \\ \underline{w}^H \underline{a}(\theta_K) &= g_K \end{aligned}$$

vector de restricciones

$$\Leftrightarrow \underline{w}^H \underline{A}(\theta) = g$$

← muchas inversas. la inversión de matrices es costoso en Álgebra (orden N^3)

Implementaciones Prácticas

a) Implementación EFICIENTE de LCMV

Reduciremos el tamaño de la matriz a invertir de M a $M-(K+1)$

• se descompone

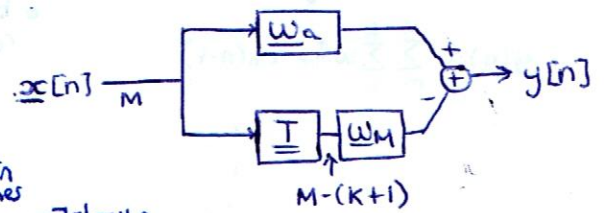
$$\underline{w} = \underline{w}_a - \underline{T} \underline{w}_m$$

cumple $K+1$ restricciones

$$\underline{w}_a = \underline{A}^+(\theta) g^H$$

minimización sin restricciones

$$\underline{w}_m = [\underline{T}^H \underline{R}_{i+n} \underline{T}]^{-1} \underline{T}^H \underline{R}_{i+n} \underline{w}_a$$



b) Algoritmos adaptativos de beamforming

→ Sample Matrix Inversion

¿cómo obtengo $\underline{R}_{i+n}$ si yo lo único que tengo es $\underline{x}[n]$?? (en la práctica)

Estimar:

ESTIMA

$$\hat{\underline{R}}_{i+n} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\underline{x}_{i+n}(n)}_{\text{promedio temporal}} \cdot \underbrace{\underline{x}_{i+n}^H(n)}_{\hat{\underline{R}}_{i+n}(n)}$$

snapshot en un instante ¿cómo consigo $\underline{x}_{i+n}$ si lo que recibo es $\underline{x}_{s+i+n}$?

• Da igual si la señal está incorrelada con las interf. (se obtiene $\hat{\underline{R}}_{s+i+n}$ en lugar de $\hat{\underline{R}}_{i+n}$)

• En algunos sistemas ej RADAR puede obtenerse snapshot sin la señal

Pérdidas en SINR

$$\propto \frac{2+N-M}{N+1}$$

útil si tenemos N pequeño

• Interesa tener $N \uparrow$ promediados para aumentar el rango de la matriz

• Técnica de la carga de la diagonal para aumentar el rango: sumar valor peg. a la diag $\underline{R} + \beta \underline{I}$

• Matriz de autocorrelación en el instante n
Matriz $M \times M$ rango 1

sólo cubre una dimensión

• Deficiente en rango
• Mala para invertir

• Gracias a coger N instantes de tiempo puedo ir adaptando por bloques

→ Algoritmo adaptativo LMS (muestra a muestra) → mucho éxito, sencillo y robusto

Descenso por gradiente

$$\underline{w}(n) = \underline{w}(n-1) + 2\mu \underline{x}(n) e^*(n)$$

$$= d[n] - y[n]$$

$$= d[n] - \underline{w}^H(n-1) \underline{x}(n)$$

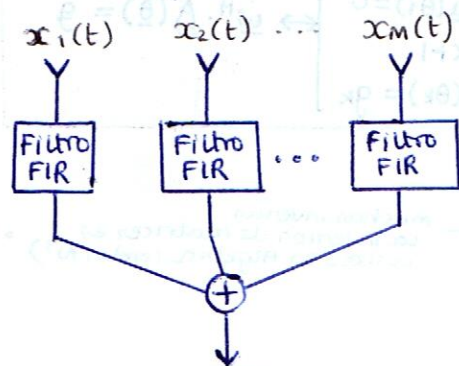
Estima instantáneamente las correlaciones

$$R_x \rightarrow \underline{x}(n) \cdot \underline{x}^H(n)$$

$$r_{dx} \rightarrow \underline{x}(n) d^*(n)$$

c) Beamforming de banda ancha

- No llega una portadora a f_c sino una señal de banda ancha (habitual en sonido) → A cada frecuencia le corresponde un vector de pesos distinto



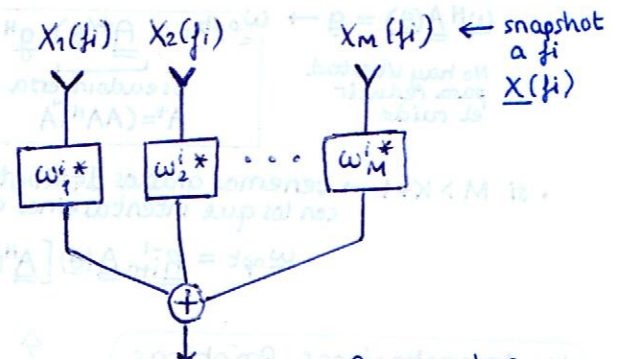
$$y(n) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=-K}^K w_{m,k}^* x_m(n-k)$$

Desde el punto de vista de una frecuencia f_i es como el caso anterior

con $w_j^* = H_j(f_i)$

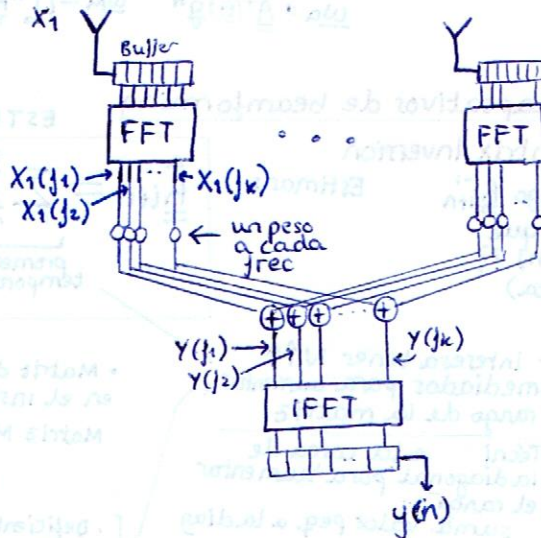
o bien más 'a pelo'

Se puede hacer la FFT a la señal recibida en cada antena y trabajar por separado con cada f_i



$$Y(f_i) = \underline{w}^H \underline{X}(f_i)$$

Para una f_{rec} determinada f_i es como el caso de banda estrecha



Opportunistic Communication : A new system design

Traditional Approach:

- Repartir recursos (tiempo, frecuencia, ...) ortogonales entre usuarios
- No preocupamos de los fallos (fading, ...) del recurso asignado a un usuario. (Intentamos arreglarlo: interleaving, frequency hopping ...)
- Diseñaríamos canales planos AWGN

El Teorema de Shannon dice otra cosa

Teoría de la información

- Transmitir en cada instante con TODOS los recursos al MEJOR USUARIO únicamente (maximiza el throughput total)
- Problema: Fairness and Delay
 - los usuarios con canal malo se fastidian.
 - No interesa canal constante AWGN!
 - Interesa canal muy variable (y Rayleigh) para ir cambiando de usuario!!

¿cómo aumentamos la fluctuación del canal?

RANDOM BEAMFORMING → Dumb antennas
 ↳ desajuste pseudorandom a las antenas
 ↳ induce fading

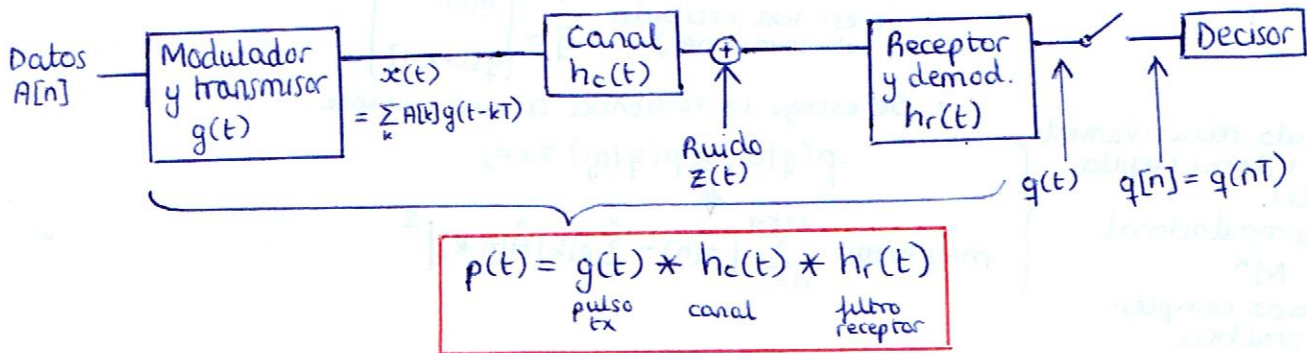


Random Beamforming iguala la performance del true beamforming cuando hay muchos usuarios $N \uparrow$ y requiere menos feedback (aunque hay que conocer el canal mientras va variando)

Bloque III. Igualación y Estimación de Canal

1. IGUALACION DE CANAL

- Introducción. Criterio de Nyquist para eliminar ISI

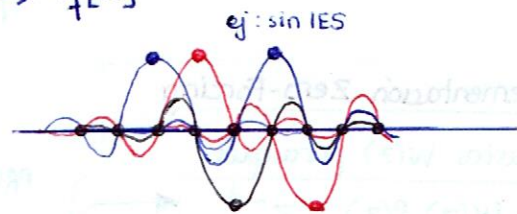
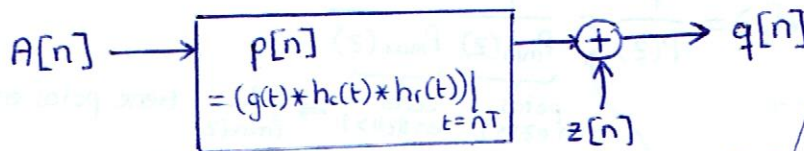


muestreo

$$q(t) = \sum_k A[k]p(t-kT) + z(t)$$

$$q[n] = q(t)|_{t=nT} = \sum_k A[k] \underbrace{p((n-k)T)}_{p[n-k]} + \underbrace{z(nT)}_{z[n]}$$

- Canal discreto equivalente banda base



No IES $\Leftrightarrow p[n] = \begin{cases} p[0] & n=0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

$$\frac{1}{T} \sum_m P(j - \frac{m}{T}) = p[0] = \text{cte}$$

Replica del espectro $P(f)$
cada $v_e = 1/T$ debe ser plana

$$q[n] = \sum_k A[k] \cdot p[n-k] + z[n]$$

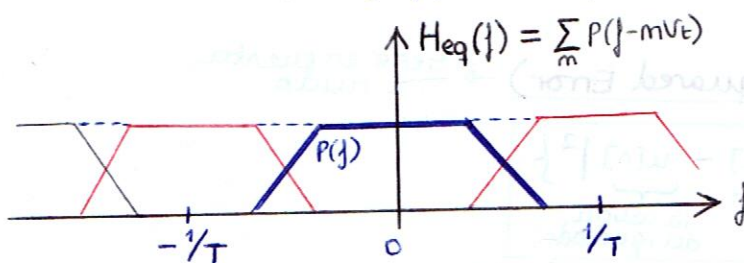
$$= A[n]p[0] + \underbrace{\sum_{k \neq n} A[k]p[n-k]}_{\text{Interferencia entre símbolos}} + z[n]$$

- La idea de Nyquist era escoger T para evitar IES

- Nosotros queremos más (Shannon).

→ T lo más pequeño posible (réplicas muy separadas)
→ Solución lineal: usar filtro IGUALADOR que aplane

→ otras soluciones no tienen porque ser lineales (solución óptima pero costosa) **DETECTOR ML**
Usar una especie de decodificador ML de Viterbi, teniendo en cuenta todos los posibles mensajes (cada uno con ISI conocida, pues se conoce el pulso) y escoger el más parecido (Pak! Es lo que siempre te habías preguntado! Conoce los símbolos anteriores te permite restar la ISI)



Nota: En com. móviles el canal puede incluir multicamino

Determinar la dimensión del ecualizador

ej: $h(t)$ vs t

Time spread

Indica con que rapidez debe adaptarse el igualador

CANAL VARIANTE

Doppler spread
Tiempo de coherencia

DIVERSIDAD



filtro lineal en cada rama
PERFECTO SI:

- no fading simultáneo
- long(ecualiz) > long(canal)
- sincronismo en fase

Detector ML en presencia de ISI

simbolos tx
memoria canal

- No lineal
- Óptimo
- Necesita info del canal

A partir de los últimos $L+K$ símbolos recibidos, se escoge la secuencia de L símbolos mas cercana a lo recibido

- Posibles secuencias $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{M^L}\}$ transmitidas

- Secuencia recibida (observaciones) $\bar{q} = \begin{bmatrix} q[0] \\ \vdots \\ q[L+K-1] \end{bmatrix}$

- Se escoge la secuencia a_i que cumple:

$$p(q|a_i) \geq p(q|a_j) \forall i \neq j$$

$$\downarrow$$

$$\text{minimizar } \sum_{n=0}^{L+K-1} |q[n] - \sum_k p[k] \hat{A}[n-k]|^2$$

Se calcula recursivamente usando Viterbi (rejilla de Trellis).

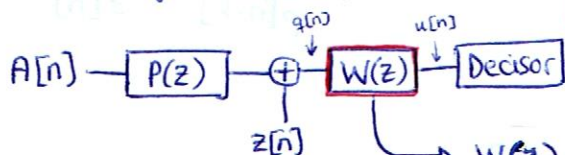
coste computacional $\propto M^K$

Demasiado complejo en la práctica

Igualador Lineal

Introducir un filtro discreto $w[n]$ que aplane la respuesta total $p[n]$

$$\sum P(j - \frac{k}{T}) \cdot W(j - \frac{k}{T}) = \text{cte} \Rightarrow W(f) = \frac{1}{P(f)}$$



$$W(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{P_{\min}(z) \cdot P_{\max}(z)}$$

ceros en $\|z\| < 1$ ceros en $\|z\| > 1 \Rightarrow \frac{1}{P_{\max}(z)}$ tiene polos en $\|z\| > 1$

Hay que hacer la TZ inversa teniendo en cuenta la ROC

Filtro ANTICAUSAL

Implementación Zero-Forcing

Ajustar $W(z)$ para que

$$C(z) = W(z) \cdot P(z) = z^{-d}$$

RETARDO PURO

- Evita el problema del filtro no causal
- Si $W(z)$ no es finito y causal, un 'd' elevado permite despreciar la parte no causal

PROBLEMA

SOLUCIÓN

$$W(z) = \frac{z^{-d}}{P(z)}$$

El canal global introduce un retardo d

Implementación

Problema: El ruido se amplificara mucho allí donde el canal atenúa mucho

Criterio MSE (Minimum Mean squared Error) → tiene en cuenta el ruido

se escoge el $w[n]$ que

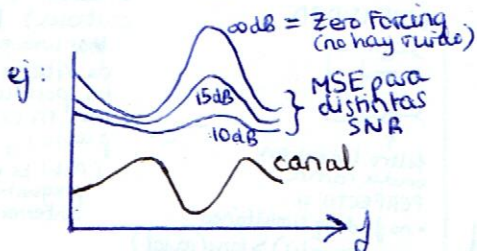
$$\min \left\{ \underbrace{|A[n-d]|}_{\text{lo tx}} - \underbrace{u[n]}_{\text{la salida del igualador}} \right\}^2$$

$$\underline{W} = \underline{R}_q^{-1} \cdot \underline{r}_{qa}$$

matriz autocorr. de $q[n]$
correlación entre $q[n]$ y $a[n]$

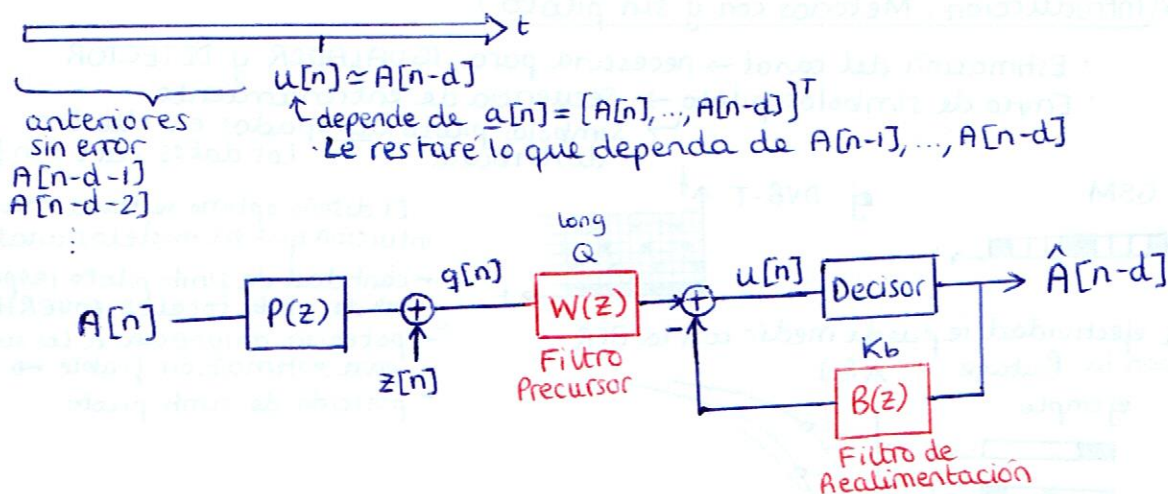
- Requiere estimar el canal
- Requiere conocer lo tx (símbolos piloto)

- Equilibrio entre realce de ruido y compensación de ISI



Limitación: $w[n]$ es un filtro FIR
solución: realimentar

Igualador DFE (decision feedback) Igualador con realimentación de decisiones (el más usado)



$$u[n] = \sum_{k=0}^Q w[k] q[n-k] - \sum_{k=1}^{K_b} b[k] \hat{A}[n-d-k]$$

$$u[n] = \underline{w}^T \underline{q}[n] - \underline{b}^T \underline{\hat{a}}[n]$$

→ Criterio MSE: minimizar $E\{|A[n-d] - u[n]|^2\}$

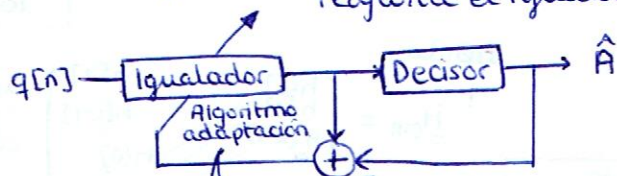
Das opciones de cálculo:

1. Calcular directamente todos los coef $\underline{w}$ y $\underline{b}$
2. Fijar $\underline{w}$ y calcular $b[k] = c[k+d]$ siendo $c[n] = w[n] * p[n]$ cancela la ISI en ventana $(d+1, \dots, d+K_b)$ y después optimizar $\underline{w}$ (cancelar ISI en el resto de coef de $c[n]$)

Igualación Adaptativa

(cualquiera de los anteriores)

- Igualador fijo: utiliza secuencia de entrenamiento para conocer el canal y ajustar el igualador
- Igualador adaptativo: si el canal varía durante la comunicación, se reajusta el igualador a partir de las propias decisiones



El algoritmo: - minimiza una función coste de forma iterativa

Consideraciones:

- Velocidad de convergencia
- Desajuste en steady state
- Complejidad computacional
- Propiedades numéricas (ej: estabilidad frente a errores de redondeo)

$J = E\{|A[n-d] - u[n]|^2\}$

por ej: J = desviación causada por el canal en alguna característica de la señal ej: el módulo

↳ algoritmos CMA y RCA

• Descenso por gradiente: $w[k; n+1] = w[k; n] - \mu \frac{\partial J}{\partial w[k; n]}$

• Algoritmo LMS: $\underline{w}[n+1] = \underline{w}[n] + \mu (A[n-d] - u[n]) \underline{q}^*[n]$

inicialmente necesita entrenamiento hasta tener baja P_e (modo entrenado) y entonces pasa al modo dirigido por decisión

2. ESTIMACION DE CANAL

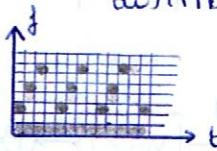
Introducción: Métodos con y sin piloto

- Estimación del canal $\rightarrow$ necesaria para IGUALADOR y DETECTOR
- Envío de símbolos piloto $\rightarrow$ Secuencia de entrenamiento
 - $\rightarrow$ Símbolos piloto agrupados en clusters distribuidos entre los datos (ent o en f)

ej GSM



ej. DVB-T



El diseño óptimo se basa más en la intuición que en modelos analíticos

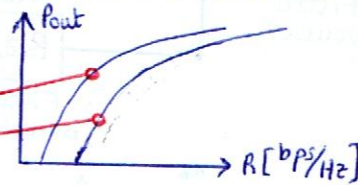
- cantidad de simb. piloto respecto a n° de simb. totales (OVERHEAD)
- potencia asignada a los simb. piloto para estimación fiable $\rightarrow$ interesante tradeoff
- posición de simb. piloto

La efectividad se puede medir con la BER o con la Poutage

ejemplo

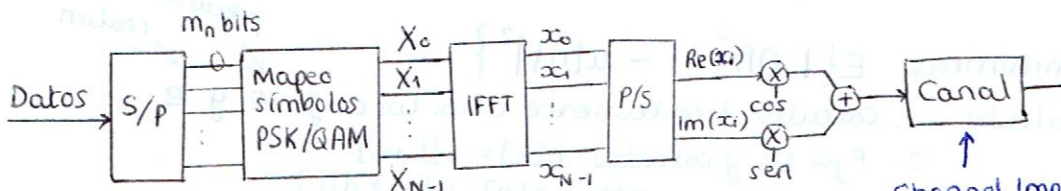


es mejor porq. mantiene el modelo de canal menos tiempo



Estimación de canal en OFDM

OFDM permite estimar el canal de forma super sencilla (receptores baratísimos)



matricialmente

$$\underline{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{x}[k] e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$\underline{x} = \underline{F}^H \underline{X}$$

IFFT

Channel Impulse Response $\underline{h}[n] \equiv \text{CIR}$ (long L)
 Channel Frequency Response $\underline{H}[k] \equiv \text{CFR}$ (long N)

$$\underline{H} = \underline{F} \underline{h}$$

FFT

$$\underline{F}_{(k+1, n)} = e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$\underline{F} \cdot \underline{F}^H = \underline{I}$$

(unitaria)
Matriz que representa la FFT

Entonces en el receptor:

$$\underline{Y} = \text{FFT}[y] = \underline{F} \cdot \underline{y} = \underline{F} \cdot \underline{H}_{\text{CIR}} \underline{x} + \underline{F} \underline{z}$$

$$= \underline{F} \underline{H}_{\text{CIR}} \underline{F}^H \underline{X} + \underline{F} \underline{z}$$

$$= \underline{H}_{\text{CFR}} \cdot \underline{X} + \underline{z}$$

si $\underline{X}$ son símbolos piloto se puede estimar directamente $\underline{H}_{\text{CFR}}$ mediante lo recibido!

siendo

$$\underline{H}_{\text{CIR}} = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & \dots & h[L-1] \\ h[1] & h[2] & \dots & h[L] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[L-1] & h[L] & \dots & h[2L-2] \end{bmatrix}$$

diagonales iguales y circulares

$$\underline{H}_{\text{CFR}} = \begin{bmatrix} H[0] & H[1] & \dots & H[N-1] \\ 0 & H[1] & \dots & H[N-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & H[1] & \dots & H[N-1] \end{bmatrix}$$

$L \ll N$

Secuencia de entrenamiento

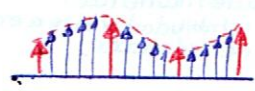
Todas las subportadoras son piloto



$\rightarrow$ se usan símbolos de módulo constante (PSK) y con una potencia mayor que la de los datos

símbolos piloto

sólo algunas portadoras y el resto se 'interpolan'
 Hay que considerar el ANCHO DE BANDA DE COHERENCIA (inverso del Delay spread)



max separación entre portadoras para interpolar bien

$\rightarrow$ Método LS

En frecuencia (N muestras)

$$\hat{\underline{H}}[k] = \frac{\underline{Y}[k]}{\underline{X}[k]}$$

trivial!

$$\min E\{|\underline{H}[k] - \hat{\underline{H}}[k]|^2\}$$

En tiempo, L muestras
 $L \ll N$
 Es más fiable que en frecuencia si L es conocido

$$\hat{\underline{h}}_{\text{LS}} = \underline{Q}_{\text{LS}} \cdot \underline{F}^H \text{diag}(\underline{X})^H \underline{Y}$$

$$\underline{Q}_{\text{LS}} = (\underline{F}^H \text{diag}(\underline{X})^H \text{diag}(\underline{X}) \underline{F})^{-1}$$

3. ESTIMACIÓN DE LA DIRECTION OF ARRIVAL (DOA)

señales de antenas: $\underline{x}[n] = \underline{A}(\theta) \cdot \underline{s}[n] + \underline{n}[n]$

matriz de covarianza: $\underline{R}_x = E[\underline{x}[n] \cdot \underline{x}^H[n]] = \underline{A}(\theta) \cdot \underline{R}_s \cdot \underline{A}^H(\theta) + \underline{R}_n$

Estimar la dirección de llegada de las distintas señales que inciden en el array (de TODAS) (Radar, sonar, wireless, ...)

$\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_K]$
vector de DOAs de señales interferentes (lo que busco)

Métodos espectrales

Estimador de Bartlett

equivalente al periodograma espacial

$$P_{\text{Bartlett}}(\theta) = \frac{1}{M} \underline{a}^H(\theta) \underline{R}_x \underline{a}(\theta)$$

- complejidad: búsqueda 1D
- requiere señales incorreladas
- sesgado

Dem:

$$\text{beamformer: } y[n] = \underline{w}^H \cdot \underline{x}[n] \stackrel{\text{F.A.}}{\approx} \underline{a}(\theta) \cdot \underline{x}[n]$$

pot.

$$E[|y[n]|^2] = \underline{a}^H(\theta) \cdot \underline{R}_x \cdot \underline{a}(\theta)$$

filtro adaptado (sólo le importa el ruido, no las interferencias)

$P(\theta)$ es la potencia que recibiría el beamformer adaptado al ángulo θ (para cada θ)

Estimador de Capon

$$P_{\text{Capon}}(\theta) = \frac{1}{\underline{a}^H(\theta) \underline{R}_x^{-1} \underline{a}(\theta)}$$

- complejidad: búsqueda 1D
- requiere señ. incorreladas
- sesgado

Dem: basado en beamformer óptimo MVDR

$$\text{MVDR} \rightarrow y[n] = \left[\frac{\underline{R}_x^{-1} \underline{a}(\theta)}{\underline{a}^H(\theta) \underline{R}_x^{-1} \underline{a}(\theta)} \right]^H \cdot \underline{x}[n]$$

$$P_y(\theta) = \dots = P_{\text{Capon}}(\theta)$$

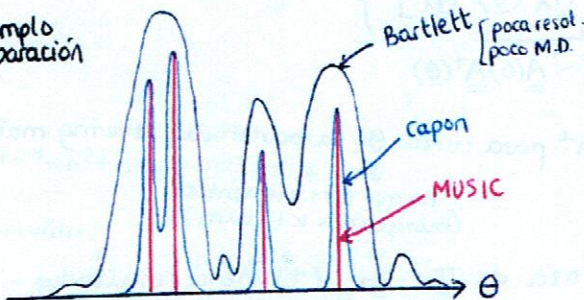
elimina las interferencias

Método MUSIC

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{M}{\underline{a}^H(\theta) \cdot \underline{\Pi}_n \cdot \underline{a}(\theta)}$$

- complejidad: búsqueda 1D + EVD (eigenvalue decomposition)
- requiere señales incorreladas
- insesgado

ejemplo comparación



Enfoque algebraico: Descomponer $\underline{R}_x$ en subespacios

$$\underline{R}_x = \underline{U}_s \underline{\Lambda}_s \underline{U}_s^H + \sigma_n^2 \underline{U}_n \underline{U}_n^H$$

autovectores de los $K+1$ mayores autovalores

subespacio de la señal

autovectores de los otros $M-(K+1)$ autovalores

subespacio de ruido

ortogonales entre sí

Si voy tomando $\underline{a}(\theta)$ para $\theta \in [-90^\circ; 90^\circ]$ y voy proyectando sobre el subespacio de ruido, allá donde haya dirección de llegada habrá un nulo

$$\underline{U}_n^H \underline{a}(\theta) = 0 \text{ para } \theta = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_K$$

$$\underline{\Pi}_n = \underline{U}_n \underline{U}_n^H \text{ matriz de proyección sobre el espacio de ruido}$$

Métodos paramétricos

- ML y variantes (permite señales correladas entre sí)
- ESPRIT

- complejidad: búsqueda $K+1$ dimensional insesgado
- Basados en el modelo de señal

- Supone un modelo y busca los parámetros que mejor se ajustan a ese modelo
- Permite señales correladas entre sí (excepto ESPRIT) aunque siempre incorreladas con el ruido

Modelo de $\underline{R}_x$ (todo lo recibido - autocorrelación)

$$\underline{R}_x = \underline{U}_s \underline{\Lambda}_s \underline{U}_s^H + \sigma_n^2 \underline{U}_n \underline{U}_n^H$$

$$= \underline{U}_x \underline{\Lambda}_x \underline{U}_x^H$$

auto vectores

autovalores ordenados por magnitud

señal

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ autovalores de la señal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + \sigma_n^2 & & & \\ & \lambda_2 + \sigma_n^2 & & \\ & & \lambda_3 + \sigma_n^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_K + \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_n^2 & & & \\ & \sigma_n^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

• Método paramétrico: Estimador ML (Maximum Likelihood)

Es el óptimo y permite señales correlacionadas entre sí:

Suposición: $E[\underline{x}(n) \cdot \underline{x}^H(m)] = \begin{cases} \sigma^2 \mathbf{I} & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$

- Ruido blanco gaussiano de media nula

Snapshot en un instante

$\underline{x}(n) = \underline{A}(\theta) \underline{s}(n) + \underline{n}(n) \Rightarrow$ Será fdp blanca gaussiana de media $\underline{A}(\theta) \cdot \underline{s}(n)$

los supone constantes

$f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^M} \exp\left(-\frac{\|\underline{x}(n) - \underline{A}(\theta) \underline{s}(n)\|^2}{\sigma^2}\right)$

Varios snapshots N

$\ell(\theta, \underline{s}(n), \sigma^2) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{(\pi\sigma^2)^M} \exp\left(-\frac{\|\underline{x}(n) - \underline{A}(\theta) \underline{s}(n)\|^2}{\sigma^2}\right)$

tomando la y cambiando signo

$L(\theta, \underline{s}(n), \sigma^2) = MN \log(\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \|\underline{x}(n) - \underline{A}(\theta) \underline{s}(n)\|^2$

no conocido

lo que busco

fijo pero no conocido

Ya que no conozco σ^2 ni $\underline{s}(n)$, los estimo en función de lo que busco

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{NM} \sum_{n=1}^N \|\underline{x}[n] - \underline{A}(\theta) \underline{s}(n)\|^2$

$\hat{\underline{s}}(n) = \underline{A}^+(\theta) \underline{x}[n]$

Substituyendo estas estimas en la expresión de $L(\theta, \underline{s}(n), \sigma^2)$ puedo derivar la expresión que sale respecto a θ e igualar a cero para obtener el mínimo

$\hat{\theta}_{ML} = \min_{\theta} \left\{ \text{traza} \left[\frac{\underline{\Pi}_A^+(\theta) \underline{R}_x}{\underline{I} - \underline{A}(\theta) \underline{A}^+(\theta)} \right] \right\}$

1. Construyo $\underline{\Pi}_A^+$ para cada θ a partir del steering matrix

barrer $K+1$ elementos (búsqueda $K+1$ dim)

2. Calculo la traza de $\underline{\Pi}_A^+ \cdot \underline{R}_x$ y el menor resultado será el correspondiente a $\hat{\theta}_{ML}$

- **MLS (ML estocástico)**: supone $\underline{s}(n)$ aleatorio gaussiano complejo } búsqueda $K-1$ dim
- **Estimador WSF**: Weighted Subspace Fitting
- **Estimador ESPRIT**: Descomposición en autovalores, solución cerrada $\rightarrow$ computacionalmente rápido
 - Supone invarianza rotacional (restringido a cierta geometría del array)