

# MICROONDAS

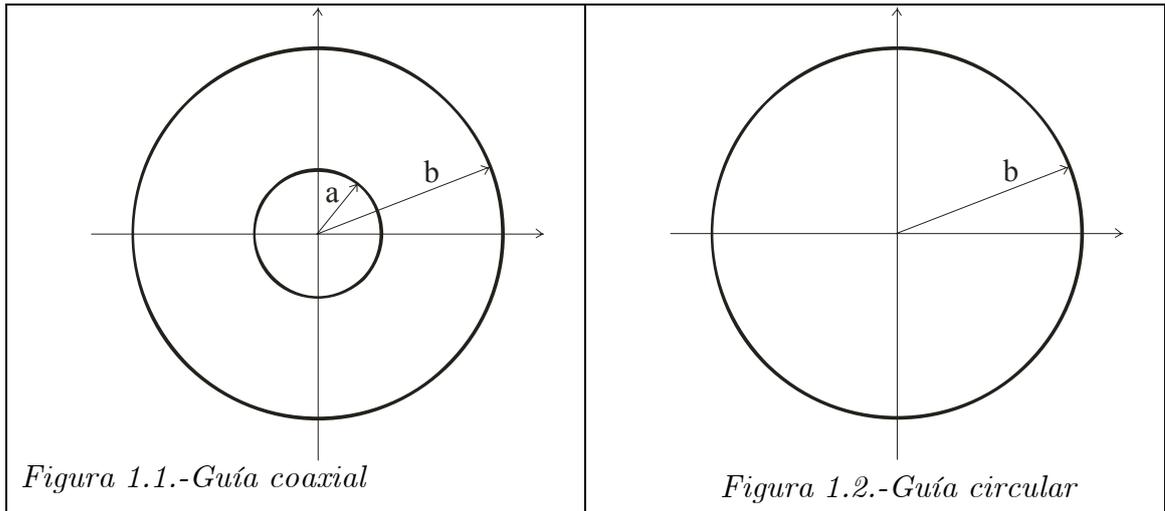
Examen abril 07

M. Baquero, F. Peñaranda y V. Boria

17 ABRIL 07

17.1 PROBLEMA 1 (35p)

Las figuras 1.1 y 1.2 muestran sendas guías, una coaxial (de radios interior  $a=3.05\text{ mm}$  y exterior  $b=7\text{ mm}$ ) y la otra circular (de radio  $b=7\text{ mm}$ ). Sus paredes son eléctricas y el dieléctrico interior es aire en los dos casos.



Se pide:

(14p)a) Calcule el número de onda de corte ( $k_c$ ) y la frecuencia de corte ( $f_c$ ) de los 3 primeros modos de cada una de las dos guías planteadas.

De todos los modos calculados en el apartado anterior (3 en cada guía) nos interesa quedarnos únicamente con el primer modo T.M. que aparezca antes en cualquiera de las dos guías.

(3p) b) Para este modo, sea de la guía que sea, calcule todas las componentes de campo eléctrico y magnético.

Asimismo, con esta guía seleccionada se desea construir una cavidad resonante. Para esta cavidad, calcule:

(8p) c) La altura que debe tener la cavidad así formada (en guía coaxial o circular, según se haya seleccionado en el apartado b) y la permitividad del material que debe rellenarla para que la 1ª frecuencia de resonancia de este modo sea  $f_0=11.6\text{ GHz}$ .

(10p)d) Por último, calcule el factor de calidad de la cavidad anterior si suponemos que el dieléctrico del interior de la cavidad tiene pérdidas caracterizadas por su  $tg\delta$ , la posición en la pared lateral ( $r_0=b, \varphi_0, z_0$ ) donde colocaría una espira para poder excitar el modo TM que estamos analizando, así como el plano en el que debería estar contenida.

Datos:

- 1) Ceros de las siguientes ecuaciones con productos cruzados de las funciones de Bessel ( $\alpha > 1$ ):

$$J_\nu(x) \cdot Y_\nu(\alpha \cdot x) - J_\nu(\alpha \cdot x) \cdot Y_\nu(x) = 0 \Rightarrow x_{\nu p} \approx \frac{p \cdot \pi}{\alpha - 1}, p = 1, 2, 3, \dots$$

donde  $x_{\nu p}$  es el cero  $p$ -ésimo cuando el orden de las funciones de Bessel es  $\nu$ .

$$J'_\nu(x) \cdot Y'_\nu(\alpha \cdot x) - J'_\nu(\alpha \cdot x) \cdot Y'_\nu(x) = 0 \Rightarrow x_{\nu p}' \approx \begin{cases} \frac{p \cdot \pi}{\alpha - 1}, & \left\{ \begin{array}{l} \nu = 0 \\ p = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right. \\ \frac{2 \cdot \nu}{\alpha + 1}, & \left\{ \begin{array}{l} \nu > 0 \\ p = 1 \end{array} \right. \\ \frac{(p-1) \cdot \pi}{\alpha - 1}, & \left\{ \begin{array}{l} \nu > 0 \\ p = 2, 3, \dots \end{array} \right. \end{cases}$$

donde  $x_{\nu p}'$  es el cero  $p$ -ésimo cuando el orden de las funciones de Bessel es  $\nu$ .

- 2) Ceros de las funciones de Bessel de primera especie  $J_n(x)$  (denominados  $p_{nl}$ ) y de su primera derivada  $J'_n(x)$  (denominados  $p'_{nl}$ )

$p_{nl}$		$\ell$				
		1	2	3	4	5
n	0	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309
	0.5	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664	15.7080
	1	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
	1.5	4.4934	7.7253	10.9041	14.0662	17.2208
	2	5.1356	8.4172	11.6198	14.7960	17.9598
	2.5	5.7635	9.0950	12.3229	15.5146	18.6890
	3	6.3802	9.7610	13.0152	16.2235	19.4094

$p'_{nl}$		$\ell$				
		1	2	3	4	5
n	0	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
	0.5	1.1656	4.6042	7.7899	10.9499	14.1017
	1	1.8412	5.3314	8.5363	11.7060	14.8636
	1.5	2.4605	6.0293	9.2614	12.4453	15.6116
	2	3.0542	6.7061	9.9695	13.1704	16.3475
	2.5	3.6328	7.3670	10.6636	13.8834	17.0728
	3	4.2012	8.0152	11.3459	14.5858	17.7887

3) Componentes transversales de campo en función de la axiales:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \frac{1}{k^2 + \gamma^2} \cdot (-j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \vec{\nabla}_t \times (H_z \cdot \hat{z}) - \gamma \cdot \vec{\nabla}_t \cdot E_z) \\ \vec{H}_t &= \frac{1}{k^2 + \gamma^2} \cdot (j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \vec{\nabla}_t \times (E_z \cdot \hat{z}) - \gamma \cdot \vec{\nabla}_t \cdot H_z) \end{aligned}$$

4) Operadores en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_t \cdot \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \hat{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \hat{\varphi} \\ \vec{\nabla}_t \times \vec{F} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} \cdot \hat{r} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \cdot \hat{\varphi} + \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot F_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \cdot \hat{z} \end{aligned}$$

a) Para calcular los números de onda de corte de cada una de las dos guías planteadas, debemos plantear las ecuaciones de onda en cada una de ellas. Empezaremos por la guía coaxial.

Sabemos que los modos posibles en una guía son los modos T.E.M. (Transversales Eléctricos y Magnéticos), T.M. (Transversales Magnéticos) y T.E. (Transversales Eléctricos). En la guía coaxial podemos tener los tres tipos, ya que los modos T.E.M. requieren un medio homogéneo y al menos dos conductores, como es el caso.

Para los modos T.E.M. sabemos que se debe cumplir que  $k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = 0$ , por lo que el número de onda de corte es cero y así la frecuencia de corte asociada, que es aquella a la cual la constante de propagación  $\gamma$  es cero, será también cero. Es decir, el primer modo de una guía coaxial es el modo T.E.M.

Para el resto de modos (T.E. y T.M.) vamos a plantear sus ecuaciones de onda. En los modos T.M. tenemos que la componente axial de campo magnético  $H_z = 0$  por lo que basta con plantear la ecuación de onda para la componente axial de campo eléctrico:

$$\nabla_t^2 E_z + (k^2 + \gamma^2) \cdot E_z = \nabla_t^2 E_z + k_c^2 \cdot E_z = 0 \tag{1.1}$$

La solución en coordenadas cilíndricas es bien conocida:

$$E_z = [A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) + B \cdot Y_\nu(k_c \cdot r)] \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \tag{1.2}$$

donde  $J_\nu(k_c \cdot r)$  e  $Y_\nu(k_c \cdot r)$  son las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden  $\nu$  y la función trigonométrica podría ser también  $\sin(\nu \cdot \varphi + \Theta_0)$ , ya que todo depende del origen de fases que tomemos.

Dada la periodicidad en  $\varphi$  de la estructura coaxial, el orden  $\nu$  debe ser un número entero, de tal forma que  $\nu = n$ .

Además, las condiciones de contorno de la estructura suponen que el campo eléctrico tangencial en los conductores debe ser nulo, de tal forma que:

$$E_z \begin{pmatrix} r = a \\ r = b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A \cdot J_n(k_c \cdot a) + B \cdot Y_n(k_c \cdot a) = 0 \\ A \cdot J_n(k_c \cdot b) + B \cdot Y_n(k_c \cdot b) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Estas ecuaciones se traducen en las siguientes relaciones:

$$B = -A \cdot \frac{J_n(k_c \cdot a)}{Y_n(k_c \cdot a)} = -A \cdot \frac{J_n(k_c \cdot b)}{Y_n(k_c \cdot b)} \quad (1.4)$$

Y además en que se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$\frac{J_n(k_c \cdot a)}{Y_n(k_c \cdot a)} = \frac{J_n(k_c \cdot b)}{Y_n(k_c \cdot b)} \Rightarrow J_n(k_c \cdot b) \cdot Y_n(k_c \cdot a) - J_n(k_c \cdot a) \cdot Y_n(k_c \cdot b) \quad (1.5)$$

Nótese que en esta ecuación el orden  $n$  es arbitrario y la incógnita es el número de onda de corte  $k_c$ . Si ahora hacemos los siguientes cambios de variable:

$$k_c \cdot a = x \quad \frac{b}{a} = \alpha \quad (1.6)$$

podremos reescribir la ecuación como:

$$\begin{aligned} J_n(k_c \cdot b) \cdot Y_n(k_c \cdot a) - J_n(k_c \cdot a) \cdot Y_n(k_c \cdot b) &= \\ = J_n(\alpha \cdot x) \cdot Y_n(x) - J_n(x) \cdot Y_n(\alpha \cdot x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Y esta ecuación es exactamente la misma que aparece en el enunciado del problema como 1<sup>er</sup> dato. Así pues, para diferentes valores de  $n$  vamos a calcular la solución de la ecuación anterior, sabiendo que los ceros son  $x_{np} = \frac{p \cdot \pi}{\alpha - 1}$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$ . Como los ceros son independientes del orden  $n$ , tenemos para todo  $n$ :

$x_{np}$	p			
	1	2	3	4
n=0,1,2,...	2.4117	4.8235	7.2352	9.6469

Puesto que  $x_{np} = k_c \cdot a$ , los números de onda de corte son:

$k_c  _{np}$	p			
	1	2	3	4
n=0,1,2,...	793.3	1586.7	2380.0	3173.3

Y la frecuencia de corte asociada es:

$$k_c = k = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon} \Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \quad (1.8)$$

lo que da las siguientes frecuencias de corte:

$f_c  _{np}$	p			
	1	2	3	4
n=0,1,2,...	37.8788 GHz	75.7576 GHz	113.6364 GHz	151.5152 GHz

Por otra parte, para el cálculo de los modos TE tenemos que la componente axial de campo eléctrico se anula  $E_z = 0$  por lo que basta con plantear la ecuación de onda para la componente axial de campo magnético:

$$\nabla_t^2 H_z + (k^2 + \gamma^2) \cdot H_z = \nabla_t^2 H_z + k_c^2 \cdot H_z = 0 \quad (1.9)$$

La solución en coordenadas cilíndricas es bien conocida, como antes:

$$H_z = [A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) + B \cdot Y_\nu(k_c \cdot r)] \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \quad (1.10)$$

con las mismas consideraciones sobre las funciones de Bessel y la función trigonométrica que para los modos T.M.

También, y dada la periodicidad en  $\varphi$  de la estructura coaxial, el orden  $\nu$  debe ser un número entero, de tal forma que  $\nu = n$ .

Además, las condiciones de contorno de la estructura suponen que el campo eléctrico tangencial es los conductores debe ser nulo, de tal forma que en este caso:

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A \cdot J_n'(k_c \cdot a) + B \cdot Y_n'(k_c \cdot a) = 0 \\ A \cdot J_n'(k_c \cdot b) + B \cdot Y_n'(k_c \cdot b) = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Estas ecuaciones se traducen en las siguientes relaciones:

$$B = -A \cdot \frac{J_n'(k_c \cdot a)}{Y_n'(k_c \cdot a)} = -A \cdot \frac{J_n'(k_c \cdot b)}{Y_n'(k_c \cdot b)} \quad (1.12)$$

Y además en que se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$\frac{J_n'(k_c \cdot a)}{Y_n'(k_c \cdot a)} = \frac{J_n'(k_c \cdot b)}{Y_n'(k_c \cdot b)} \Rightarrow J_n'(k_c \cdot b) \cdot Y_n'(k_c \cdot a) - J_n'(k_c \cdot a) \cdot Y_n'(k_c \cdot b) \quad (1.13)$$

Nótese de nuevo que en esta ecuación el orden  $n$  es arbitrario y la incógnita es el número de onda de corte  $k_c$ . Si ahora hacemos los mismos cambios de variable que antes:

$$k_c \cdot a = x \quad \frac{b}{a} = \alpha \quad (1.14)$$

podremos reescribir la ecuación como:

$$\begin{aligned} J_n'(k_c \cdot b) \cdot Y_n'(k_c \cdot a) - J_n'(k_c \cdot a) \cdot Y_n'(k_c \cdot b) &= \\ = J_n'(\alpha \cdot x) \cdot Y_n'(x) - J_n'(x) \cdot Y_n'(\alpha \cdot x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Y esta ecuación es exactamente la misma que aparece en el enunciado del problema como 2º dato. Así pues, para diferentes valores de  $n$  vamos calcular la solución de la ecuación anterior:

$x_{np}'$		p			
		1	2	3	4
n	0	2.4117	4.8235	7.2352	9.6469
	1	0.6056	2.4117	4.8235	7.2352
	2	1.2112	2.4117	4.8235	7.2352
	3	1.8167	2.4117	4.8235	7.2352

Puesto que  $x_{np}' = k_c \cdot a$ , los números de onda de corte son:

$k_c _{np}$		p			
		1	2	3	4
n	0	793.3	1586.7	2380.0	3173.3
	1	199.2	793.3	1586.7	2380.0
	2	398.4	793.3	1586.7	2380.0
	3	597.6	793.3	1586.7	2380.0

Y la frecuencia de corte asociada es:

$$k_c = k = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon} \Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \tag{1.16}$$

lo que da las siguientes frecuencias de corte:

$f_c _{np}$ (GHz)		p			
		1	2	3	4
n	0	37.8788	75.7576	113.6364	151.5152
	1	9.5113	37.8788	75.7576	113.6364
	2	19.0225	37.8788	75.7576	113.6364
	3	28.5338	37.8788	75.7576	113.6364

Esto nos lleva a que los primeros modos T.E. son los T.E.<sub>11</sub>, T.E.<sub>21</sub> y T.E.<sub>31</sub>, con frecuencias de corte inferiores a los primeros modos T.M. calculados antes.

En definitiva, para las guía coaxial, lo 3 primeros modos son:

	Modos		
	T.E.M.	T.E. <sub>11</sub>	T.E. <sub>21</sub>
$f_c$ (GHz)	0	9.5113	19.0225

Seguidamente pasamos a analizar la guía circular. En este caso no tenemos modos T.E.M., al tener un único conductor, de tal forma que sólo plantearemos los modos T.M. y T.E.

Empezando por los modos T.M., como en la guía coaxial planteamos la ecuación de onda para la componente axial del campo eléctrico  $E_z$ :

$$\nabla_t^2 E_z + (k^2 + \gamma^2) \cdot E_z = \nabla_t^2 E_z + k_c^2 \cdot E_z = 0 \tag{1.17}$$

La solución en coordenadas cilíndricas es bien conocida:

$$E_z = [A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) + B \cdot Y_\nu(k_c \cdot r)] \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \tag{1.18}$$

De nuevo, y dada la periodicidad en  $\varphi$  de la estructura, el orden  $\nu$  debe ser un número entero, de tal forma que  $\nu = n$ .

Además hay que tener en cuenta que ahora el origen ( $r=0$ ) es un punto del medio donde queremos calcular el campo, y hay que recordar que la función de Bessel de 2ª especie  $Y_\nu(k_c \cdot r)$  es singular en  $r=0$ , por lo que no puede formar parte de la solución del campo eléctrico. Por ello la amplitud  $B$  de esta función se debe anular, quedando la solución como:

$$E_z = A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \tag{1.19}$$

Las condiciones de contorno de la estructura suponen que el campo eléctrico tangencial en los conductores debe ser nulo, de tal forma que:

$$E_z(r = b) = 0 \Rightarrow A \cdot J_n(k_c \cdot b) = 0 \tag{1.20}$$

La solución de esta ecuación, que son los ceros de la función de Bessel de 1ª especie, es un dato del enunciado (ceros  $p_{nl}$ ), por lo que tenemos:

$$k_c \cdot b = p_{nl} \Rightarrow k_c = \frac{p_{nl}}{b} \tag{1.21}$$

De esta forma, los números de onda de corte son:

$k_c  _{nl}$		p			
		1	2	3	4
n	0	343.5	788.6	1236.2	1684.5
	1	547.4	1002.2	1453.4	1903.4
	2	733.7	1202.5	1660.0	2113.7
	3	911.5	1394.4	1859.3	2317.6

Y la frecuencia de corte asociada es:

$$k_c = k = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon} \Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = \frac{p_{nl}}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \tag{1.22}$$

lo que da las siguientes frecuencias de corte:

$f_c _{nl}$ (GHz)		P			
		1	2	3	4
n	0	16.4031	37.6520	59.0264	80.4292
	1	26.1358	47.8528	69.3925	90.8799
	2	35.0297	57.4134	79.2581	100.9221
	3	43.5186	66.5792	88.7757	110.6591

Por ello, los primeros modos T.M. son los T.M.<sub>01</sub>, T.M.<sub>11</sub> y T.M.<sub>21</sub>.

Por otra parte, para el cálculo de los modos TE tenemos que la componente axial de campo eléctrico se anula  $E_z = 0$  por lo que basta con plantear la ecuación de onda para la componente axial del campo magnético:

$$\nabla_t^2 H_z + (k^2 + \gamma^2) \cdot H_z = \nabla_t^2 H_z + k_c^2 \cdot H_z = 0 \tag{1.23}$$

La solución en coordenadas cilíndricas es:

$$H_z = [A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) + B \cdot Y_\nu(k_c \cdot r)] \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \tag{1.24}$$

De nuevo, y dada la periodicidad en  $\varphi$  de la estructura, el orden  $\nu$  debe ser un número entero, de tal forma que  $\nu = n$ .

Además también se anula la amplitud  $B$  de la función de Bessel de 2ª especie dada su singularidad en el origen, quedando la solución como:

$$H_z = A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \tag{1.25}$$

Las condiciones de contorno de la estructura suponen que el campo eléctrico tangencial en los conductores debe ser nulo, de tal forma que:

$$\frac{\partial H_z(r=b)}{\partial r} = 0 \Rightarrow A \cdot J_n'(k_c \cdot b) = 0 \tag{1.26}$$

La solución de esta ecuación, que son los ceros de la primera derivada de la función de Bessel de 1ª especie, es un dato del enunciado (ceros  $p_{nl}'$ ), por lo que tenemos:

$$k_c \cdot b = p_{nl}' \Rightarrow k_c = \frac{p_{nl}'}{b} \tag{1.27}$$

De esta forma, los números de onda de corte son:

$k_c _{nl}$		P			
		1	2	3	4
n	0	547.4	1002.2	1453.4	1903.4
	1	263.0	761.6	1219.5	1672.3
	2	436.3	958.0	1424.2	1881.5
	3	600.2	1145.0	1620.8	2083.7

Y la frecuencia de corte asociada es:

$$k_c = k = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{p_{nl}'}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \quad (1.28)$$

lo que da las siguientes frecuencias de corte:

$f_c _{nl}$ (GHz)		p			
		1	2	3	4
n	0	26.1358	47.8528	69.3925	90.8799
	1	12.5586	36.3654	58.2256	79.8458
	2	20.8327	45.7420	68.0010	89.8341
	3	28.6560	54.6713	77.3897	99.4890

Por ello, los primeros modos T.E. son los T.E.<sub>11</sub>, T.E.<sub>21</sub> y T.E.<sub>01</sub>.

En definitiva, para la guía circular, los 3 primeros modos son:

	Modos		
	T.E. <sub>11</sub>	T.M. <sub>01</sub>	T.E. <sub>21</sub>
f <sub>c</sub> (GHz)	12.5586	16.4031	20.8327

b) Del apartado anterior concluimos que tenemos un modo T.E.M. y dos modos T.E. en la guía coaxial y 2 modos T.E. y un modo T.M. en la guía circular, por lo que será este último el que nos interesará para el problema.

La componente axial de campo eléctrico se ha calculado antes y es:

$$E_z = A \cdot J_n(k_c \cdot r) \cdot \cos(n \cdot \varphi + \Phi_0) \quad (1.29)$$

Como el modo es el T.M.<sub>01</sub>, tenemos que anular el orden  $n$  de la función de Bessel ( $n=0$ ), quedando:

$$E_z = B \cdot J_0(k_c \cdot r) \quad (1.30)$$

Donde el número de onda de corte es:

$$k_c \cdot b = p_{01} \Rightarrow k_c = \frac{p_{01}}{b} = 343.5 \quad (1.31)$$

Por lo que la frecuencia de corte es:

$$k_c = k = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{p_{01}}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = 16.4 \text{ GHz} \quad (1.32)$$

El resto de componentes serán, a partir de los datos del problema:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \vec{\nabla} E_z = -\frac{\gamma}{k_c} \cdot B \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot \hat{r} \\ \vec{H}_t &= \frac{\hat{z} \times \vec{E}_t}{Z_{TM}} = \left\langle Z_{TM} = \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \right\rangle = -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot B \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot \hat{\varphi} \end{aligned} \quad (1.33)$$

c) Para construir una cavidad con este modo vamos a escribir todas las componentes de campo eléctrico y magnético en el interior de la cavidad:

$$\begin{aligned} E_z &= J_0(k_c \cdot r) \cdot (B^+ \cdot e^{-j\beta \cdot z} + B^- \cdot e^{+j\beta \cdot z}) \\ E_r &= -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot (B^+ \cdot e^{-j\beta \cdot z} - B^- \cdot e^{+j\beta \cdot z}) \\ H_\varphi &= -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot (B^+ \cdot e^{-j\beta \cdot z} + B^- \cdot e^{+j\beta \cdot z}) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Las condiciones de contorno imponen que en las tapas superior e inferior de la cavidad el campo eléctrico tangencial debe ser cero, por lo que:

$$E_r \begin{pmatrix} z=0 \\ z=d \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} B^+ - B^- = 0 \\ B^+ \cdot e^{-j\beta \cdot d} - B^- \cdot e^{+j\beta \cdot d} = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

De la 1ª ecuación obtenemos:

$$B^+ = B^- \quad (1.36)$$

Y de la 2ª ecuación, tras utilizar el resultado de la 1ª:

$$B^+ \cdot e^{-j\beta \cdot d} - B^+ \cdot e^{+j\beta \cdot d} = 0 \Rightarrow \sin(\beta \cdot d) = 0 \Rightarrow \beta \cdot d = p \cdot \pi, p = 0,1,2,\dots \quad (1.37)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de campo, tenemos:

$$\begin{aligned} E_z &= J_0(k_c \cdot r) \cdot B^+ \cdot 2 \cdot \cos(\beta \cdot z) \\ E_r &= -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot B^+ \cdot (-2 \cdot j) \cdot \sin(\beta \cdot z) \\ H_\varphi &= -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot B^+ \cdot 2 \cdot \cos(\beta \cdot z) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Y donde la frecuencia de resonancia se obtiene a partir de la ecuación (1.37) y sabiendo que la relación con el número de onda de corte es:

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon - \beta^2 \quad (1.39)$$

Por lo tanto, despejando tenemos:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \cdot \sqrt{k_c^2 + \beta^2} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p_{01}}{b}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot \pi}{d}\right)^2} \quad (1.40)$$

Como nos piden el primer modo resonante, este se consigue cuando  $p=0$ , es decir cuando  $\beta=0$  (condición de corte), por lo que las componentes de campo eléctrico y magnético son:

$$\begin{aligned} E_z &= J_0(k_c \cdot r) \cdot B^+ \cdot 2 \\ E_r &= 0 \\ H_\varphi &= -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot B^+ \cdot 2 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Y, en este caso, la frecuencia de resonancia coincidirá con la frecuencia de corte del modo T.M.<sub>01</sub>:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \cdot \sqrt{k_c^2 + \beta^2} = \frac{p_{01}}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \quad (1.42)$$

Y, por lo tanto, la altura de la cavidad no va a influir en la frecuencia de resonancia que nos piden. En definitiva la altura  $d$  de la cavidad puede ser cualquiera.

No así la permitividad del material que debe rellenar la cavidad, ya que si la frecuencia de resonancia ha de ser  $f_0=11.6 \text{ GHz}$ , de la última ecuación debemos despejar la permitividad, quedando:

$$f_0 = \frac{p_{01}}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}} = 11.6 \text{ GHz} \Rightarrow \epsilon_r = 2 \quad (1.43)$$

d) Finalmente, para calcular el factor de calidad debemos partir de su propia definición:

$$Q = \omega_0 \cdot \frac{U_T}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{U_e + U_m}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot U_e}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot U_m}{P_L} \quad (1.44)$$

Donde se ha tenido en cuenta que las energías eléctrica y magnética son iguales en resonancia.

Las energías almacenadas eléctrica y magnética podemos calcularlas como:

$$U_e = \frac{1}{4} \cdot \epsilon \cdot \iiint_V |\vec{E}|^2 \cdot dV \quad U_m = \frac{1}{4} \cdot \mu \cdot \iiint_V |\vec{H}|^2 \cdot dV \quad (1.45)$$

La potencia disipada  $P_L$  es la disipada, en este caso, en el dieléctrico, cuya expresión es:

$$P_L = \frac{1}{4} \cdot \sigma_e \cdot \iiint_V |\vec{E}|^2 \cdot dV \quad (1.46)$$

Siendo  $\sigma_e$  la conductividad equivalente del dieléctrico de valor<sup>1</sup>:

$$\sigma_e = \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \text{tg}\delta \quad (1.47)$$

Por lo tanto si utilizamos la expresión (1.44) para calcular el factor de calidad con la energía eléctrica tendremos:

$$\begin{aligned} Q &= \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot U_e}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \epsilon \cdot \iiint_V |\vec{E}|^2 \cdot dV}{\frac{1}{4} \cdot \sigma_e \cdot \iiint_V |\vec{E}|^2 \cdot dV} = \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \epsilon}{\frac{1}{4} \cdot \sigma_e} = \\ &= \omega_0 \cdot \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{\omega_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \text{tg}\delta} = \frac{1}{\text{tg}\delta} = Q \end{aligned} \quad (1.48)$$

Por su parte, para colocar la espira debemos considerar que esta se excita cuando es atravesada por el campo magnético, por lo que tenemos que tener

<sup>1</sup> Esta expresión proviene de la 2ª ecuación de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \vec{E} = j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot (1 - j \cdot \text{tg}\delta) \cdot \vec{E} = \\ &= \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \text{tg}\delta \cdot \vec{E} + j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E} = \sigma_e \cdot \vec{E} + j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

presente las componentes de campo -ecuación (1.38) para los modos  $TM_{01p}$  en general y ecuación (1.41) para los modos  $TM_{010}$ . Viendo esta última ecuación, que es la que nos interesa, vemos que sólo tenemos una componente de campo magnético, y es en la dirección  $\hat{\phi}$ , por lo que la espira debe estar contenida en el plano  $r$ - $z$ , para que pueda existir flujo de campo magnético que la atraviese.

Respecto a la posición de la misma en la pared lateral ( $r_0=b, \varphi_0, z_0$ ) da igual, puesto que el campo magnético es independiente de  $\varphi$  y de  $z$ .

17.2. PROBLEMA 2 (35 p)

Para sintetizar un inversor de impedancias de constante  $K$  ( $\Omega$ ) con  $K < Z_0$  (es decir,  $\bar{K} < 1$ ), se propone la red de 2 accesos mostrada en la figura 1. Como parámetros de diseño del inversor se considerarán los siguientes: la impedancia característica  $Z'_0$  de la línea de transmisión ideal de longitud  $\lambda/4$ , y las longitudes eléctricas (ambas iguales y de valor  $\phi = \beta l$ ) de los tramos de línea de transmisión ideal de impedancia característica  $Z_0$ . Se asume que el valor  $C$  de los condensadores situados en paralelo es conocido.

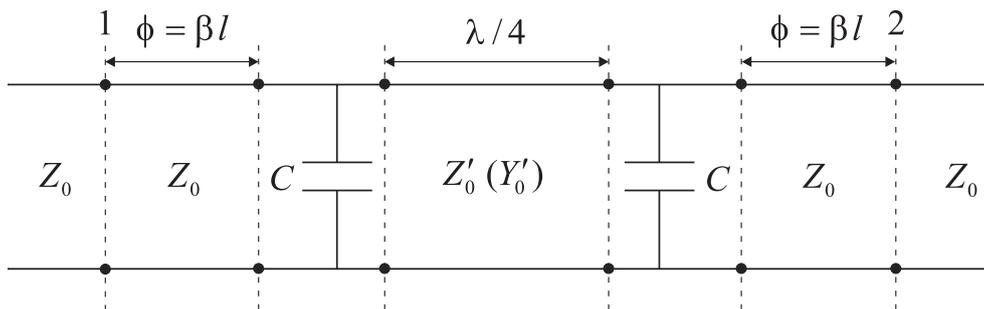


Figura 1: Red de 2 accesos propuesta como inversor de impedancias

Se pide responder a las siguientes cuestiones:

(4 p) a.- Enumerar las propiedades que debe tener una red de 2 accesos para que pueda sintetizar un inversor de impedancias, e indicar si la red de la figura 1 satisface dichas propiedades.

Seguidamente, deducir la expresión del parámetro  $S_{11}$  del inversor a sintetizar en función de su constante normalizada  $\bar{K}$ .

(12 p) b.- Calcular el parámetro  $S_{11}$  de la red mostrada en la figura 1. Expresar el resultado final **en formato de módulo y fase**, y en función de los parámetros  $\bar{Y}'_0$  ( $\bar{Y}'_0 = Y'_0/Y_0 = Z_0/Z'_0$ ),  $\bar{B}$  ( $\bar{B} = C\omega/Y_0$ ) y  $\phi$  ( $\phi = \beta l$ ).

Indicar con claridad todas las propiedades que utilice en la resolución del apartado.

(11 p) c.- Deducir una ecuación de diseño que relacione el parámetro  $\bar{Y}'_0$  con la constante normalizada  $\bar{K}$  del inversor a sintetizar, y con la susceptancia normalizada  $\bar{B}$  conocida.

A continuación, explicar brevemente el proceso a seguir para deducir el otro parámetro de diseño ( $\phi = \beta l$ ) de la red propuesta.

(8 p) d.- Si se pretende sintetizar un inversor con una constante  $K = 15 \Omega$  a una frecuencia  $f = 600 \text{ MHz}$ , y se tiene que  $Z_0 = 50 \Omega$  y  $C = 12 \text{ pF}$ , indicar **todas las posibles soluciones** para la impedancia característica  $Z'_0$  (en  $\Omega$ ) y la longitud física  $l$  (en m) de la red propuesta.

a) Un inversor ideal se define como una red de 2 accesos recíproca, sin pérdidas y simétrica, que cuando se carga con una impedancia  $Z_L$  permite ver a su entrada una impedancia  $Z_{in} = K^2/Z_L$ . Así pues, las propiedades que debe tener una red de 2 accesos para poder sintetizar un inversor son que sea recíproca, sin pérdidas y simétrica.

La red de 2 accesos mostrada en la figura 1 está formada por líneas de transmisión ideales (sin pérdidas) y condensadores, por lo que puede afirmarse que es recíproca (al ser pasiva, lineal y no incluir ferritas) así como sin pérdidas. A su vez la red es simétrica, pues presenta un Plano de Simetría (PS) situado a mitad de la línea de transmisión ideal de longitud  $\lambda/4$  (ver figura 2).

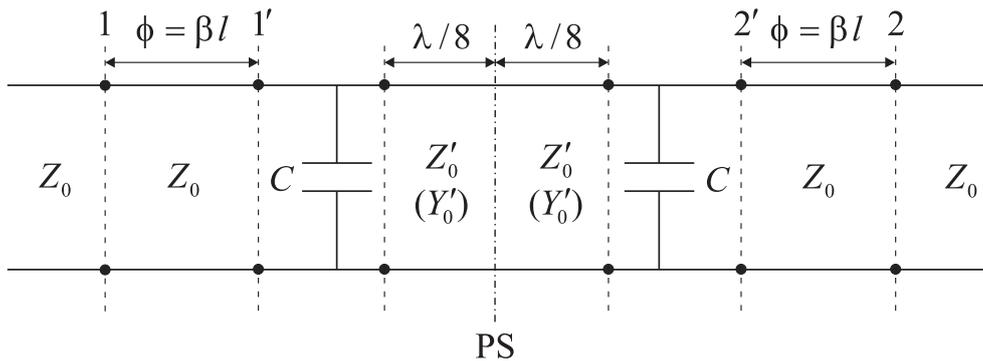


Figura 2: Plano de Simetría de la red de 2 accesos propuesta como inversor

Por tanto, se puede afirmar que la red de 2 accesos propuesta **SÍ satisface las propiedades necesarias para sintetizar un inversor**. Los parámetros de diseño de la red (es decir, la impedancia característica  $Z'_0$  y la longitud  $l$ ) se escogerán para recuperar el comportamiento eléctrico del inversor a sintetizar.

Para deducir la expresión del parámetro  $S_{11}$  del inversor a sintetizar (de constante normalizada  $\overline{K}$ ), se debe cargar el acceso de salida del inversor con la impedancia característica de referencia (es decir, con  $Z_0$ ). Según la definición de inversor comentada previamente, a la entrada del mismo se verá una impedancia  $Z_{in} = K^2/Z_0$ , y por tanto:

$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{K^2 - Z_0^2}{K^2 + Z_0^2} = \frac{\overline{K}^2 - 1}{\overline{K}^2 + 1}$$

b) En primer lugar se hará uso de la propiedad de cambio de planos de referencia (ver los nuevos planos de referencia 1' y 2' en la figura 2), que permite relacionar el parámetro  $S_{11}$  buscado con el parámetro  $S_{1'1'}$  a través de la relación:

$$S_{11} = S_{1'1'} e^{-j2\phi} \quad \text{con } \phi = \beta l$$

A su vez, para calcular el parámetro  $S_{1'1'}$  se hará uso de la propiedad de simetría de la red resultante (red original excluyendo los tramos de línea de transmisión de longitud  $l$ ), cuyo Plano de Simetría (PS) se muestra en la figura 2. Aplicando dicha propiedad se obtiene:

$$S_{1'1'} = \frac{1}{2} (\rho^e + \rho^o)$$

donde  $\rho^e$  y  $\rho^o$  son, respectivamente, los factores de reflexión que se ven en el acceso 1' de la estructura bajo análisis cuando PS se sustituye por una pared magnética (PM, condición de circuito abierto) y por una pared eléctrica (PE, condición de cortocircuito).

Así pues, para calcular el factor de reflexión  $\rho^e$  se debe obtener la admitancia de entrada en el acceso 1' de la red mostrada en la figura 3.

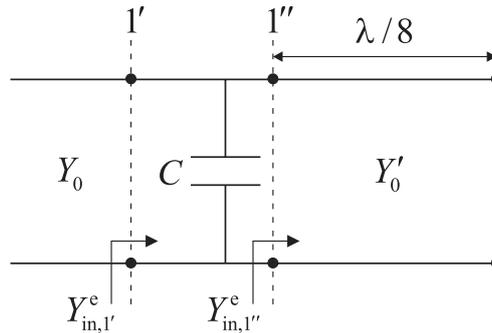


Figura 3: Red de 1 acceso al sustituir PS por PM

Considerando la red de la figura 3, y tras realizar simples operaciones, se deducen las siguientes expresiones:

$$Y_{in,1''}^e = j Y'_0 \tan(\beta l)|_{l=\lambda/8} = j Y'_0 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8}\right) = j Y'_0$$

$$Y_{in,1'}^e = j C \omega + Y_{in,1''}^e = j C \omega + j Y'_0$$

y tras normalizar la última expresión se concluye:

$$\bar{Y}_{in,1'}^e = Y_{in,1'}^e / Y_0 = j C \omega / Y_0 + j Y'_0 / Y_0 = j (\bar{B} + \bar{Y}'_0)$$

donde  $\bar{B}$  e  $\bar{Y}'_0$  se han definido en el enunciado del problema.

Por tanto, se obtiene la siguiente expresión para el factor de reflexión buscado:

$$\rho^e = \frac{Y_0 - Y_{in,1'}^e}{Y_0 + Y_{in,1'}^e} = \frac{1 - \bar{Y}_{in,1'}^e}{1 + \bar{Y}_{in,1'}^e} = \frac{1 - j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)}{1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)}$$

Procediendo de modo similar, para deducir el factor de reflexión  $\rho^o$  debe calcularse la admitancia de entrada en el acceso 1' de la red mostrada en la figura 4.

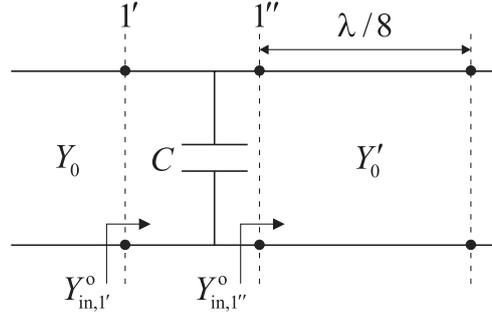


Figura 4: Red de 1 acceso al sustituir PS por PE

Teniendo en cuenta ahora la red de la figura 4, y tras realizar cálculos simples, se obtienen las siguientes expresiones:

$$Y_{in,1''}^o = -j Y'_0 \cot(\beta l)|_{l=\lambda/8} = -j Y'_0 \cot\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8}\right) = -j Y'_0$$

$$Y_{in,1'}^o = j C \omega + Y_{in,1''}^o = j C \omega - j Y'_0$$

y tras normalizar esta última expresión se concluye:

$$\bar{Y}_{in,1'}^o = Y_{in,1'}^o / Y_0 = j C \omega / Y_0 - j Y'_0 / Y_0 = j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)$$

De este modo, se obtiene la siguiente expresión para el factor de reflexión buscado:

$$\rho^o = \frac{Y_0 - Y_{in,1'}^o}{Y_0 + Y_{in,1'}^o} = \frac{1 - \bar{Y}_{in,1'}^o}{1 + \bar{Y}_{in,1'}^o} = \frac{1 - j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)}{1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)}$$

Así pues, una vez se conocen  $\rho^e$  y  $\rho^o$ , el parámetro  $S_{1'1'}$  se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} S_{1'1'} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)}{1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)} + \frac{1 - j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)}{1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)} \right] = \\ &= \frac{[1 - j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)][1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)] + [1 - j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)][1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)]}{2[1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)][1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)]} \end{aligned}$$

Evaluando los diferentes términos que aparecen en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} [1 - j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)] [1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)] &= (1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2) - j2\bar{Y}'_0 \\ [1 - j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)] [1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)] &= (1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2) + j2\bar{Y}'_0 \\ [1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)] [1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)] &= (1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2) + j2\bar{B} \end{aligned}$$

se obtiene finalmente la siguiente expresión para  $S_{1'1'}$ :

$$S_{1'1'} = \frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2)}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2) + j2\bar{B}}$$

Por tanto, el parámetro  $S_{11}$  buscado tiene el siguiente aspecto:

$$S_{11} = \frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2)}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2) + j2\bar{B}} e^{-j2\phi} = |S_{11}| e^{j\phi_{S_{11}}}$$

que se expresa en formato de módulo y fase como sigue:

$$|S_{11}| = \sqrt{\frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2)^2}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2)^2 + 4\bar{B}^2}}$$

$$\begin{aligned} \phi_{S_{11}} &= \phi_{\text{num}} - \phi_{\text{den}} - 2\phi \\ \text{con } \phi_{\text{num}} &= \begin{cases} 0 & \text{si } (1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2) \geq 0 \\ \pi & \text{si } (1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2) < 0 \end{cases} \\ \text{y } \phi_{\text{den}} &= \arctan\left(\frac{2\bar{B}}{1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2}\right) \end{aligned}$$

c) Para sintetizar el inversor de impedancias con la red de 2 accesos propuesta, se deben igualar las expresiones de los parámetros  $S_{11}$  deducidas en los apartados anteriores, es decir (teniendo en cuenta que  $\bar{K} < 1$ ):

$$\frac{\bar{K}^2 - 1}{\bar{K}^2 + 1} = \frac{1 - \bar{K}^2}{1 + \bar{K}^2} e^{j\pi} = \sqrt{\frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2)^2}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2)^2 + 4\bar{B}^2}} e^{j(\phi_{\text{num}} - \phi_{\text{den}} - 2\phi)}$$

Observando esta última ecuación, se concluye que la ecuación de diseño que relacione el parámetro  $\bar{Y}'_0$  con  $\bar{K}$  y  $\bar{B}$  se deducirá de igualar los módulos de ambos parámetros  $S_{11}$ .

Así pues, la igualdad de los módulos de ambos parámetros  $S_{11}$  se traduce en la siguiente ecuación:

$$\frac{1 - \bar{K}^2}{1 + \bar{K}^2} = \sqrt{\frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0)^2}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0)^2 + 4\bar{B}^2}}$$

y elevando ambos términos de la misma al cuadrado se obtiene:

$$\frac{(1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2} = \frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0)^2}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0)^2 + 4\bar{B}^2}$$

Si se define  $t = \frac{(1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2}$ , la ecuación anterior se puede expresar como:

$$t(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0)^2 + 4t\bar{B}^2 = (1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0)^2$$

en la que desarrollando los términos entre paréntesis elevados al cuadrado se concluye que:

$$t(1 - \bar{B}^2)^2 + 2t(1 - \bar{B}^2)\bar{Y}'_0 + t\bar{Y}'_0^4 + 4t\bar{B}^2 = (1 + \bar{B}^2)^2 - 2(1 + \bar{B}^2)\bar{Y}'_0 + \bar{Y}'_0^4$$

Agrupando ahora términos en esta última ecuación se obtiene:

$$(1-t)\bar{Y}'_0^4 - 2\left[(1 + \bar{B}^2) + t(1 - \bar{B}^2)\right]\bar{Y}'_0 + \left[(1 + \bar{B}^2)^2 - t(1 - \bar{B}^2)^2 - 4t\bar{B}^2\right] = 0$$

Recordando la definición del parámetro  $t$ , a continuación se evalúan los diferentes términos que aparecen en la expresión anterior:

$$(1-t) = 1 - \frac{(1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2} = \frac{(1 + \bar{K}^2)^2 - (1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2} = \frac{4\bar{K}^2}{(1 + \bar{K}^2)^2}$$

$$(1+t) = 1 + \frac{(1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2} = \frac{(1 + \bar{K}^2)^2 + (1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2} = \frac{2(1 + \bar{K}^4)}{(1 + \bar{K}^2)^2}$$

$$\left[(1 + \bar{B}^2) + t(1 - \bar{B}^2)\right] = (1+t) + (1-t)\bar{B}^2 = \frac{2(1 + \bar{K}^4 + 2\bar{K}^2\bar{B}^2)}{(1 + \bar{K}^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \left[ \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 - t \left(1 - \overline{B}^2\right)^2 - 4t\overline{B}^2 \right] &= \left[ \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 - t \left\{ \left(1 - \overline{B}^2\right)^2 + 4\overline{B}^2 \right\} \right] = \\ &= \left[ \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 - t \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 \right] = (1 - t) \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 = \frac{4\overline{K}^2}{\left(1 + \overline{K}^2\right)^2} \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 \end{aligned}$$

Así pues, teniendo en cuenta estos últimos resultados en la ecuación cuadrática deducida anteriormente para el parámetro  $\overline{Y}'_0$ , dicha ecuación se puede reescribir como sigue:

$$\frac{4\overline{K}^2}{\left(1 + \overline{K}^2\right)^2} \overline{Y}'_0{}^4 - \frac{4\left(1 + \overline{K}^4 + 2\overline{K}^2\overline{B}^2\right)}{\left(1 + \overline{K}^2\right)^2} \overline{Y}'_0{}^2 + \frac{4\overline{K}^2}{\left(1 + \overline{K}^2\right)^2} \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 = 0$$

y sacando factor común  $\frac{4\overline{K}^2}{\left(1 + \overline{K}^2\right)^2}$  en esta última expresión, se obtiene finalmente la ecuación de diseño del parámetro  $\overline{Y}'_0$  solicitada en este apartado:

$$\boxed{\overline{Y}'_0{}^4 - \left(\overline{K}^2 + 1/\overline{K}^2 + 2\overline{B}^2\right) \overline{Y}'_0{}^2 + \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 = 0}$$

Una vez se ha obtenido la ecuación de diseño del parámetro  $\overline{Y}'_0$ , que permite recuperar el módulo del parámetro  $S_{11}$  del inversor con la red propuesta, para deducir el otro parámetro de diseño (es decir,  $\phi = \beta l$ ) se buscará recuperar la fase del citado parámetro  $S_{11}$ . Observando pues la primera ecuación de este apartado c), se concluye que para ello debe cumplirse:

$$\pi = \phi_{\text{num}} - \phi_{\text{den}} - 2\phi$$

donde los valores de  $\phi_{\text{num}}$  y  $\phi_{\text{den}}$  son conocidos una vez se obtiene el valor de  $\overline{Y}'_0$  al resolver la ecuación de diseño correspondiente (recordar las expresiones de  $\phi_{\text{num}}$  y  $\phi_{\text{den}}$  del apartado anterior). Por tanto, para conseguir la igualdad de fases requerida, se deduce la siguiente ecuación de diseño para el parámetro  $\phi = \beta l$ :

$$\boxed{2\phi = \phi_{\text{num}} - \phi_{\text{den}} - \pi \pm 2m\pi \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots}$$

El término  $\pm 2m\pi$  introducido en esta ecuación de diseño no afecta a la igualdad de los parámetros  $S_{11}$  conseguida, pero permite controlar el valor  $l$  de las longitudes físicas de las dos líneas de impedancia característica  $Z_0$  (por ejemplo se puede escoger  $m$  para que  $l$  sea un valor positivo).

Por tanto, el segundo parámetro de diseño de la red propuesta (es decir,  $\phi = \beta l$ ) se emplea para recuperar la fase del parámetro  $S_{11}$  del inversor a sintetizar. De este modo, la red propuesta se comportará finalmente, a una frecuencia de trabajo, como el inversor de impedancias de constante normalizada  $\overline{K}$  deseado.

d) En primer lugar, se obtendrán las posibles soluciones para la impedancia característica  $Z'_0$  de la línea de longitud  $\lambda/4$ . Para ello, se debe plantear y resolver la ecuación de diseño del parámetro  $\bar{Y}'_0$  deducida en el apartado anterior.

En el ejemplo concreto del inversor que se propone sintetizar, y haciendo uso pues de los datos proporcionados en el enunciado de este apartado, se deducen los siguientes valores intermedios:

$$\bar{K} = \frac{K}{Z_0} = \frac{15}{50} = 0,3$$

$$\bar{B} = C \omega / Y_0 = C \omega Z_0 = (12 \cdot 10^{-12}) (2 \pi 6 \cdot 10^8) 50 = 2,262$$

$$\left( \bar{K}^2 + 1/\bar{K}^2 + 2\bar{B}^2 \right) = (0,3)^2 + 1/(0,3)^2 + 2(2,262)^2 = 21,4344$$

$$\left( 1 + \bar{B}^2 \right)^2 = [1 + (2,262)^2]^2 = 37,4133$$

que sustituidos en la citada ecuación de diseño de  $\bar{Y}'_0$  dan lugar a la siguiente ecuación cuadrática:

$$\bar{Y}'_0{}^4 - 21,4344 \bar{Y}'_0{}^2 + 37,4133 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática son:

$$\bar{Y}'_0{}^2 = \frac{21,4344 \pm \sqrt{(21,4344)^2 - 4(37,4133)}}{2} = \begin{cases} 19,5175 \\ 1,9169 \end{cases}$$

Así pues, los dos posibles valores para  $\bar{Y}'_0$ , teniendo en cuenta que la admitancia característica de una línea debe ser siempre positiva, son los siguientes:

$$\bar{Y}'_{0,1} = \sqrt{19,5175} = 4,4178$$

$$\bar{Y}'_{0,2} = \sqrt{1,9169} = 1,3845$$

Teniendo en cuenta que  $\bar{Y}'_0 = Z_0/Z'_0$ , se deducen fácilmente las siguientes dos posibles soluciones para la impedancia característica  $Z'_0$ :

$$\begin{aligned} Z'_{0,1} &= \frac{Z_0}{\bar{Y}'_{0,1}} = \frac{50}{4,4178} = 11,32 \text{ } (\Omega) \\ Z'_{0,2} &= \frac{Z_0}{\bar{Y}'_{0,2}} = \frac{50}{1,3845} = 36,11 \text{ } (\Omega) \end{aligned}$$

A continuación, se obtendrán las posibles soluciones para el otro parámetro de diseño (es decir,  $\phi = \beta l$ ) y, por tanto, los posibles valores de  $l$ . Para ello, se

debe resolver la segunda ecuación de diseño deducida en el apartado anterior, que requiere conocer los valores de  $\phi_{\text{num}}$  y  $\phi_{\text{den}}$  para cada solución de  $\bar{Y}'_0$ .

Así pues, según se indica en el apartado b), los valores de  $\phi_{\text{num}}$  y  $\phi_{\text{den}}$  se corresponden, respectivamente, con las fases del numerador y denominador del parámetro  $S_{1'1'}$ . Por tanto, para la primera solución de  $\bar{Y}'_0$  ( $\bar{Y}'_{0,1} = 4,4178$ ), se tiene:

$$S_{1'1',1} = \frac{(1 + (2,262)^2 - (4,4178)^2)}{(1 - (2,262)^2 + (4,4178)^2) + j 2 (2,262)} = \frac{-13,4009}{15,4009 + j 4,524}$$

$$\phi_{\text{num},1} = \pi = 3,1416 \text{ (rad)} \quad \phi_{\text{den},1} = \arctan\left(\frac{4,524}{15,4009}\right) = 0,2858 \text{ (rad)}$$

y para la segunda solución de  $\bar{Y}'_0$  ( $\bar{Y}'_{0,2} = 1,3845$ ) se obtiene:

$$S_{1'1',2} = \frac{(1 + (2,262)^2 - (1,3845)^2)}{(1 - (2,262)^2 + (1,3845)^2) + j 2 (2,262)} = \frac{4,1998}{-2,1998 + j 4,524}$$

$$\phi_{\text{num},2} = 0 \text{ (rad)} \quad \phi_{\text{den},2} = \arctan\left(\frac{4,524}{-2,1998}\right) = 2,0233 \text{ (rad)}$$

Insertando ahora los valores de  $\phi_{\text{num}}$  y  $\phi_{\text{den}}$  deducidos para cada solución en la correspondiente ecuación de diseño, se obtienen las siguientes dos posibles soluciones para el parámetro  $\phi = \beta l$ :

$$2\phi_1 = \phi_{\text{num},1} - \phi_{\text{den},1} - \pi \pm 2m\pi = 3,1416 - 0,2858 - 3,1416 + 2(3,1416) = 5,9976$$

$$\phi_1 = \frac{5,9976}{2} = 2,9988 \text{ (rad)}$$

$$2\phi_2 = \phi_{\text{num},2} - \phi_{\text{den},2} - \pi \pm 2m\pi = 0 - 2,0233 - 3,1416 + 2(3,1416) = 1,1186$$

$$\phi_2 = \frac{1,1186}{2} = 0,5593 \text{ (rad)}$$

donde en ambos casos el término  $\pm 2m\pi$  se ha escogido igual a  $2\pi$ , pues de este modo se obtiene para  $\phi$  los primeros valores positivos posibles (que conducirán a las longitudes físicas positivas más pequeñas).

Si se tiene en cuenta que  $\phi = \beta l = 2\pi l/\lambda$ , y que a la frecuencia de trabajo  $f = 600 \text{ MHz}$  la longitud de onda es  $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 6 \cdot 10^8 = 0,5 \text{ m}$ , las dos posibles soluciones para la longitud física  $l$  son:

$$l_1 = \frac{\phi_1}{2\pi} \lambda = \frac{2,9988}{2(3,1416)} 0,5 = 0,2386 \text{ (m)}$$

$$l_2 = \frac{\phi_2}{2\pi} \lambda = \frac{0,5593}{2(3,1416)} 0,5 = 0,0445 \text{ (m)}$$

### 17.3. PROBLEMA 3 (30 p)

Se desea diseñar un amplificador a  $f_1 = 10 \text{ GHz}$  haciendo uso de un transistor que en pequeña señal presenta los siguientes parámetros S:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,662 \angle -46^\circ & 0,196 \angle -25,6^\circ \\ 1,25 \angle -26,8^\circ & 0,483 \angle -42^\circ \end{bmatrix}$$

Con estos valores los círculos de estabilidad de entrada y salida son los mostrados en la figura 1(en la carta de Smith adjunta podrán observarse con mayor precisión).

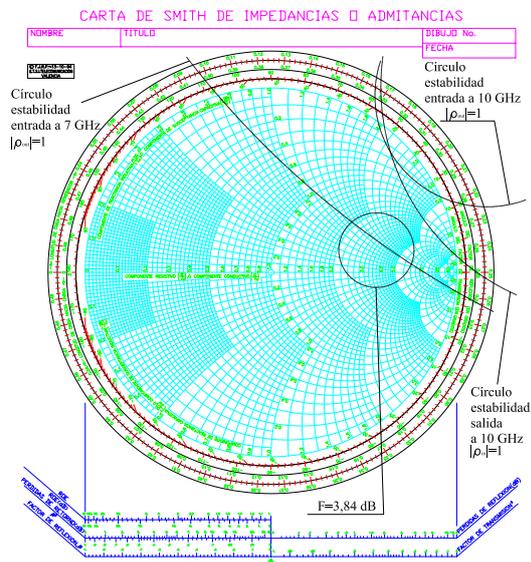


Figura 1: Círculos de estabilidad y ruido

Observando el comportamiento de este transistor a otras frecuencias se descubre que la situación más desfavorable desde el punto de vista de estabilidad se produce a la frecuencia de  $f_2 = 7 \text{ GHz}$  donde presenta los siguientes parámetros de dispersión:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,662 \angle 2^\circ & 0,19 \angle -10,6^\circ \\ 1,25 \angle 9,2^\circ & 0,87 \angle 87^\circ \end{bmatrix}$$

para los que tendríamos un círculo de estabilidad de entrada como el recogido también en la figura 1.

(5 p) a.- Indicar sobre la carta de Smith adjunta las zonas de inestabilidad de  $\rho_s$  para las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ .

(8 p) b.- Si se desea obtener una ganancia de transferencia unilateral de  $G_{TU} = 4,54 \text{ dB}$  a  $f_1$  y se escoge una  $\rho_L$  que maximice  $G_2$ , encontrar el valor de  $G_1$  necesario y dibujar sobre la carta de Smith adjunta el círculo de ganancia constante  $G_1$  correspondiente.

(9 p) c.- Si el factor de ruido deseado es de  $F = 3,84 \text{ dB}$  a  $f_1$  (el círculo correspondiente también se aporta en la figura 1) encontrar los valores  $\rho_S$  y  $\rho_L$  necesarios, cuidando que se respeten las condiciones de estabilidad y asumiendo que a  $f_2$  lo único que cambian son los parámetros de dispersión del transistor pero no así los factores de reflexión  $\rho_S$  y  $\rho_L$ .

Con este mismo transistor se desea ahora diseñar un oscilador a  $f_2 = 7 \text{ GHz}$  y se ha escogido unas redes de entrada y salida como las mostradas en la figura 2.

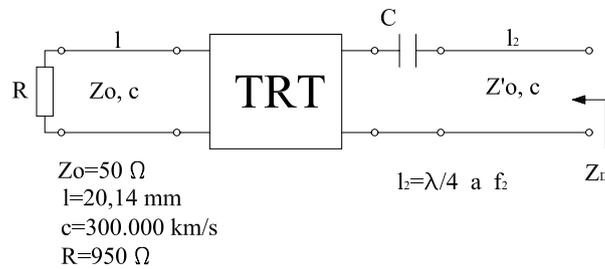


Figura 2: Oscilador

Sabiendo que con dichas redes se pretende conseguir una impedancia de salida en pequeña señal igual a  $Z_D = -3Z_o$ , con  $Z_o = 50 \Omega$ ,

(8 p) d.- calcular los valores del condensador  $C$  y de la impedancia  $Z'_o$  para que esto ocurra.

**Datos:**

Ganancia de transferencia:

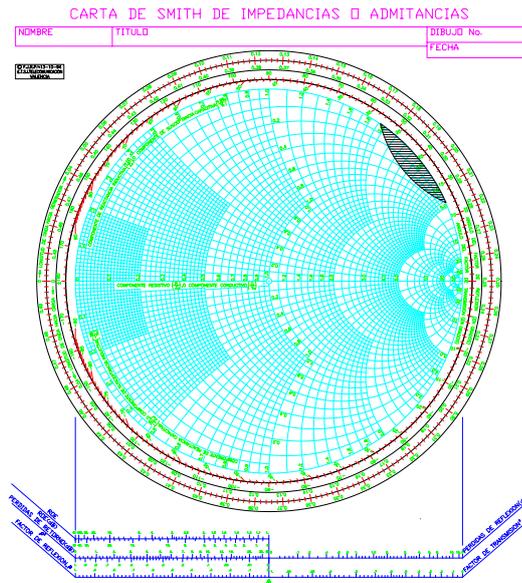
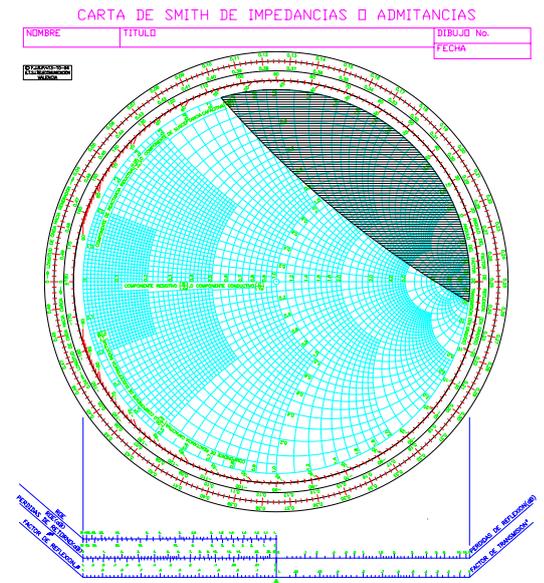
$$G_T = \frac{|S_{21}|^2(1 - |\rho_S|^2)(1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - S_{11}\rho_S)(1 - S_{22}\rho_L) - S_{12}S_{21}\rho_S\rho_L|^2}$$

Círculos de ganancia constante:

$$C_1 = \frac{G_1 S_{11}^*}{1 + G_1 |S_{11}|^2} \qquad C_2 = \frac{G_2 S_{22}^*}{1 + G_2 |S_{22}|^2}$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 - G_1(1 - |S_{11}|^2)}}{1 + G_1 |S_{11}|^2} \qquad r_2 = \frac{\sqrt{1 - G_2(1 - |S_{22}|^2)}}{1 + G_2 |S_{22}|^2}$$

a) Tanto para  $f_1$  como para  $f_2$  el parámetro  $S_{22}$  tiene módulo menor que la unidad por lo que el centro de la carta de Smith,  $\rho_S = 0$ , será estable, y con él todos los puntos que quedan en la misma zona que contiene el origen. De esta forma para el caso de la frecuencia  $f_1$  tendríamos que la zona inestable sería la mostrada en la figura 3 mientras que para la frecuencia  $f_2$  sería la sombreada en la figura 4.

Figura 3: Inestabilidad a  $f_1$ Figura 4: Inestabilidad a  $f_2$ 

b) La ganancia de transferencia unilateral sabemos que viene dada por:

$$G_{TU} = G_1 |S_{21}|^2 G_2$$

y por otra parte el valor de  $G_2$  máxima se producirá cuando  $\rho_L = S_{22}^*$ , que supondrá un valor de  $G_{2max}$  igual a :

$$G_{2max} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2} = 1,3043 = 1,1537 \text{ dB}$$

De forma que  $G_1$  deberá valer en dB:

$$G_1(\text{dB}) = G_{TU}(\text{dB}) - 20 \log |S_{21}| - G_2(\text{dB}) = 4,54 - 1,9382 - 1,1537 = 1,448 \text{ dB}$$

En lineal será  $G_1 = 1,396$  por lo que el centro y el radio del círculo de ganancia constante  $G_1$  será:

$$C_1 = \frac{G_1 S_{11}^*}{1 + G_1 |S_{11}|^2} = 0,5744 \angle 46^\circ$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 - G_1(1 - |S_{11}|^2)}}{1 + G_1 |S_{11}|^2} = 0,2864$$

cuyo representación en la carta de Smith será la mostrada en la figura 5

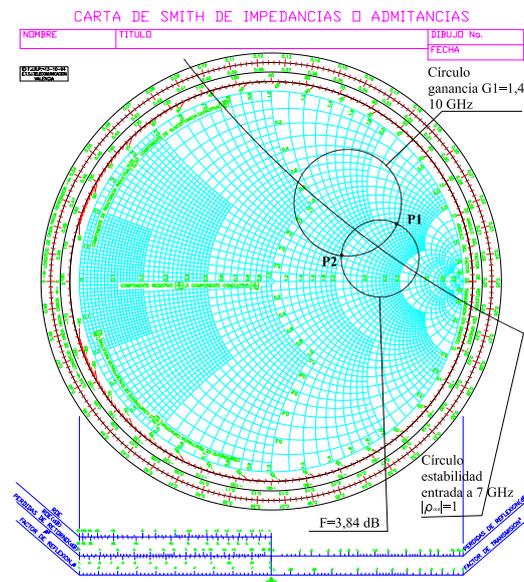


Figura 5: Círculo ganancia constante  $G_1$

c) El factor de reflexión  $\rho_S$  seguirá estando en el círculo de ganancia constante  $G_1$  que se intersecta con el círculo de ruido constante en dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , figura 5.

De estos dos puntos  $P_1$  queda dentro de la zona inestable a la frecuencia  $f_2$  por lo que solo será válido el punto  $P_2$  cuyo valor será:

$$\rho_s = 0,39 \angle 20^\circ$$

En cuanto al valor de  $\rho_L$  lo escogeremos de forma maximice la ganancia que como vimos en el apartado anterior deberá valer  $\rho_L = S_{22}^* = 0,483 \angle 42^\circ$ .

d) En primer lugar calculemos el valor del factor de reflexión de fuente  $\rho_s$  puesto que conocemos la red de entrada:

$$\rho_s = \frac{950 - 50}{950 + 50} e^{-j2\beta l} = 0,9 e^{-j4\pi l/\lambda}$$

A la frecuencia de 7 GHz la longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^9} = 0,04285 \text{ m} = 42,857 \text{ mm}$$

por lo que

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{20,143}{42,857} = 0,47$$

quedando

$$\rho_s = 0,9 \angle_{21,6}$$

Con este factor de reflexión tendremos un factor de reflexión a la salida igual a:

$$\rho_{out} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\rho_s}{1 - S_{11}\rho_s} = 1,222 \angle_{74,62^\circ}$$

que como cabía esperar presenta un factor de reflexión mayor que la unidad por lo tanto la impedancia tendrá una parte real negativa. En concreto la impedancia de salida será:

$$Z_{out} = Z_o \frac{1 + \rho_{out}}{1 - \rho_{out}} = -13,3725 + j63,8617 \Omega$$

Con la red de adaptación de la salida tendremos que convertir esta  $Z_{out}$  en un valor de  $-3Z_o$ , por lo que en primer lugar el condensador será el encargado de cancelar la parte reactiva de  $Z_{out}$ :

$$\frac{1}{\omega C} = 63,8617 \Omega$$

quedando que el valor del condensador será:

$$C = \frac{1}{\omega 63,8617} = 0,356 \text{ pF}$$

Mientras que el valor de la impedancia de la línea de  $\lambda/4$  será:

$$Z'_o = \sqrt{13,336 \cdot 3 \cdot Z_o} = 44,787 \Omega$$

# MICROONDAS

Examen enero 07

M. Baquero, F. Peñaranda y V. Boria

## 16. ENERO 07

### 16.1. PROBLEMA 1 (35 p)

Se dispone de una red A de dos accesos de la que se conoce que es pasiva, recíproca, sin pérdidas y NO simétrica, figura 1.

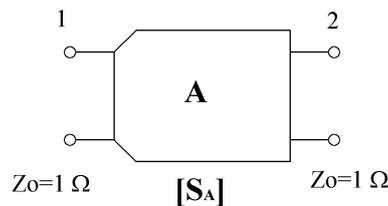


Figura 1: Red A.

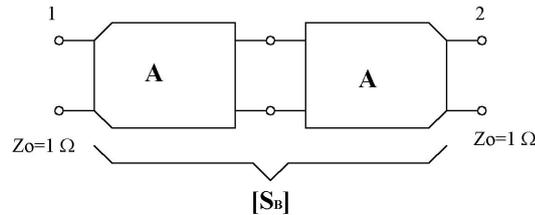


Figura 2: Red B.

No es posible medir sus parámetros de dispersión de la red A directamente, pero sí es posible medir los parámetros de la red simétrica B de dos accesos que resulta de combinar dos redes A de la forma que se indica en la figura 2.

(5 p) a.- Calcular las expresiones de los factores de reflexión que aparecen en el acceso 1 de la red A cuando el acceso 2 está en cortocircuito y en circuito abierto en función de los parámetros de dispersión de la red B.

(5 p) b.- Calcular los mismos factores de reflexión del apartado anterior pero en función de los parámetros de dispersión de la red A.

(15 p) c.- Sabiendo que la fase del parámetro  $S_{21}$  de la red A es de  $-35^\circ$  y que los parámetros de dispersión medidos de la red B son:

$$[S_B] = \begin{bmatrix} 0,5107 \angle 24,54^\circ & 0,8598 \angle -65,46^\circ \\ 0,8598 \angle -65,46^\circ & 0,5107 \angle 24,54^\circ \end{bmatrix}$$

calcular los parámetros de dispersión de la red A.

(10 p) d.- Encontrar las expresiones de las impedancias  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_3$  del circuito equivalente en T mostrado en la figura 3 en función de los parámetros de dispersión de la red A. Posteriormente particularizarlas para los valores encontrados en el apartado c (Caso de no haber resuelto el apartado c proponer una matriz de dispersión cualquiera para este cálculo, siempre que respete las características de la red A: pasiva, sin pérdidas, recíproca y no simétrica).

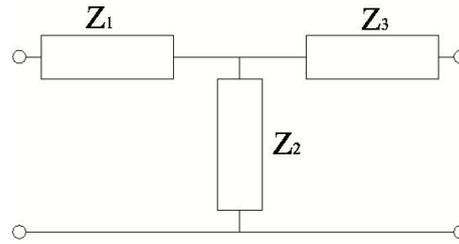


Figura 3: Circuito equivalente en T de la red A.

Datos:

Inversa de una matriz de 2x2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

a) Dada la simetría de la red B se puede calcular sus parámetros de dispersión a partir de una excitación par e impar de la forma:

$$\begin{aligned} S_{11B} &= \frac{1}{2}(\rho^e + \rho^o) \\ S_{21B} &= \frac{1}{2}(\rho^e - \rho^o) \\ S_{12B} &= S_{21B} \\ S_{22B} &= S_{11B} \end{aligned}$$

donde los factores de reflexión  $\rho^e$  y  $\rho^o$  corresponden a los casos de excitación par e impar respectivamente. Es decir  $\rho^e$  será el factor de reflexión que se verá en el acceso 1 cuando se haya sustituido el plano de simetría por una pared magnética, o lo que es lo mismo se haya impuesto condiciones de circuito abierto. En cuanto a  $\rho^o$  será lo mismo pero cuando se sustituya el plano de simetría por una pared eléctrica, es decir condiciones de cortocircuito. Estos son precisamente los factores de reflexión por los que pregunta el enunciado. Es posible despejar tanto  $\rho^e$  como  $\rho^o$  de las expresiones anteriores quedando que:

$$\begin{aligned} \rho^e &= S_{11B} + S_{21B} \\ \rho^o &= S_{11B} - S_{21B} \end{aligned}$$

b) En el caso de situar un circuito abierto en el acceso 2 se deberá cumplir que  $a_2 = b_2$  por lo que se podrá poner que:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}b_2 \\ b_2 &= S_{12}a_1 + S_{22}b_2 \end{aligned}$$

por lo que de la segunda ecuación

$$b_2 = \frac{S_{12}a_1}{1 - S_{22}}$$

y sustituyendo en la primera ecuación

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12} \frac{S_{12}a_1}{1 - S_{22}}$$

quedando que

$$\rho^e = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}^2}{1 - S_{22}}$$

En el caso de situar un cortocircuito en el acceso 2 se deberá cumplir que  $a_2 = -b_2$  por lo que se tendrá:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 - S_{12}b_2 \\ b_2 &= S_{12}a_1 - S_{22}b_2 \end{aligned}$$

por lo que de la segunda ecuación

$$b_2 = \frac{S_{12}a_1}{1 + S_{22}}$$

y sustituyendo en la primera ecuación

$$b_1 = S_{11}a_1 - S_{12} \frac{S_{12}a_1}{1 + S_{22}}$$

quedando que

$$\rho^o = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} - \frac{S_{12}^2}{1 + S_{22}}$$

Luego los factores de reflexión que piden en este apartado vendrán dados por:

$\rho^e = \frac{b_1}{a_1} = S_{11A} + \frac{S_{12A}^2}{1 - S_{22A}}$
$\rho^o = \frac{b_1}{a_1} = S_{11A} - \frac{S_{12A}^2}{1 + S_{22A}}$

c) Dado que se sabe que la red es pasiva, recíproca y sin pérdidas deberá cumplir unitariedad y por lo tanto la matriz de dispersión tendrá el siguiente aspecto:

$$[S_A] = \begin{bmatrix} |S_{11A}|e^{j\phi_{11A}} & \sqrt{1-|S_{11A}|}e^{j\phi_{12A}} \\ \sqrt{1-|S_{11A}|}e^{j\phi_{12A}} & -|S_{11A}|e^{j(2\phi_{12A}-\phi_{11A})} \end{bmatrix}$$

Se puede observar que dado que  $\phi_{12A}$  es conocido tan solo quedan dos incógnitas,  $|S_{11A}|$  y  $\phi_{11}$ .

Con las ecuaciones obtenidas en el apartado a se pueden calcular los valores de  $\rho^e$  y  $\rho^o$ :

$$\begin{aligned} \rho^e &= S_{11B} + S_{21B} = 0,8217 - j0,5700 = 1_{\angle -34,75^\circ} \\ \rho^o &= S_{11B} - S_{21B} = 0,1075 + j0,9942 = 1_{\angle 83,83^\circ} \end{aligned}$$

Llamando  $x = |S_{11A}|$  e  $y = e^{j\phi_{11A}}$  y haciendo uso de las ecuaciones obtenidas en el apartado b se podrá poner que:

$$\begin{aligned} \rho^e &= x \cdot y + \frac{(1-x^2) e^{j2\phi_{12A}}}{1 + x/y e^{j2\phi_{12A}}} \\ \rho^o &= x \cdot y - \frac{(1-x^2) e^{j2\phi_{12A}}}{1 - x/y e^{j2\phi_{12A}}} \end{aligned}$$

Expresiones que se pueden poner como

$$\begin{aligned} \rho^e &= x \cdot y + \frac{y(1-x^2) e^{j2\phi_{12A}}}{y + x e^{j2\phi_{12A}}} \\ \rho^o &= x \cdot y - \frac{y(1-x^2) e^{j2\phi_{12A}}}{y - x e^{j2\phi_{12A}}} \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \rho^e(y + x e^{j2\phi_{12A}}) &= x \cdot y(y + x e^{j2\phi_{12A}}) + y(1-x^2) e^{j2\phi_{12A}} \\ \rho^o(y - x e^{j2\phi_{12A}}) &= x \cdot y(y - x e^{j2\phi_{12A}}) - y(1-x^2) e^{j2\phi_{12A}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^e(y + x e^{j2\phi_{12A}}) &= x \cdot y^2 + x^2 y e^{j2\phi_{12A}} + y e^{j2\phi_{12A}} - y x^2 e^{j2\phi_{12A}} \\ \rho^o(y - x e^{j2\phi_{12A}}) &= x \cdot y^2 - x^2 y e^{j2\phi_{12A}} - y e^{j2\phi_{12A}} + y x^2 e^{j2\phi_{12A}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^e y + \rho^e x e^{j2\phi_{12A}} &= x \cdot y^2 + y e^{j2\phi_{12A}} \\ \rho^o y - \rho^o x e^{j2\phi_{12A}} &= x \cdot y^2 - y e^{j2\phi_{12A}} \end{aligned}$$

Despejando  $x$  en ambas ecuaciones resulta:

$$x = \frac{ye^{j2\phi_{12A}} - \rho^e y}{\rho^e e^{j2\phi_{12A}} - y^2} \quad (1)$$

$$x = \frac{ye^{j2\phi_{12A}} + \rho^o y}{\rho^o e^{j2\phi_{12A}} + y^2} \quad (2)$$

Igualando estas expresiones se obtendrá una ecuación con tan solo la incógnita  $y$ :

$$y \frac{e^{j2\phi_{12A}} - \rho^e}{\rho^e e^{j2\phi_{12A}} - y^2} = y \frac{e^{j2\phi_{12A}} + \rho^o}{\rho^o e^{j2\phi_{12A}} + y^2}$$

que se puede poner como

$$(e^{j2\phi_{12A}} - \rho^e)(\rho^o e^{j2\phi_{12A}} + y^2) = (e^{j2\phi_{12A}} + \rho^o)(\rho^e e^{j2\phi_{12A}} - y^2)$$

$$\rho^o e^{j4\phi_{12A}} + e^{j2\phi_{12A}} y^2 - \rho^e \rho^o e^{j2\phi_{12A}} - \rho^e y^2 = \rho^e e^{j4\phi_{12A}} - e^{j2\phi_{12A}} y^2 + \rho^o \rho^e e^{j2\phi_{12A}} - \rho^o y^2$$

$$y^2(e^{j2\phi_{12A}} - \rho^e + e^{j2\phi_{12A}} + \rho^o) = \rho^e e^{j4\phi_{12A}} + \rho^o \rho^e e^{j2\phi_{12A}} - \rho^o e^{j4\phi_{12A}} + \rho^e \rho^o e^{j2\phi_{12A}}$$

$$y^2(2e^{j2\phi_{12A}} - \rho^e + \rho^o) = \rho^e e^{j4\phi_{12A}} + 2\rho^o \rho^e e^{j2\phi_{12A}} - \rho^o e^{j4\phi_{12A}}$$

luego  $y^2$  vendrá dado por:

$$y^2 = \frac{(\rho^e - \rho^o)e^{j4\phi_{12A}} + 2\rho^o \rho^e e^{j2\phi_{12A}}}{2e^{j2\phi_{12A}} - (\rho^e - \rho^o)}$$

Y sustituyendo valores se obtiene

$$y^2 = -0,1736 + j0,948 = 1_{\angle 100^\circ}$$

Por lo que

$$y = e^{j\phi_{11A}} = 0,6428 + j0,76660 = 1_{\angle 50^\circ}$$

Es decir  $\phi_{11A} = 50^\circ$ . El valor de  $x$  se podrá calcular sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones (1) o (2), obteniéndose  $x = 0,31$ . Es decir  $|S_{11A}| = 0,31$  y  $|S_{12A}| = \sqrt{1 - |S_{11A}|^2} = 0,9507$ . La fase del parámetro  $S_{22A}$  será  $180^\circ + 2\phi_{12A} - \phi_{11A} = 60^\circ$ . De forma que los parámetros de dispersión de la red A serán:

$$[S_A] = \begin{bmatrix} 0,31_{\angle 50^\circ} & 0,95_{\angle -35^\circ} \\ 0,95_{\angle -35^\circ} & 0,31_{\angle 60^\circ} \end{bmatrix}$$

d) Los elementos del circuito equivalente en T guardan una relación directa con los elementos de la matriz de impedancia. Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}\bar{Z}_1 &= \bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_2 &= \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_3 &= \bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}\end{aligned}$$

Es decir resultará necesario el cálculo de la matriz de impedancia. Ésta se puede calcular a partir de la matriz de dispersión haciendo uso de la relación

$$\bar{Z} = (1 + S)(1 - S)^{-1}$$

Desarrollando esta expresión:

$$(1 + S_A) = \begin{bmatrix} 1 + S_{11A} & S_{12A} \\ S_{12A} & 1 + S_{22A} \end{bmatrix}$$

$$(1 - S_A) = \begin{bmatrix} 1 - S_{11A} & -S_{12A} \\ -S_{12A} & 1 - S_{22A} \end{bmatrix}$$

$$(1 - S_A)^{-1} = \frac{1}{\det(1 - S_A)} \begin{bmatrix} 1 - S_{22A} & S_{12A} \\ S_{12A} & 1 - S_{11A} \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z} = (1 + S)(1 - S)^{-1} = \frac{1}{\det(1 - S_A)} \begin{bmatrix} 1 + S_{11A} & S_{12A} \\ S_{12A} & 1 + S_{22A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - S_{22A} & S_{12A} \\ S_{12A} & 1 - S_{11A} \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{\det(1 - S_A)} \begin{bmatrix} (1 + S_{11A})(1 - S_{22A}) + S_{12A}^2 & S_{12A}(1 + S_{11A}) + S_{12A}(1 - S_{11A}) \\ S_{12A}(1 - S_{22A}) + S_{12A}(1 + S_{22A}) & S_{12A}^2 + (1 + S_{22A})(1 - S_{11A}) \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{\det(1 - S_A)} \begin{bmatrix} (1 + S_{11A})(1 - S_{22A}) + S_{12A}^2 & 2S_{12A} \\ 2S_{12A} & S_{12A}^2 + (1 + S_{22A})(1 - S_{11A}) \end{bmatrix}$$

con

$$\det(1 - S_A) = (1 - S_{11A})(1 - S_{22A}) - S_{12A}^2$$

De forma que las impedancias de la red equivalente en T serán:

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{12} = \frac{1}{\det(1 - S_A)} [(1 + S_{11A})(1 - S_{22A}) + S_{12A}^2 - 2S_{12A}]$$

$$\bar{Z}_2 = \bar{Z}_{12} = \frac{2S_{12A}}{\det(1 - S_A)}$$

$$\bar{Z}_3 = \bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12} = \frac{1}{\det(1 - S_A)} [S_{12A}^2 + (1 + S_{22A})(1 - S_{11A}) - 2S_{12A}]$$

Sustituyendo valores

$$\bar{Z}_1 = j \, 0,395$$

$$\bar{Z}_2 = -j \, 3,591$$

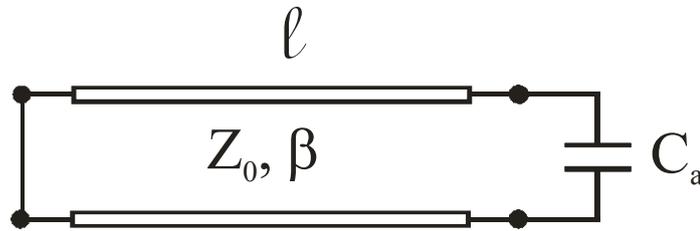
$$\bar{Z}_3 = j \, 0,5991$$

Y dado que  $Z_0 = 1 \Omega$  resultará que:

$$\begin{aligned} Z_1 &= j 0,395 \Omega \\ Z_2 &= -j 3,591 \Omega \\ Z_3 &= j 0,5991 \Omega \end{aligned}$$

## 16.2 PROBLEMA 2 (35p)

La figura 2.1 muestra un circuito resonante que deseamos analizar. La línea de transmisión, de longitud  $\ell$ , es una línea sin pérdidas. Sin embargo, el condensador de capacidad  $C_a$  sí tiene pérdidas debidas al dieléctrico que tiene en su interior. De hecho es un condensador de placas paralelas cuyo dieléctrico es  $\epsilon_r = \epsilon' - j \cdot \epsilon'' = \epsilon' \cdot (1 - j \cdot tg\delta)$ , siendo  $tg\delta \ll 1$ .



Se pide:

(7p) a) Calcule la expresión de **todas** las posibles longitudes de la línea de transmisión para que resuene una frecuencia  $f_0$  determinada en el circuito resonante anterior.

Ahora nos interesa calcular el factor de calidad de este circuito resonante, que calcularemos de dos maneras diferentes:

(14p) b) Calcule el factor de calidad  $Q$  del circuito resonante aplicando la definición del factor de calidad  $Q$ . Deje la expresión final en función únicamente de la tangente de pérdidas  $tg\delta$  del dieléctrico del condensador y de la longitud eléctrica de la línea a la frecuencia de resonancia  $\beta \cdot \ell = \phi_0$ .

Nota para el apartado *b*: Para calcular la potencia disipada en el condensador obtenga el circuito equivalente del condensador con pérdidas, que consiste en un condensador de igual capacidad en paralelo con una conductancia cuyo valor debe determinar en función de la frecuencia de resonancia  $f_0$ , la capacidad  $C_a$  y la tangente de pérdidas  $tg\delta$ .

(14p) c) Y ahora calcule el factor de calidad del circuito haciendo uso del concepto de frecuencia de resonancia compleja y las expresiones utilizadas en el apartado *a*.

Nota: Desprecie todos los infinitésimos de segundo orden y mayores

Datos:

- 1) Desarrollo en serie de Taylor de la función tangente (cuando  $x \downarrow \downarrow$ ):

$$tg(a + j \cdot x) \approx tg(a) + j \cdot \frac{x}{\cos^2(a)}$$

- 2) Relaciones trigonométricas de interés:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2 \cdot x)}{2} \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2 \cdot x)}{2}$$

3) Frecuencia de resonancia compleja:

$$\boxed{\Omega_0 = \omega_0 \cdot \left(1 + \frac{j}{2 \cdot Q}\right)}$$

a) Para calcular la longitud de la línea de transmisión en resonancia, hacemos uso de la teoría de impedancias a derecha e izquierda. La figura 2.2 muestra el circuito resonante y las impedancias a derecha e izquierda.

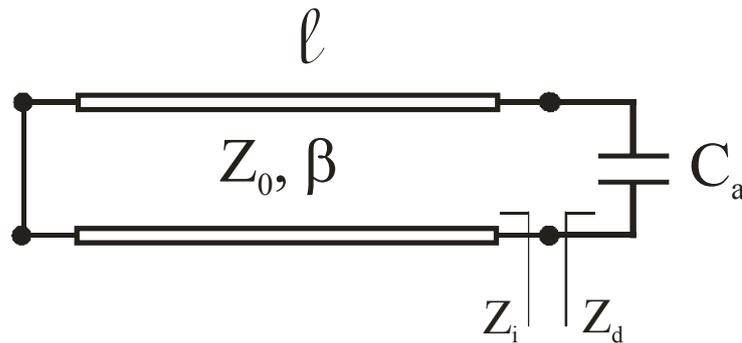


Figura 2.2.-Impedancias a derecha e izquierda

Estas impedancias son:

$$\begin{cases} Z_i = j \cdot Z_0 \cdot \tan(\beta \cdot l) \\ Z_d = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_a} \end{cases} \quad (2.1)$$

Y la resonancia se alcanza cuando se cumple una de las dos condiciones siguientes:

$$\begin{cases} Z_i + Z_d = 0 \\ Z_i, Z_d = \pm \infty \end{cases} \quad (2.2)$$

Es evidente que la segunda condición no se puede cumplir, debido al condensador, pero la primera sí, de tal forma que la resonancia se alcanza cuando:

$$Z_i + Z_d = j \cdot Z_0 \cdot \tan(\beta \cdot l) + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_a} = 0 \quad (2.3)$$

Por lo que las longitudes de la línea de transmisión han de ser:

$$l = \frac{n \cdot \pi + \arctan\left(\frac{1}{Z_0 \cdot \omega_0 \cdot C_a}\right)}{\beta_0}, \quad n = 0,1,2,\dots \quad (2.4)$$

b) Para calcular el factor de calidad a través de la definición, recordamos inicialmente su expresión:

$$Q = \omega_0 \cdot \frac{U_T}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{U_e + U_m}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot U_e}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot U_m}{P_L} \quad (2.5)$$

Donde  $\omega_0$  es la pulsación de resonancia,  $U_T$  la energía media total almacenada,  $U_e$  y  $U_m$  las energías medias eléctrica y magnética respectivamente y  $P_L$  la potencia total media disipada, todo a la frecuencia de resonancia  $f_0$ .

Para calcular la energía almacenada en la línea debemos calcular la distribución de tensión y corriente en la misma, y para ello seleccionamos los ejes y las ondas de tensión progresivas y regresivas tal y como aparecen en la figura 2.3.

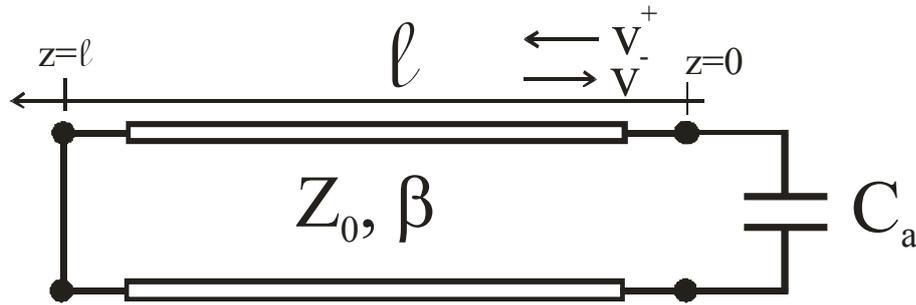


Figura 2.3.-Definición de las ondas progresivas y regresivas

De esta forma, las tensiones y corrientes en la línea son, en general:

$$\begin{aligned} V(z) &= V^+ \cdot e^{-j\beta \cdot z} + V^- \cdot e^{+j\beta \cdot z} \\ I(z) &= \frac{V^+ \cdot e^{-j\beta \cdot z} - V^- \cdot e^{+j\beta \cdot z}}{Z_0} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Puesto que en  $z=l$  hay un cortocircuito, tenemos:

$$V^- = -V^+ \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \beta \cdot l} \quad (2.7)$$

Por lo que nos queda:

$$\begin{aligned} V(z) &= -V^+ \cdot 2 \cdot j \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot l} \cdot \sin(\beta \cdot (z - l)) \\ I(z) &= \frac{V^+ \cdot 2 \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot l} \cdot \cos(\beta \cdot (z - l))}{Z_0} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nótese que en  $z=l$  tenemos  $V(l)=0$  y en  $z=0$  tenemos un impedancia:

$$\frac{V(0)}{I(0)} = j \cdot Z_0 \cdot \tan(\beta \cdot l) = Z_i \quad (2.9)$$

Así pues, la energía magnética almacenada es:

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{4} \cdot L \cdot \int_{z=0}^l |I(z)|^2 \cdot dz = \frac{1}{4} \cdot L \cdot \int_{z=0}^l 4 \cdot Y_0^2 \cdot |V^+|^2 \cdot \cos^2(\beta \cdot (z - l)) \cdot dz = \\ &= L \cdot Y_0^2 \cdot |V^+|^2 \cdot \left( \frac{l}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot l)}{4 \cdot \beta} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

La energía eléctrica, aunque no nos va a interesar puesto que caso de usarla deberíamos también calcular la energía eléctrica almacenada en el condensador, es:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{4} \cdot C \cdot \int_{z=0}^l |V(z)|^2 \cdot dz = \frac{1}{4} \cdot C \cdot \int_{z=0}^l 4 \cdot |V^+|^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot (z - l)) \cdot dz = \\ &= C \cdot |V^+|^2 \cdot \left( \frac{l}{2} - \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot l)}{4 \cdot \beta} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nótese que la autoinducción  $L$  y la capacidad  $C$  son los parámetros primarios de la línea de transmisión (autoinducción por unidad de longitud  $[H/m]$  y capacidad por unidad de longitud  $[F/m]$ ), de tal forma que están relacionados con la impedancia característica de la línea y la constante de propagación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \\ L &= \frac{Z_0 \cdot \beta}{\omega}, \quad C = \frac{\beta}{\omega \cdot Z_0} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Para la potencia disipada, puesto que sólo existe en el condensador, debemos encontrar el circuito equivalente con pérdidas que es, tal y como nos dice el enunciado, un condensador en paralelo con una admitancia. La figura 2.4 muestra el circuito.

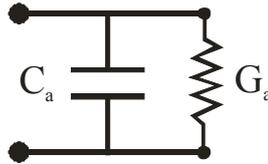


Figura 2.4.-Circuito equivalente

El valor del condensador y de la admitancia paralelo se pueden obtener de la siguiente forma. Sabemos que el condensador tiene una capacidad que es directamente proporcional a la permitividad, de tal forma que:

$$C_a = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot F_a \quad (2.13)$$

Donde  $F_a$  es un término que es función de la geometría del condensador.

La admitancia que presenta es:

$$\begin{aligned} Y_a &= j \cdot \omega \cdot C_a = j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot F_a = \\ &= j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon' - j \cdot \varepsilon'') \cdot F_a = j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon' \cdot F_a + \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon'' \cdot F_a = \\ &= j \cdot \omega \cdot C_a + \omega \cdot C_a \cdot \operatorname{tg} \delta = Y_{C_a} + G_a \end{aligned} \quad (2.14)$$

Es decir, la admitancia paralelo que tiene en cuenta las pérdidas del dieléctrico es  $G_a = \omega \cdot C_a \cdot \operatorname{tg} \delta$ .

En definitiva, la potencia disipada será:

$$P_L = \frac{1}{2} \cdot G_a \cdot |V(z=0)|^2 \quad (2.15)$$

Donde  $V(z=0)$  es la tensión de la admitancia paralelo  $G_a$ . Es decir:

$$P_L = \frac{1}{2} \cdot G_a \cdot |V(z=0)|^2 = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot C_a \cdot \operatorname{tg} \delta \cdot |V^+|^2 \cdot 4 \cdot \sin^2(\beta \cdot l) \quad (2.16)$$

Y el factor de calidad total será:

$$\begin{aligned}
Q &= \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot U_m}{P_L} = \frac{L \cdot Y_0^2 \cdot \left( \frac{l}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot l)}{4 \cdot \beta} \right)}{C_a \cdot \operatorname{tg} \delta \cdot \sin^2(\beta \cdot l)} = \left\langle \begin{array}{l} Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} \\ L = \frac{Z_0 \cdot \beta}{\omega} \end{array} \right\rangle = \\
&= \frac{\phi_0}{\omega_0 \cdot Z_0} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \phi_0)}{4 \cdot \phi_0}}{C_a \cdot \operatorname{tg} \delta \cdot \sin^2(\phi_0)} = Q = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \phi_0)}{4 \cdot \phi_0} \right)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

c) Para calcular el factor de calidad a través de la frecuencia de resonancia compleja, recordamos inicialmente la expresión de esta y su relación con el factor de calidad:

$$\Omega_0 = \omega_0 \cdot \left( 1 + \frac{j}{2 \cdot Q} \right) \tag{2.18}$$

De esta forma, deberemos usar esta expresión de la frecuencia de resonancia en la ecuación de resonancia (2.3):

$$Z_i + Z_d = j \cdot Z_0 \cdot \tan(\beta \cdot l) + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_a} = 0 \tag{2.19}$$

Así pues, sustituyendo  $\omega_0$  por  $\Omega_0$ , tenemos:

$$1 = Z_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot F_a \cdot (\varepsilon' - j \cdot \varepsilon'') \cdot \omega_0 \cdot \left( 1 + \frac{j}{2 \cdot Q} \right) \cdot \tan \left( \phi_0 \cdot \left( 1 + \frac{j}{2 \cdot Q} \right) \right) \tag{2.20}$$

Desarrollando esta ecuación, recordando el desarrollo en serie de Taylor del enunciado para la tangente, tenemos:

$$\begin{aligned}
1 &= Z_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot F_a \cdot (\varepsilon' - j \cdot \varepsilon'') \cdot \omega_0 \cdot \left( 1 + \frac{j}{2 \cdot Q} \right) \cdot \tan \left( \phi_0 \cdot \left( 1 + \frac{j}{2 \cdot Q} \right) \right) = \\
&= Z_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot F_a \cdot (\varepsilon' - j \cdot \varepsilon'') \cdot \omega_0 \cdot \left( 1 + \frac{j}{2 \cdot Q} \right) \cdot \left( \tan(\phi_0) + \frac{j}{\cos^2(\phi_0)} \cdot \frac{\phi_0}{2 \cdot Q} \right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Desarrollando más:

$$1 = Z_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot F_a \cdot \omega_0 \cdot \left( \begin{aligned} &\varepsilon' \cdot \tan(\phi_0) + \varepsilon' \cdot \frac{j \cdot \phi_0}{2 \cdot Q \cdot \cos^2(\phi_0)} - \varepsilon' \cdot \frac{j \cdot \phi_0}{4 \cdot Q^2 \cdot \cos^2(\phi_0)} + \\ &+ \varepsilon' \cdot \frac{j \cdot \tan(\phi_0)}{2 \cdot Q} - \varepsilon'' \cdot j \cdot \tan(\phi_0) + \varepsilon'' \cdot \frac{\phi_0}{2 \cdot Q \cdot \cos^2(\phi_0)} \end{aligned} \right) \quad (2.22)$$

Y puesto que en el enunciado nos indican que despreciemos todos los infinitésimos de 2º orden o mayor, despreciamos los términos siguientes:

$$\begin{aligned} \varepsilon' \cdot \frac{j \cdot \phi_0}{4 \cdot Q^2 \cdot \cos^2(\phi_0)} &\rightarrow 0 \\ \varepsilon'' \cdot \frac{\phi_0}{2 \cdot Q \cdot \cos^2(\phi_0)} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Nótese que el 2º término es un infinitésimo de 2º orden porque  $\varepsilon''$  ya es pequeño.

En definitiva nos queda:

$$1 = Z_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot F_a \cdot \omega_0 \cdot \left( \varepsilon' \cdot \tan(\phi_0) + \varepsilon' \cdot \frac{j \cdot \phi_0}{2 \cdot Q \cdot \cos^2(\phi_0)} + \varepsilon' \cdot \frac{j \cdot \tan(\phi_0)}{2 \cdot Q} - \varepsilon'' \cdot j \cdot \tan(\phi_0) \right) \quad (2.24)$$

Identificando partes reales y partes imaginarias, nos queda:

$$\begin{aligned} 1 &= Z_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot F_a \cdot \varepsilon' \cdot \omega_0 \cdot \tan(\phi_0) \\ 0 &= Z_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot F_a \cdot \omega_0 \cdot \left( \varepsilon' \cdot \frac{\phi_0}{2 \cdot Q \cdot \cos^2(\phi_0)} + \varepsilon' \cdot \frac{\tan(\phi_0)}{2 \cdot Q} - \varepsilon'' \cdot \tan(\phi_0) \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

La primera ecuación es la condición de resonancia tal y como se ha visto en la ecuación (2.3), recordando que  $C_a = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon' \cdot F_a$ :

$$1 = Z_0 \cdot C_a \cdot \omega_0 \cdot \tan(\phi_0) \quad (2.26)$$

La segunda ecuación, procedente de la parte imaginaria, nos dará el factor de calidad:

$$\begin{aligned}
0 &= Z_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot F_a \cdot \omega_0 \cdot \left( \varepsilon' \cdot \frac{\phi_0}{2 \cdot Q \cdot \cos^2(\phi_0)} + \varepsilon' \cdot \frac{\tan(\phi_0)}{2 \cdot Q} - \varepsilon'' \cdot \tan(\phi_0) \right) \\
&\quad \downarrow \\
\varepsilon' \cdot \frac{\phi_0}{2 \cdot Q \cdot \cos^2(\phi_0)} + \varepsilon' \cdot \frac{\tan(\phi_0)}{2 \cdot Q} - \varepsilon'' \cdot \tan(\phi_0) &= 0 \\
&\quad \downarrow \\
Q &= \frac{\varepsilon' \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\phi_0}{\sin(2 \cdot \phi_0)} \right)}{\varepsilon''} = \frac{1}{\tan \delta} + \frac{\phi_0}{\sin(2 \cdot \phi_0)}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Es inmediato comprobar que el factor de calidad obtenido es exactamente igual al obtenido en el apartado anterior.

### 16.3. PROBLEMA 3 (40 p)

Se pretende diseñar un amplificador de resistencia negativa, que proporcione una ganancia ( $G_T$ ) de 10 dB a la frecuencia  $f_0 = 2$  GHz. Para ello, se emplea una configuración basada en un circulator ideal (ver figura 1), cuyo sentido de giro es a derechas y su matriz de parámetros  $S$  se define en dicha figura.

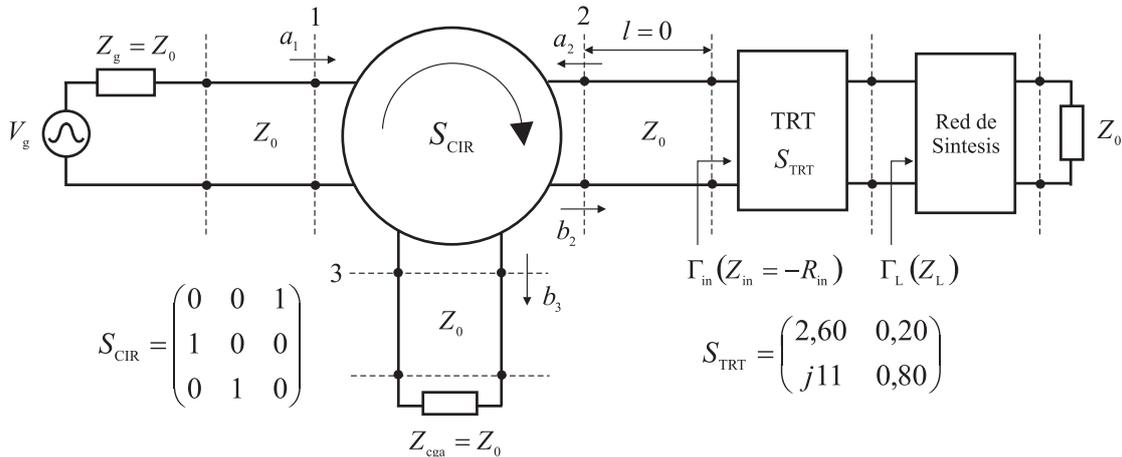


Figura 1: Amplificador de resistencia negativa basado en circulator

Para sintetizar el elemento de resistencia negativa necesario ( $-R_{in}$ ), se propone emplear un transistor cuyo acceso de salida debe cargarse con una impedancia de carga ( $Z_L$ ) adecuada, tal y como se muestra en la figura 1. En dicha figura, se incluye la matriz de parámetros  $S$  (referidos a  $Z_0 = 50 \Omega$ ) del transistor.

Se pide responder a las siguientes cuestiones (puede hacer uso también de los datos que se proporcionan al final del enunciado):

- (7 p) a.- Dibujar en la carta de Smith que se adjunta el círculo de estabilidad de carga (plano de  $\Gamma_L$ ) del transistor, e indicar la zona que produce inestabilidad en el plano de entrada ( $|\Gamma_{in}| > 1$ ). Razonar si el transistor propuesto es adecuado para implementar el amplificador de resistencia negativa.

**No olvide entregar la carta de Smith con la solución del problema.**

- (6 p) b.- Deducir la expresión de la ganancia  $G_T$  del amplificador en función del factor de reflexión en el plano de entrada del transistor ( $\Gamma_{in}$ ). Si se pretende que  $Z_{in} = -R_{in}$ , es decir que  $Z_{in}$  tenga parte imaginaria nula, indicar **todos los posibles valores** de  $R_{in}$  que permiten obtener la ganancia deseada de  $G_T = 10$  dB.

- (6 p) c.- Para cada posible solución de  $Z_{in}$  deducida en el apartado anterior, obtener el valor de la impedancia  $Z_L$  que se necesita ver en el plano de

carga del transistor. Indicar cuál de estos valores de  $Z_L$  puede sintetizarse mediante una red pasiva y sin pérdidas (como la mostrada en la figura 1), y dibujar dicho valor de  $Z_L$  en la carta de Smith a entregar.

(4 p) d.- Debido a efectos parásitos en el transistor y la red de síntesis, la impedancia que realmente se mide en el plano de entrada del transistor tiene una parte imaginaria no nula, es decir  $Z_{in} = -R_{in} - j/(C_{in} \omega)$ , con  $C_{in} = 40$  pF. Diseñar una red de sintonía, a situar en el plano de entrada del transistor, que permita compensar los citados efectos parásitos.

(7 p) e.- Si la única fuente de ruido del amplificador diseñado está asociada al transistor ( $F_{min} = 4$  dB,  $R_N = 30 \Omega$  y  $\Gamma_{opt} = 0,3 \angle_{125^\circ}$ ), determinar el factor de ruido global de dicho amplificador (para su cálculo considere presente la red de sintonía diseñada en el apartado anterior).

Datos:

- Factores de Estabilidad  $K$  y  $\mu$ :

$$K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2 |S_{12} S_{21}|} \quad \mu = \frac{1 - |S_{11}|^2}{|S_{22} - S_{11}^* \Delta| + |S_{12} S_{21}|}$$

- Círculo de estabilidad de carga ( $\Gamma_L$ ):

$$C_L = \frac{(S_{22} - \Delta S_{11}^*)^*}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} \quad R_L = \left| \frac{S_{12} S_{21}}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} \right|$$

$$\Delta = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}$$

- Coefficientes de Reflexión a la entrada y salida de un transistor:

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} \quad \Gamma_{out} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_S}{1 - S_{11} \Gamma_S}$$

- Factor de ruido de un transistor:

$$F = F_{min} + 4 r_N \frac{|\Gamma_{opt} - \Gamma_S|^2}{|1 + \Gamma_{opt}|^2 (1 - |\Gamma_S|^2)} \quad r_N = R_N / Z_0$$

- Potencia disponible del generador:

$$P_{avs} = \frac{1}{2} \frac{|b_g|^2}{(1 - |\rho_g|^2)} \quad b_g = V_g \frac{\sqrt{Z_0}}{(Z_0 + Z_g)} \quad \rho_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$$

- Relación entre ondas  $a_1$  y  $b_g$ :

$$a_1 = \frac{b_g}{1 - \rho_{i1} \rho_g} \quad \rho_{i1} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{Z_{i1} - Z_0}{Z_{i1} + Z_0}$$


---

a) Para dibujar en la carta de Smith el círculo de estabilidad de carga (plano de  $\Gamma_L$ ) solicitado, se debe calcular el centro ( $C_L$ ) y radio ( $R_L$ ) de dicho círculo empleando las expresiones proporcionadas en los datos del problema. Teniendo en cuenta los valores de los parámetros  $S$  del transistor proporcionado (ver figura 1), se obtienen los siguientes resultados:

$$\Delta = 2,08 - j 2,20 = 3,028 \angle - 46,61^\circ$$

$$C_L = 0,54 + j 0,67 = 0,86 \angle 51,15^\circ$$

$$R_L = 0,26$$

Así pues, se procede a dibujar en la carta de Smith un círculo con centro en  $C_L$  y de radio  $R_L$ , que constituye el círculo de estabilidad de carga del transistor solicitado (ver figura 2).

Con respecto a la zona (valores de  $\Gamma_L$ ) que produce inestabilidad en el plano de entrada (es decir,  $|\Gamma_{in}| > 1$ ), se comprueba que para  $\Gamma_L = 0$  (centro de la carta de Smith), se tiene que  $\Gamma_{in} = S_{11} = 2,60$  (es decir,  $|\Gamma_{in}| > 1$ ). Por tanto, el centro de la carta de Smith pertenece a la zona inestable, determinando de este modo que la zona de inestabilidad de carga del transistor es la externa al círculo ya dibujado (se señala con una curva a trazos en la figura 2).

Tal y como indica el enunciado del problema, para implementar el amplificador de resistencia negativa se debe conseguir que  $Z_{in} = -R_{in}$ , es decir  $|\Gamma_{in}| > 1$ , y por tanto inestabilidad en el plano de entrada del transistor. Se termina de concluir que el transistor propuesto presenta una amplia zona de valores de  $\Gamma_L$  que producirán la condición de inestabilidad requerida en el plano de entrada del transistor ( $|\Gamma_{in}| > 1$ ). Además, dichos valores de  $\Gamma_L$  (al tener  $|\Gamma_L| < 1$ ) son sintetizables mediante una red de síntesis y una impedancia de carga  $Z_0$ , tal y como se indica en la figura 1. Por tanto, se puede afirmar que:

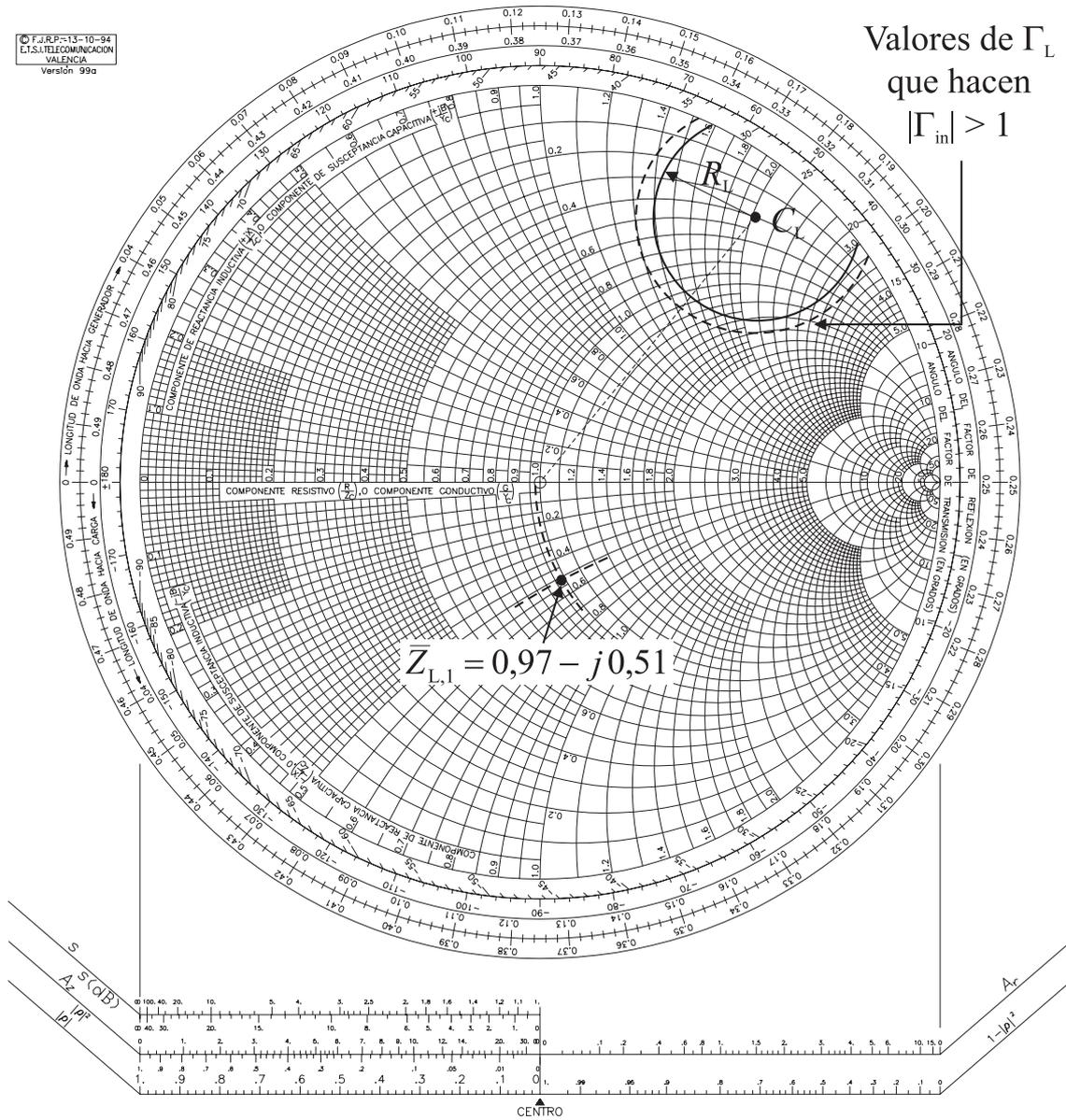
El transistor propuesto SÍ es adecuado para implementar el amplificador

CARTA DE SMITH DE IMPEDANCIAS Y ADMITANCIAS

NOMBRE	APELLIDOS	FECHA
--------	-----------	-------

F.J.R.P.-13-10-94  
E.T.S.I. TELECOMUNICACION  
VALENCIA  
Versión 95a

Valores de  $\Gamma_L$   
que hacen  
 $|\Gamma_{in}| > 1$



- |              |  |       |                           |
|--------------|--|-------|---------------------------|
| $s$          | Relación de onda estacionaria          | $Z_C$ | Impedancia característica |
| $A_z$        | Atenuación de adaptación (Return loss) | $Y_C$ | Admitancia característica |
| $\rho$       | Factor de reflexión                    | $R$   | Resistencia               |
| $A_r$        | Atenuación de reflexión                | $X$   | Reactancia                |
| $1- \rho ^2$ | Factor de transmisión                  | $G$   | Conductancia              |
|              |  | $B$   | Susceptancia              |

Figura 2: Círculo de estabilidad de carga del transistor, zona que produce inestabilidad en el plano de entrada ( $|\Gamma_{in}| > 1$ ), y valor de  $Z_L$

b) La ganancia de transferencia ( $G_T$ ) del amplificador propuesto se define como:

$$G_T = \frac{P_{\text{cga}}}{P_{\text{avs}}}$$

donde  $P_{\text{cga}}$  es la potencia que se entrega a la carga ( $Z_{\text{cga}}$ ) en la configuración de la figura 1. Como la carga está adaptada ( $Z_{\text{cga}} = Z_0$ ), se tiene que:

$$P_{\text{cga}} = \frac{1}{2} |b_3|^2$$

Teniendo en cuenta la matriz de parámetros  $S$  del circulator ideal (ver figura 1), así como que las ondas  $a_2$  y  $b_2$  se relacionan directamente en el circuito de la figura 1 a través de  $\Gamma_{\text{in}}$  ( $a_2 = \Gamma_{\text{in}} b_2$ ), se puede escribir que:

$$P_{\text{cga}} = \frac{1}{2} |b_3|^2 = \frac{1}{2} |a_2|^2 = \frac{1}{2} |\Gamma_{\text{in}}|^2 |b_2|^2 = \frac{1}{2} |\Gamma_{\text{in}}|^2 |a_1|^2$$

Por otra parte, según los datos que se proporcionan en el enunciado del problema, la potencia disponible del generador ( $P_{\text{avs}}$ ) se calcula del siguiente modo:

$$P_{\text{avs}} = \frac{1}{2} \frac{|b_g|^2}{(1 - |\rho_g|^2)} = \frac{1}{2} |b_g|^2$$

pues el generador en este caso (ver figura 1) está adaptado ( $Z_g = Z_0$ ) y por tanto se tiene que  $\rho_g = 0$ . Haciendo uso de la relación entre las ondas  $a_1$  y  $b_g$  que también se incluye en los datos del problema, se puede escribir que:

$$a_1 = \frac{b_g}{1 - \rho_{i1} \rho_g} = b_g$$

donde nuevamente se ha hecho uso de que el generador en nuestro problema se encuentra adaptado ( $\rho_g = 0$ ). Así pues, la potencia disponible del generador se expresa finalmente en este caso como:

$$P_{\text{avs}} = \frac{1}{2} |a_1|^2$$

Sustituyendo en la definición de  $G_T$  esta última expresión para  $P_{\text{avs}}$ , así como la ecuación deducida previamente para  $P_{\text{cga}}$  en términos de  $\Gamma_{\text{in}}$  y de  $a_1$ , se concluye finalmente que:

$$\boxed{G_T = |\Gamma_{\text{in}}|^2}$$

A partir de esta expresión, y teniendo en cuenta que se pretende obtener una ganancia  $G_T = 10$  dB, se deduce que:

$$G_T = 10 \text{ dB} = 10 \log (|\Gamma_{\text{in}}|^2) = 20 \log (|\Gamma_{\text{in}}|) \Rightarrow |\Gamma_{\text{in}}| = 3,162$$

En el enunciado del problema se indica que se pretende que  $Z_{\text{in}} = -R_{\text{in}}$ , es decir que  $Z_{\text{in}}$  sea real (y tenga por tanto parte imaginaria nula). De este modo, el factor de reflexión  $\Gamma_{\text{in}}$  asociado a dicha impedancia, que se define como:

$$\Gamma_{\text{in}} = \frac{Z_{\text{in}} - Z_0}{Z_{\text{in}} + Z_0}$$

también será un número real (con parte imaginaria nula). Por tanto, serán posibles soluciones del coeficiente de reflexión  $\Gamma_{\text{in}}$ :

$$\Gamma_{\text{in},1} = 3,162 \quad \Gamma_{\text{in},2} = -3,162$$

De la definición anterior del factor de reflexión  $\Gamma_{\text{in}}$ , se deduce fácilmente la siguiente expresión para la impedancia buscada  $Z_{\text{in}}$ :

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{\text{in}}}{1 - \Gamma_{\text{in}}}$$

Sustituyendo en esta última expresión los posibles valores de  $\Gamma_{\text{in}}$  deducidos previamente, así como  $Z_0 = 50 \Omega$ , se obtiene que:

$$Z_{\text{in},1} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{\text{in},1}}{1 - \Gamma_{\text{in},1}} = -96,25 \Omega$$

$$Z_{\text{in},2} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{\text{in},2}}{1 - \Gamma_{\text{in},2}} = -25,97 \Omega$$

y por tanto, se concluye que los posibles valores de  $R_{\text{in}}$  ( $Z_{\text{in}} = -R_{\text{in}}$ ) que permiten obtener la ganancia deseada de  $G_T = 10$  dB son:

$$\boxed{R_{\text{in},1} = 96,25 \Omega \quad R_{\text{in},2} = 25,97 \Omega}$$

c) Como indica el enunciado, para sintetizar las posibles soluciones de  $Z_{\text{in}}$  deducidas en el apartado anterior, se debe cargar adecuadamente (con  $Z_L$ ) el acceso de salida del transistor (ver figura 1). Los posibles valores de  $\Gamma_L$  ( $Z_L$ ) se relacionan con  $\Gamma_{\text{in}}$  mediante la siguiente expresión (ver datos del enunciado):

$$\Gamma_{\text{in}} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

de la cual se puede despejar fácilmente que:

$$\Gamma_L = \frac{(S_{11} - \Gamma_{\text{in}})}{(\Delta - S_{22} \Gamma_{\text{in}})} \quad \text{con} \quad \Delta = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}$$

Así pues, para el primer posible valor de  $\Gamma_{\text{in}}$  deducido anteriormente ( $\Gamma_{\text{in},1}$ ), se obtiene la siguiente solución:

$$\Gamma_{\text{in},1} = 3,162 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{L,1} = 0,0502 - j0,2453 = 0,25 \angle -78,44^\circ$$

Teniendo en cuenta que la impedancia de carga  $Z_L$  se relaciona con el factor de reflexión  $\Gamma_L$  como sigue:

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \quad \text{con } Z_0 = 50 \Omega$$

se concluye que el valor de  $Z_L$  que se necesita en el plano de carga del transistor para sintetizar  $Z_{in,1}$  es:

$$Z_{L,1} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{L,1}}{1 - \Gamma_{L,1}} = 48,70 - j 25,49 (\Omega)$$

Para el segundo posible valor de  $\Gamma_{in}$  deducido previamente ( $\Gamma_{in,2}$ ), se obtiene la siguiente solución:

$$\Gamma_{in,2} = -3,162 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{L,2} = 1,0181 + j 0,4895 = 1,13 \angle 25,51^\circ$$

concluyendo que el valor de  $Z_L$  necesario en el plano de carga del transistor para sintetizar  $Z_{in,2}$  es:

$$Z_{L,2} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{L,2}}{1 - \Gamma_{L,2}} = -57,66 - j 205,52 (\Omega)$$

De las dos soluciones obtenidas para  $Z_L$ , sólo la primera de ellas (es decir,  $Z_{L,1}$ ) puede sintetizarse mediante una red pasiva y sin pérdidas terminada en una impedancia de carga de valor  $Z_0$  (tal y como se indica en la figura 1). La segunda solución ( $Z_{L,2}$ ) tiene una parte real negativa ( $|\Gamma_{L,2}| > 1$ ), y por tanto no puede sintetizarse como se indica en el enunciado del problema. Así pues:

El valor de  $Z_{L,1}$  SÍ puede sintetizarse mediante la red descrita en el problema

Para representar en la carta de Smith el valor de la impedancia  $Z_{L,1}$ , que sí puede sintetizarse con la red pasiva y sin pérdidas, se debe normalizar en primer lugar dicho valor con respecto a la impedancia característica de referencia ( $Z_0 = 50 \Omega$ ):

$$\bar{Z}_{L,1} = \frac{Z_{L,1}}{Z_0} = \frac{48,70 - j 25,49}{50} = 0,97 - j 0,51$$

En la figura 2 se representa  $\bar{Z}_{L,1}$  en la carta de Smith. Se observa que dicho valor pertenece a la zona que produce inestabilidad en el plano de entrada del transistor (en este caso concreto se tendrá  $\Gamma_{in,1} = 3,162$ , y por tanto  $|\Gamma_{in,1}| > 1$ ).

d) Tal y como indica el enunciado del problema, debido a efectos parásitos en el transistor y la red de síntesis, la impedancia que realmente se tiene en el plano de entrada del transistor es  $Z_{in} = -R_{in} - j/(C_{in} \omega)$ , que corresponde a la configuración circuital recogida en la figura 3.

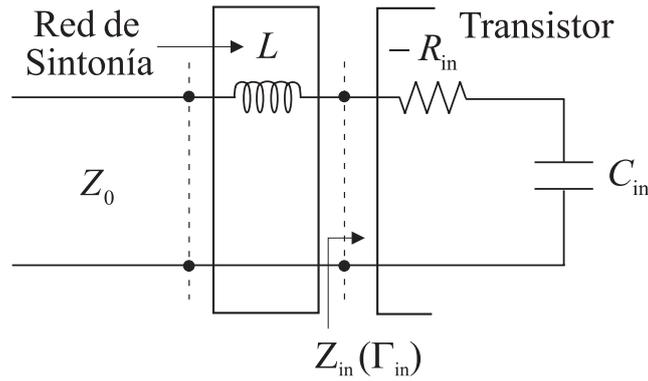


Figura 3: Red de sintonía a situar en el plano de entrada del transistor

En el problema que nos ocupa, como sólo puede sintetizarse el valor de  $Z_{L,1}$  (ver apartado anterior), el valor de  $R_{in}$  en el circuito descrito será  $R_{in,1} = 96,25 \Omega$ . Por otra parte, el valor de  $C_{in}$  se proporciona en el enunciado del problema, y en este caso es igual a  $40 \text{ pF}$ .

La red de sintonía solicitada debe ser capaz de compensar la parte imaginaria de la impedancia de entrada ( $Z_{in}$ ) debida a efectos parásitos. Para ello, la solución más sencilla consiste en situar una simple bobina (con un valor de  $L$  adecuado) en serie con la impedancia de entrada recién descrita (ver figura 3).

El valor de la bobina ( $L$ ) debe ser tal que compense el efecto del condensador ( $C_{in}$ ) a la frecuencia de trabajo  $f_0 = 2 \text{ GHz}$ , es decir:

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C_{in}} = \frac{1}{(2\pi \cdot 2 \cdot 10^9)^2 \cdot 40 \cdot 10^{-12}} = 1,5831 \cdot 10^{-10} \text{ H} = 158,31 \text{ pH}$$

e) Como el enunciado indica que la única fuente de ruido está asociada al transistor, el factor de ruido global del amplificador se puede calcular haciendo uso de la expresión proporcionada en los datos del enunciado:

$$F = F_{\min} + 4r_N \frac{|\Gamma_{\text{opt}} - \Gamma_S|^2}{|1 + \Gamma_{\text{opt}}|^2 (1 - |\Gamma_S|^2)} \quad r_N = R_N/Z_0$$

donde  $F_{\min}$  se expresa en lineal ( $F_{\min} = 4 \text{ dB} = 2,512$ ),  $R_N = 30 \Omega$ ,  $Z_0 = 50 \Omega$  y  $\Gamma_{\text{opt}} = 0,3 \angle 125^\circ = -0,172 + j0,246$ .

Por su parte,  $\Gamma_S$  representa el factor de reflexión de fuente que ve el transistor desde su plano de entrada, que en este caso es el asociado a la impedancia de fuente ( $Z_S$ ) considerando presente la red de sintonía diseñada en el anterior apartado (ver figura 4).

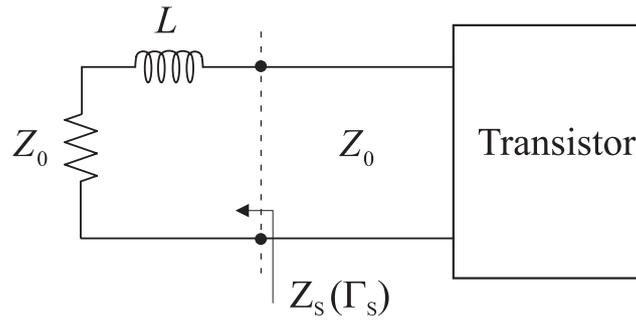


Figura 4: Impedancia de fuente vista en el plano de entrada del transistor

Así pues, se tiene para la impedancia de fuente  $Z_S$  que:

$$Z_S = Z_0 + j L \omega_0 = 50 + j 158,31 \cdot 10^{-12} 2 \pi 2 \cdot 10^9 = 50 + j 1,989 (\Omega)$$

y por tanto:

$$\Gamma_S = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} = 0,0004 + j 0,0199 = 0,0199 \angle 88,86^\circ$$

Sustituyendo todos estos datos en la expresión anterior para el factor de ruido  $F$ , se obtiene finalmente que:

$$F = 2,512 + 4 \frac{30}{50} \frac{(0,2843)^2}{(0,8638)^2 [1 - (0,0199)^2]} = 2,7721 = 4,43 \text{ dB}$$

# MICROONDAS

Examen abril 06

M. Baquero, F. Peñaranda y V.E. Boria

## 15. ABRIL 06

### 15.1. PROBLEMA 1 (40 p)

En la figura 1 se muestra un divisor de potencia de Bailey no balanceado, que permite repartir de forma desigual la potencia de entrada en el acceso 1 ( $P_1$ ) entre los accesos 2 ( $P_2$ ) y 3 ( $P_3$ ) debidamente terminados (es decir, cargados respectivamente con  $Z_0$ ).

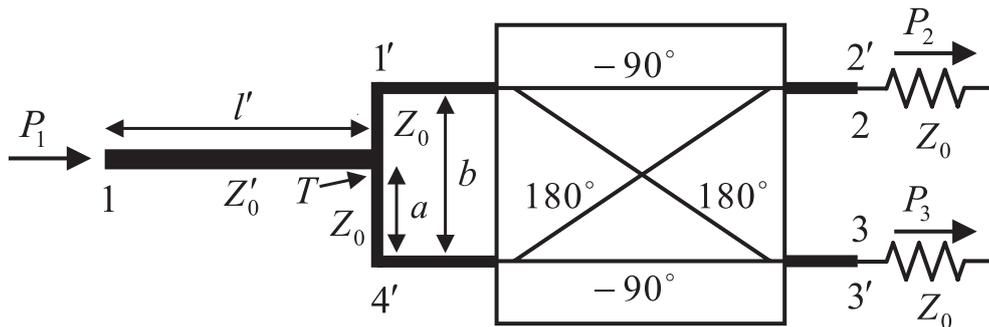


Figura 1: Divisor de potencia de Bailey no balanceado

Este divisor consta de un híbrido de  $90^\circ$ , cuyos accesos  $1'$  y  $4'$  se conectan entre sí mediante una línea de transmisión de impedancia característica  $Z_0$  y longitud física  $b$ . El acceso de entrada 1 del divisor se conecta, mediante una línea de transmisión de impedancia característica  $Z_0'$  y longitud física  $l'$ , en un punto  $T$  de la línea de transmisión que une los accesos  $1'$  y  $4'$ . Dicho punto dista una longitud  $a$  del acceso  $4'$ , y variando dicha longitud (posición del punto  $T$ ) es posible controlar el reparto desigual de  $P_1$  entre los accesos 2 ( $P_2$ ) y 3 ( $P_3$ ).

Se pide responder a las siguientes cuestiones:

(4 p) a.- A la vista de la representación equivalente del híbrido ideal de  $90^\circ$  mostrada en la figura 1, y sabiendo que el parámetro  $S_{2'1'}$  de dicha red es igual a  $-j/\sqrt{2}$ , indicar los valores de todos los parámetros  $S$  del híbrido. Considere líneas de impedancia característica  $Z_0$  en los 4 accesos ( $1'$  a  $4'$ ) de esta red.

(10 p) b.- Deducir los valores que debieran tener la longitud  $l'$  e impedancia característica  $Z_0'$  de la línea que une el acceso 1 y el punto  $T$  para que el acceso de entrada del divisor esté adaptado (es decir,  $S_{11} = 0$ ). Considere líneas de impedancia característica  $Z_0$  en los 3 accesos (1 a 3) del divisor.

Para resolver los siguientes dos apartados, asumir que el acceso de entrada del divisor está adaptado ( $S_{11} = 0$ ).

**(18 p) c.-** Demostrar que las potencias que se entregan en los accesos 2 ( $P_2$ ) y 3 ( $P_3$ ) se relacionan con la potencia de entrada  $P_1$  del siguiente modo:

$$P_2 = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sen}(\beta b - 2\beta a)] P_1 \quad P_3 = \frac{1}{2} [1 - \operatorname{sen}(\beta b - 2\beta a)] P_1$$

donde  $\beta$  es la constante de propagación de la línea de impedancia característica  $Z_0$  y longitud física  $b$  que une los accesos 1' y 4' del híbrido.

**(8 p) d.-** Si se escoge una longitud  $b$  igual a  $\lambda/4$ , deducir las nuevas expresiones de  $P_2$  y  $P_3$  en función de  $P_1$ . Encontrar los valores de  $P_1$  y de la longitud  $a$  que se necesitan para que  $P_2 = 0,25$  W y  $P_3 = 0,50$  W.

Nota.- Para resolver los apartados c) y d) puede hacerse uso de las siguientes relaciones trigonométricas

■ Relaciones Trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$1 + \cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha$$

$$1 - \cos(2\alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

a) Un híbrido ideal de  $90^\circ$ , como el mostrado en la figura 1, es un acoplador direccional con acoplamiento ( $C$ ) de valor 3 dB, es decir

$$C(\text{dB}) = -20 \log(|S_{3'1'}|) \quad \implies \quad |S_{3'1'}| = |S_{2'1'}| = 1/\sqrt{2}$$

A su vez, como en el enunciado del problema se indica que  $S_{2'1'} = -j/\sqrt{2}$ , se concluye que el valor de  $-90^\circ$  presente en la representación equivalente del híbrido (ver figura 1) es el término de fase  $-j$  del citado parámetro S del circuito. Así pues, se puede afirmar que:

$$S_{3'1'} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tratarse de un acoplador direccional, se sabe que  $S_{1'1'} = 0$  y  $S_{4'1'} = 0$ . Por tanto, la matriz de parámetros  $S$  del híbrido, considerando líneas de impedancia característica  $Z_0$  en los 4 accesos, es la siguiente:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -j & -1 & 0 \\ -j & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -j \\ 0 & -1 & -j & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & j & 1 & 0 \\ j & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & j & 0 \end{pmatrix}$$

b) Para obtener el parámetro  $S_{11}$  del divisor, los accesos 2 y 3 del mismo deben cargarse, respectivamente, con la impedancia característica  $Z_0$ , tal y como se muestra en la figura 1.

Con el objeto de determinar los valores de  $Z'_0$  y  $l'$ , se debe calcular la impedancia que se ve en el punto  $T$  de la línea de transmisión que une los accesos 1' y 4' del híbrido de 90°. Una vez obtenida dicha impedancia  $Z_T$ , se debe resolver el problema de adaptación que se recoge en la figura 2.

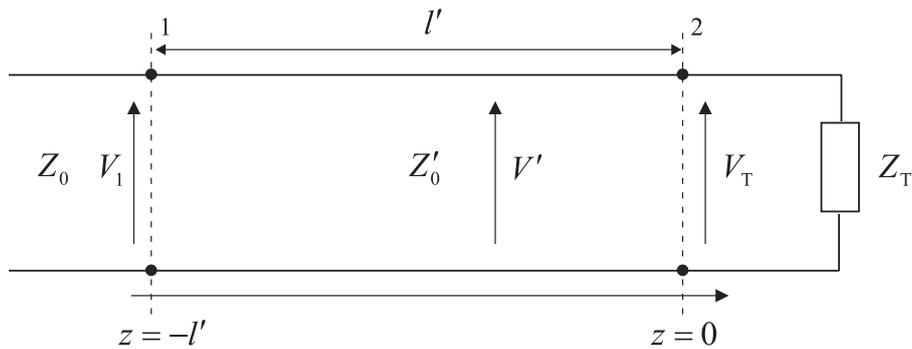


Figura 2: Problema de adaptación para obtener  $Z'_0$  y  $l'$

La impedancia  $Z_T$  consiste en la combinación en paralelo de las impedancias que se ven, respectivamente, a la entrada de las líneas de transmisión que unen el punto  $T$  con los accesos 1' ( $Z_{T1'}$ ) y 4' ( $Z_{T4'}$ ) del híbrido de 90° (ver figura 3).

Tal y como puede observarse en la figura 3, para determinar las impedancias  $Z_{T1'}$  y  $Z_{T4'}$  es necesario calcular en primer lugar los valores de las impedancias  $Z_{1'}$  y  $Z_{4'}$  (ver figura 3), que son las impedancias de entrada en los accesos 1' y 4' del híbrido de 90° cuando los accesos 2' y 3' están cargados con  $Z_0$ . Así pues, se tiene que:

$$Z_{1'} = Z_0 \frac{1 + \rho_{1'}}{1 - \rho_{1'}} \quad ; \quad \rho_{1'} = \frac{b_{1'}}{a_{1'}}$$

$$Z_{4'} = Z_0 \frac{1 + \rho_{4'}}{1 - \rho_{4'}} \quad ; \quad \rho_{4'} = \frac{b_{4'}}{a_{4'}}$$

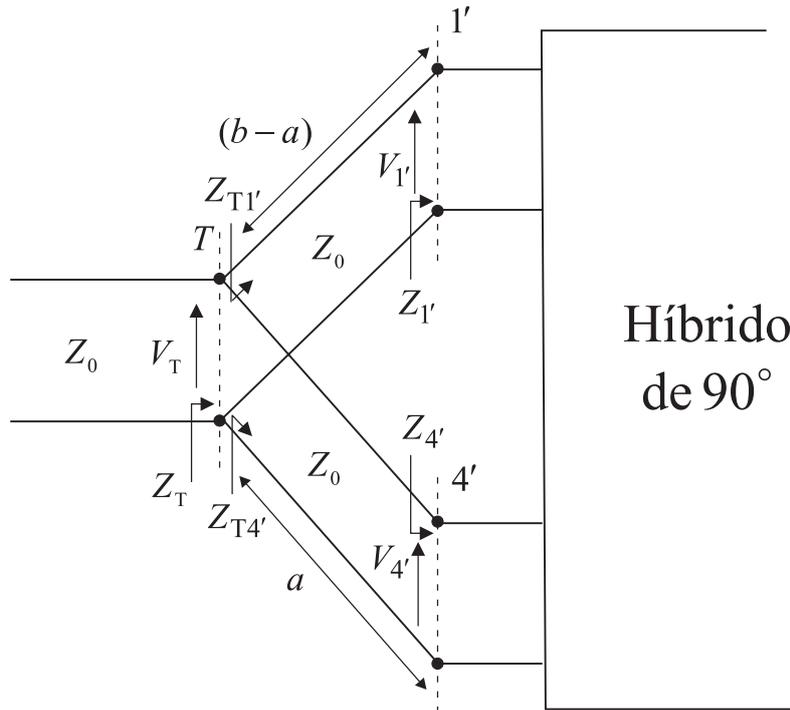


Figura 3: Problema a resolver para el cálculo de  $Z_T$

Como los accesos  $2'$  y  $3'$  del híbrido de  $90^\circ$  están terminados (es decir están cargados con  $Z_0$ , y por tanto  $a_{2'} = a_{3'} = 0$ ), se tiene que:

$$\begin{pmatrix} b_{1'} \\ b_{2'} \\ b_{3'} \\ b_{4'} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & j & 1 & 0 \\ j & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1'} \\ 0 \\ 0 \\ a_{4'} \end{pmatrix}$$

de donde se deduce fácilmente que:

$$b_{1'} = 0 \quad ; \quad b_{4'} = 0$$

y por tanto se puede concluir:

$$\rho_{1'} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{1'} = Z_0$$

$$\rho_{4'} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{4'} = Z_0$$

Así pues, las líneas de longitud  $(b-a)$  y  $a$ , e impedancias características  $Z_0$ , están también terminadas (es decir, cargadas con  $Z_0$ ), y por tanto:

$$Z_{T1'} = Z_0 \quad ; \quad Z_{T4'} = Z_0$$

En consecuencia, se deduce el siguiente valor para  $Z_T$ :

$$Z_T = (Z_{T1'} // Z_{T4'}) = (Z_0 // Z_0) = Z_0/2$$

A la vista del resultado anterior, se observa que  $Z_T$  es una impedancia de valor real, concretamente igual a  $Z_0/2$ . Para adaptar dicha impedancia real a la impedancia de entrada del divisor (también real y de valor  $Z_0$ ), se necesita un simple transformador en  $\lambda/4$ . Es decir, la línea que une el acceso 1 del divisor y el punto  $T$  debe tener la siguiente longitud e impedancia característica:

$$\begin{array}{c} l' = \lambda/4 \\ Z'_0 = \sqrt{Z_T Z_0} = Z_0/\sqrt{2} \end{array}$$

c) Como los accesos 2 y 3 del divisor están terminados, las potencias que se entregan en los accesos 2 ( $P_2$ ) y 3 ( $P_3$ ) se calculan, respectivamente, haciendo uso de las siguientes expresiones:

$$P_2 = \frac{1}{2} |b_2|^2 \quad ; \quad P_3 = \frac{1}{2} |b_3|^2$$

y como el acceso 1 del divisor se ha adaptado en el apartado anterior ( $S_{11} = 0$  y  $b_1 = 0$ ), la potencia de entrada del divisor ( $P_1$ ) se expresa como sigue:

$$P_1 = \frac{1}{2} |a_1|^2$$

Así pues,  $P_2$  y  $P_3$  se pueden expresar en función de  $P_1$  a través de los parámetros  $S_{21}$  y  $S_{31}$ . Es decir:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2} |b_2|^2 = \frac{1}{2} |S_{21}|^2 |a_1|^2 = |S_{21}|^2 P_1 \\ P_3 &= \frac{1}{2} |b_3|^2 = \frac{1}{2} |S_{31}|^2 |a_1|^2 = |S_{31}|^2 P_1 \end{aligned}$$

Por tanto, para resolver este apartado se deben deducir las expresiones de los parámetros  $S_{21}$  y  $S_{31}$  del divisor planteado. Para calcular dichos parámetros se hará uso de la configuración circuital descrita en la figura 1.

Inicialmente, se debe relacionar la tensión en el acceso de entrada del divisor ( $V_1$ ) con la tensión que hay en el punto  $T$  ( $V_T$ ). Para ello, fijándonos en la figura 2, se puede afirmar que:

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{Z_0} a_1 = V'(z = -l') = V'^+ e^{j\pi/2} + V'^- e^{-j\pi/2} = jV'^+ (1 - \Gamma_T) \\ V_T &= V'(z = 0) = V'^+ + V'^- = V'^+ (1 + \Gamma_T) \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_T$  (haciendo uso del valor de  $Z_T$  deducido en el apartado anterior) presenta el siguiente valor:

$$\Gamma_T = \frac{Z_T - Z'_0}{Z_T + Z'_0} = \frac{Z_0/2 - Z_0/\sqrt{2}}{Z_0/2 + Z_0/\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

Por tanto, la relación buscada entre  $V_T$  y  $V_1$  es la siguiente:

$$\frac{V_T}{V_1} = \frac{V'^+(1 + \Gamma_T)}{jV'^+(1 - \Gamma_T)} = -j \frac{1 + \Gamma_T}{1 - \Gamma_T} = -j/\sqrt{2}$$

y teniendo en cuenta que  $V_1 = \sqrt{Z_0} a_1$ , se obtiene:

$$V_T = -j \frac{1}{\sqrt{2}} V_1 = -j \sqrt{\frac{Z_0}{2}} a_1$$

Una vez se ha expresado  $V_T$  en función de  $a_1$ , se pueden deducir expresiones similares para las tensiones  $V_{1'}$  y  $V_{4'}$ , pues las líneas de longitudes  $(b-a)$  y  $a$  tienen ambas impedancias características de valor  $Z_0$  y están cargadas, respectivamente, con  $Z_{1'} = Z_0$  y  $Z_{4'} = Z_0$  (ver apartado anterior). Así pues, teniendo en cuenta que sólo hay onda incidente en cada una de dichas líneas:

$$V_T = V_{1'} e^{-j\beta(-b+a)} \Rightarrow V_{1'} = V_T e^{-j\beta(b-a)} = -j \sqrt{\frac{Z_0}{2}} e^{-j\beta(b-a)} a_1$$

$$V_T = V_{4'} e^{-j\beta(-a)} \Rightarrow V_{4'} = V_T e^{-j\beta a} = -j \sqrt{\frac{Z_0}{2}} e^{-j\beta a} a_1$$

Así pues, las ondas de tensión normalizada entrantes en los accesos 1' y 4' del híbrido de 90° presentan el siguiente aspecto:

$$a_{1'} = \frac{V_{1'}}{\sqrt{Z_0}} = -j \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\beta(b-a)} a_1$$

$$a_{4'} = \frac{V_{4'}}{\sqrt{Z_0}} = -j \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\beta a} a_1$$

Ahora, teniendo en cuenta la matriz de parámetros  $S$  del híbrido de 90° deducida en el primer apartado, se puede escribir que:

$$\begin{pmatrix} b_{1'} \\ b_{2'} \\ b_{3'} \\ b_{4'} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & j & 1 & 0 \\ j & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1'} \\ 0 \\ 0 \\ a_{4'} \end{pmatrix}$$

y deducir por tanto las siguientes expresiones para las ondas  $b_2$  y  $b_3$  buscadas:

$$b_2 = b_{2'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (j a_{1'} + a_{4'})$$

$$b_3 = b_{3'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1'} + j a_{4'})$$

Recordando las expresiones de  $a_{1'}$  y  $a_{4'}$  en función de  $a_1$  deducidas previamente, se puede escribir que:

$$b_2 = -\frac{1}{2} (e^{-j\beta(b-a)} - j e^{-j\beta a}) a_1$$

$$b_3 = -\frac{1}{2} (-j e^{-j\beta(b-a)} + e^{-j\beta a}) a_1$$

y, en consecuencia, se concluye que los parámetros  $S_{21}$  y  $S_{31}$  buscados presentan el siguiente aspecto:

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = -\frac{1}{2} [\cos(\beta b - \beta a) - \operatorname{sen}\beta a - j \operatorname{sen}(\beta b - \beta a) - j \cos\beta a]$$

$$S_{31} = \frac{b_3}{a_1} = -\frac{1}{2} [\cos\beta a - \operatorname{sen}(\beta b - \beta a) - j \operatorname{sen}\beta a - j \cos(\beta b - \beta a)]$$

Tal y como se dedujo al comienzo de este apartado, para obtener las relaciones buscadas entre  $P_2$  y  $P_3$  con  $P_1$  nos hace falta obtener los valores de  $|S_{21}|^2$  y de  $|S_{31}|^2$ , que de acuerdo con las expresiones previas son los siguientes:

$$\begin{aligned} |S_{21}|^2 &= \frac{1}{4} [(\cos(\beta b - \beta a) - \operatorname{sen}\beta a)^2 + (\operatorname{sen}(\beta b - \beta a) + \cos\beta a)^2] = \\ &\frac{1}{4} [2 + 2 \operatorname{sen}(\beta b - \beta a) \cos\beta a - 2 \cos(\beta b - \beta a) \operatorname{sen}\beta a] = \\ &\frac{1}{2} [1 + \operatorname{sen}(\beta b - 2\beta a)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S_{31}|^2 &= \frac{1}{4} [(\cos\beta a - \operatorname{sen}(\beta b - \beta a))^2 + (\operatorname{sen}\beta a + \cos(\beta b - \beta a))^2] = \\ &\frac{1}{4} [2 - 2 \operatorname{sen}(\beta b - \beta a) \cos\beta a + 2 \cos(\beta b - \beta a) \operatorname{sen}\beta a] = \\ &\frac{1}{2} [1 - \operatorname{sen}(\beta b - 2\beta a)] \end{aligned}$$

Por tanto, se demuestra finalmente que:

$$\begin{aligned} P_2 &= |S_{21}|^2 P_1 = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sen}(\beta b - 2\beta a)] P_1 \\ P_3 &= |S_{31}|^2 P_1 = \frac{1}{2} [1 - \operatorname{sen}(\beta b - 2\beta a)] P_1 \end{aligned}$$

d) Si se escoge una longitud  $b$  igual a  $\lambda/4$ , se tiene que:

$$\beta b = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

y por tanto se puede escribir:

$$\operatorname{sen}(\beta b - 2\beta a) = \operatorname{sen}(\pi/2 - 2\beta a) = \cos 2\beta a$$

De este modo, las relaciones entre  $P_2$  y  $P_3$  con  $P_1$  se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2} [1 + \cos 2\beta a] P_1 = \cos^2 \beta a P_1 \\ P_3 &= \frac{1}{2} [1 - \cos 2\beta a] P_1 = \operatorname{sen}^2 \beta a P_1 \end{aligned}$$

El enunciado del problema pide calcular  $P_1$  y  $a$  para que  $P_2 = 0,25$  W y  $P_3 = 0,50$  W. Sustituyendo estos datos en las dos ecuaciones anteriores, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 0,25 \text{ W} &= \cos^2 \beta a P_1 \\ 0,50 \text{ W} &= \operatorname{sen}^2 \beta a P_1 \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores se obtiene fácilmente que:

$$(0,25 + 0,50) \text{ W} = (\cos^2 \beta a + \operatorname{sen}^2 \beta a) P_1 = P_1$$

de donde se concluye que el valor de  $P_1$  necesario será:

$$P_1 = 0,75 \text{ W}$$

Sustituyendo el valor recién deducido para  $P_1$  en la primera de las dos ecuaciones deducidas previamente, se despeja que:

$$\cos^2 \beta a = \frac{0,25}{0,75} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \beta a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta a = \frac{2\pi}{\lambda} a = 0,9553$$

y se concluye que el valor de la longitud  $a$  debe ser:

$$a = 0,152 \lambda$$

## 15.2 PROBLEMA 2 (40p)

Como complemento del filtro paso banda del examen de enero de 2006, se desea ahora construir un filtro paso bajo.

Los datos de diseño del filtro son que la banda de paso, con rizado de  $r=0.5$  dB, llegará hasta  $f_1=2.0$  GHz, mientras que la banda eliminada empieza en  $f_a=2.8$  GHz con una atenuación en la banda eliminada  $L_A=20$  dB.

Para este filtro, se pide:

(5p) a) Determine el orden del filtro paso bajo, así como los valores de las bobinas y condensadores **desnormalizados** y en el dominio de la frecuencia  $\omega$  y no en el dominio transformado  $\omega'$ , del filtro paso bajo con elementos concentrados, eligiendo la síntesis que empieza con una bobina. La impedancia de referencia  $Z_0$  es  $Z_0=50 \Omega$ .

Este filtro se va a sintetizar mediante saltos de impedancia y sobre un cable coaxial de diferentes radios para realizar las diferentes impedancias que constituyen el filtro paso bajo con saltos de impedancia. La impedancia grande será  $Z_{0M}=115 \Omega$  y la pequeña es  $Z_{0m}=15 \Omega$ .

Asimismo, se sabe que el cable de referencia de  $Z_0=50 \Omega$  está formado por una conductor exterior de radio  $b=2$  mm y un conductor interior de radio  $r=a$  y un dieléctrico de permitividad  $\epsilon_r$  tales que la impedancia sea  $Z_0=50 \Omega$  y la constante de atenuación por pérdidas debidas al conductor sean mínimas.

Según esto, se pide:

(10p) b) Calcule la expresión de la constante de atenuación  $\alpha_c$  por pérdidas debidas al conductor en este coaxial, sabiendo que los campos eléctricos y magnéticos del modo T.E.M. que vamos a considerar son los indicados en la sección de datos. Con este resultado calcule el radio  $a$  del conductor interior del coaxial de impedancia  $Z_0=50 \Omega$  así como la permitividad del dieléctrico que hay en su interior.

(10) c) Para terminar con el diseño del filtro paso bajo en coaxial, calcule las longitudes de las líneas de alta y baja impedancia ( $Z_{0M}$  y  $Z_{0m}$ ) que sintetizan el filtro paso bajo y dibuje un esquema de cómo quedaría el filtro paso bajo construido con una guía coaxial. Calcule también los radios que tendrán los tramos coaxiales de alta y baja impedancia.

Por último, se plantea la posibilidad de que este filtro paso bajo sea construido con una guía rectangular de diferentes anchuras para sintetizar así diferentes impedancias, utilizando el modo fundamental.

Para este caso, se pide:

(5p) d) Sabiendo que el modo fundamental es el T.E.<sub>10</sub>, determine el ancho de la guía  $a$  para que la frecuencia de corte sea  $f_c=1.5$  GHz, y calcule la impedancia de este modo cuando la guía está vacía y las impedancias altas y bajas cuando la guía tiene un anchura  $0.9 \cdot a$  y  $1.1 \cdot a$ .

(10p) e) Por último, razone brevemente cuál de los dos filtros paso bajo espera que se comporte mejor y por qué.

Datos:

1) Ecuación de cambio de variable: 
$$\omega' = \frac{\omega}{\omega_1}$$

2) Campos transversales a partir de las componentes axiales:

$$\vec{E}_t = \frac{-j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \nabla_t \times (H_z \cdot \hat{z}) - \gamma \cdot \nabla_t E_z}{k^2 + \gamma^2} ; \quad \vec{H}_t = \frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \nabla_t \times (E_z \cdot \hat{z}) - \gamma \cdot \nabla_t H_z}{k^2 + \gamma^2}$$

3) Campos eléctrico y magnético para el modo T.E.M. en una guía coaxial ( $a$  es el radio del conductor interior y  $b$  el radio del conductor exterior):

$$E_r = \frac{1}{r \cdot \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} ; \quad H_\phi = \frac{1}{r \cdot \eta \cdot \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} ; \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}} = 120 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

4) Impedancia característica de un coaxial:  $Z_0 = \frac{\eta}{2 \cdot \pi} \cdot \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)$

5) El mínimo de la función  $f(x) = \frac{1+x}{\text{Ln}(x)}$  es  $x = 3.5911$

6) Coeficientes de la síntesis de filtros por Chebychev para rizado  $r=0.5$  dB

n	g <sub>1</sub>	g <sub>2</sub>	g <sub>3</sub>	g <sub>4</sub>	g <sub>5</sub>	g <sub>6</sub>	g <sub>7</sub>	g <sub>8</sub>	g <sub>9</sub>
1	0.6986	1.0000							
2	1.4029	0.7071	1.9841						
3	1.5963	1.0967	1.5963	1.0000					
4	1.6703	1.1926	2.3661	0.8419	1.9841				
5	1.7058	1.2296	2.5408	1.2296	1.7058	1.0000			
6	1.7254	1.2479	2.6064	1.3137	2.4758	0.8696	1.9841		
7	1.7373	1.2582	2.6383	1.3443	2.6383	1.2582	1.7373	1.0000	
8	1.7451	1.2647	2.6564	1.3590	2.6964	1.3389	2.5093	0.8796	1.9841

7) Curva de atenuaciones para filtro de Chebychev de rizado  $r=0.5$  dB

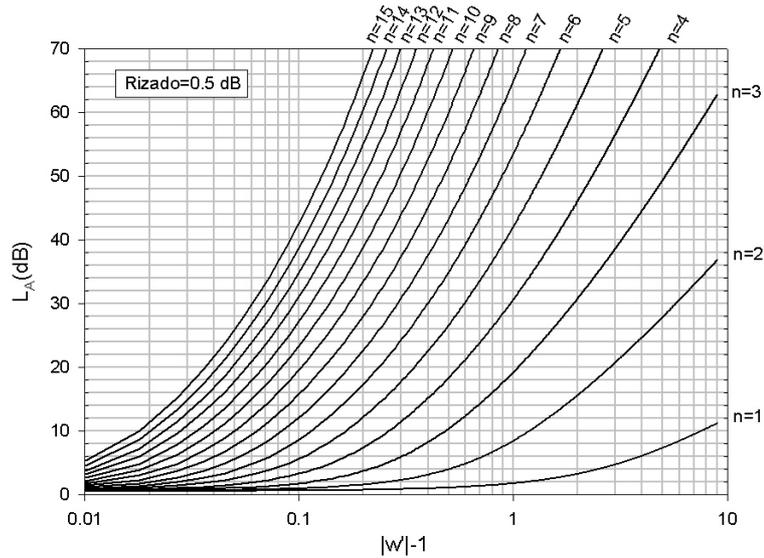


Figura 2.1.-Curvas de atenuación

a) El primer paso consiste en obtener los parámetros de la máscara del prototipo paso bajo en el dominio transformado. Sabemos que la ecuación de transformación es  $\omega' = \frac{\omega}{\omega_1}$ , por lo que la máscara del filtro paso bajo en el dominio transformado tendrá como banda de paso  $\omega'_1 = \frac{\omega_1}{\omega_1} = 1$ , donde la atenuación será con un rizado máximo de  $r=0.5$  dB, y la banda eliminada empezará en  $\omega'_a = \frac{\omega_a}{\omega_1} = 1.4$ , donde deberemos tener una atenuación de al menos  $L_a=20$  dB.

Con este valor de banda eliminada nos vamos a las curvas de atenuación del filtro de Chebychev de rizado  $r=0.5$  dB (figura 2.1) y seleccionamos el orden, como se observa en la siguiente figura.

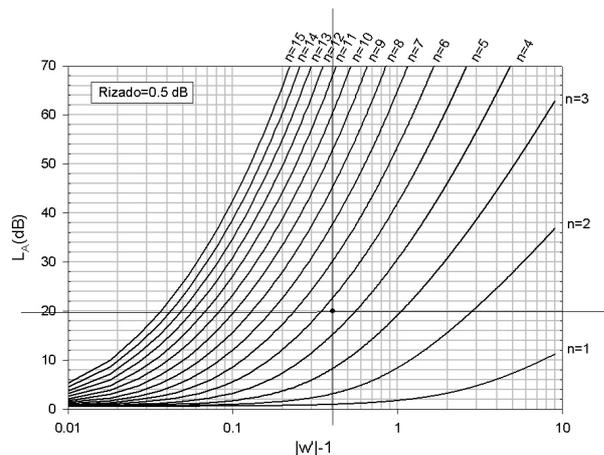


Figura 2.2.-Curvas de atenuación

Por lo tanto, el orden del filtro será  $n=5$ , y los coeficientes del prototipo paso bajo serán:

$g_0$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$
1.0000	1.7058	1.2296	2.5408	1.2296	1.7058	1.0000

Con estos coeficientes, sabemos que el prototipo paso bajo tendrá el siguiente aspecto con elementos concentrados y en el dominio transformado:

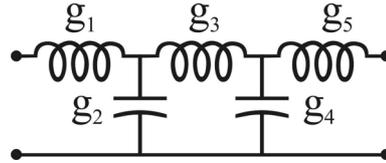


Figura 2.3.-Filtro paso bajo en el dominio transformado

Este mismo esquema será el del filtro paso bajo en el dominio frecuencial, pero deshaciendo la transformación de frecuencias, de tal forma que las bobinas y los condensadores tienen los siguientes valores normalizados:

$$\begin{cases} g_i \cdot \omega' = g_i \cdot \frac{\omega}{\omega_1} = \bar{L}_i \cdot \omega \Rightarrow \bar{L}_i = \frac{g_i}{\omega_1} \\ g_i \cdot \omega' = g_i \cdot \frac{\omega}{\omega_1} = \bar{C}_i \cdot \omega \Rightarrow \bar{C}_i = \frac{g_i}{\omega_1} \end{cases} \quad (2.1)$$

El esquema del filtro paso bajo es:

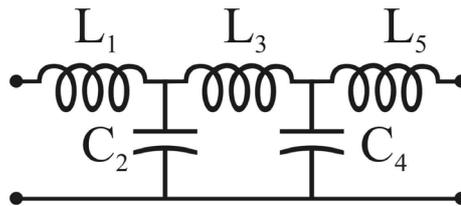


Figura 2.4.-Filtro paso bajo en el dominio real

Los valores numéricos de las bobinas y condensadores son:

$$\begin{cases} \bar{L}_i = \frac{g_i}{\omega_1} \Rightarrow \begin{cases} \bar{L}_1 = 0.1357 \cdot 10^{-9} = \bar{L}_5 \\ \bar{L}_3 = 0.9758 \cdot 10^{-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = Z_0 \cdot \bar{L}_1 = 6.7872 \text{ nH} = L_5 \\ L_3 = Z_0 \cdot \bar{L}_3 = 10.1095 \text{ nH} \end{cases} \\ \bar{C}_i = \frac{g_i}{\omega_1} \Rightarrow \begin{cases} \bar{C}_2 = 0.9785 \cdot 10^{-9} = \bar{C}_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = Y_0 \cdot \bar{C}_2 = 1.9570 \text{ pF} = C_4 \end{cases} \end{cases} \quad (2.2)$$

A modo de curiosidad, la respuesta de este filtro es:

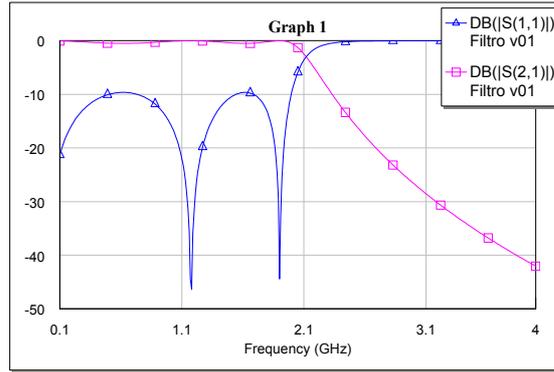


Figura 2.5.-Respuesta del filtro paso bajo

b) En este apartado se nos pide que calculemos la constante de atenuación  $\alpha_c$  por pérdidas debidas al conductor del coaxial.

Sabemos, por la teoría de bajas pérdidas, que esta constante tiene el siguiente valor, en función de las potencias transmitidas y disipadas en el conductor:

$$\alpha_c = \frac{P_{Lc}}{2 \cdot P_T} \tag{2.3}$$

La potencia transmitida para el coaxial será:

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \left( \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} \right) = \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \left( \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{r=b} E_r \cdot H_\varphi \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \right) = \\ &= \frac{\pi}{\eta} \cdot \frac{1}{\text{Ln} \left( \frac{b}{a} \right)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por otra parte, la potencia disipada en los conductores, tanto el interior como el exterior, es:

$$\begin{aligned} P_{Lc} &= \frac{R_s}{2} \cdot \oint_C |\vec{J}_s|^2 \cdot dl = \frac{R_s}{2} \cdot \oint_C |H_\varphi|^2 \cdot dl = \\ &= \frac{R_s}{2} \cdot \left[ \int_{\varphi=0}^{2\pi} |H_\varphi(r=a)|^2 \cdot a \cdot d\varphi + \int_{\varphi=0}^{2\pi} |H_\varphi(r=b)|^2 \cdot b \cdot d\varphi \right] = \\ &= \frac{\pi \cdot R_s}{\left( \eta \cdot \text{Ln} \left( \frac{b}{a} \right) \right)^2} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde  $R_s$  es la impedancia de superficie, definida, a partir de la profundidad de penetración  $\delta$  y de la conductividad del conductor  $\sigma$ , como:

$$R_s = \frac{1}{\sigma \cdot \delta} = \sqrt{\frac{\pi \cdot f \cdot \mu}{\sigma}} \quad (2.6)$$

Por lo tanto, la constante de atenuación es:

$$\alpha_c = \frac{P_{Lc}}{2 \cdot P_T} = \frac{R_s}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1 + \frac{b}{a}}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (2.7)$$

Nótese que esta expresión es formalmente igual a la ecuación  $f(x)$  que se nos da como dato número 4, y de la cual conocemos el mínimo si hacemos que  $x=b/a$ . Como el radio exterior del coaxial es conocido, inmediatamente sabemos el valor del radio del conductor interior:

$$x_{\min} = 3.5911 = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{x_{\min}} = \frac{2}{3.5911} = 0.5569 \text{ mm} \quad (2.8)$$

Y como la impedancia característica deseada es  $Z_0=50 \Omega$ , a partir del dato 4 tenemos:

$$Z_0 = \frac{\eta}{2 \cdot \pi} \cdot \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \epsilon_r = 2.3536 \quad (2.9)$$

c) Para sintetizar el filtro paso bajo con saltos de impedancia se nos pide que calculemos las longitudes de las líneas de alta y baja impedancia.

Sabemos que para sintetizar las bobinas en serie debemos hacer uso de líneas de alta impedancia, de tal forma que la impedancia serie toma el siguiente valor en función de la impedancia característica (alta impedancia), la constante de propagación y la longitud de la línea:

$$X = L \cdot \omega = Z_{0M} \cdot \beta \cdot l \quad (2.10)$$

Y, de la misma forma, para sintetizar los condensadores en paralelo podemos utilizar líneas cortas de baja impedancia, de tal forma que la admitancia paralelo es, en función de la impedancia característica (baja impedancia) y la longitud eléctrica:

$$B = C \cdot \omega = \frac{\beta \cdot l}{Z_{0m}} \quad (2.11)$$

Como las bobinas y los condensadores del filtro son conocidos, podemos escribir las expresiones anteriores como sigue:

$$\begin{cases} X_i = L_i \cdot \omega = Z_{0M} \cdot \beta \cdot l_i = \frac{g_i}{\omega_1} \cdot Z_0 \cdot \omega \Rightarrow l_i = \frac{g_i}{\omega_1} \cdot \frac{Z_0}{Z_{0M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \\ B_i = C_i \cdot \omega = \frac{\beta \cdot l_i}{Z_{0m}} = \frac{g_i}{\omega_1} \cdot Y_0 \cdot \omega \Rightarrow l_i = \frac{g_i}{\omega_1} \cdot \frac{Z_{0m}}{Z_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \end{cases} \quad (2.12)$$

Sustituyendo valores, las longitudes eléctricas son:

$$\begin{cases} \beta \cdot l_i = g_i \cdot \frac{Z_0}{Z_{0M}} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 0.7417 \text{ rad} = 42.4935^\circ = \theta_5 \\ \theta_3 = 0.3689 \text{ rad} = 63.2944^\circ \end{cases} \\ \beta \cdot l_i = g_i \cdot \frac{Z_{0m}}{Z_0} \Rightarrow \begin{cases} \theta_2 = 0.3689 \text{ rad} = 21.1353^\circ = \theta_4 \end{cases} \end{cases} \quad (2.13)$$

Y las longitudes físicas:

$$\begin{cases} l_i = \frac{g_i}{\omega_1} \cdot \frac{Z_0}{Z_{0M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 11.5410 \text{ mm} = l_5 \\ l_3 = 17.1904 \text{ mm} \end{cases} \\ l_i = \frac{g_i}{\omega_1} \cdot \frac{Z_{0m}}{Z_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}} \Rightarrow \begin{cases} l_2 = 5.7402 \text{ mm} = l_4 \end{cases} \end{cases} \quad (2.14)$$

Además, los radios de los coaxiales de alta y baja impedancia serán, a partir de la ecuación de la impedancia característica:

$$\begin{cases} Z_{0M} = \frac{\eta}{2 \cdot \pi} \cdot \text{Ln} \left( \frac{b}{a_M} \right) \Rightarrow a_M = 0.1057 \text{ mm} \\ Z_{0m} = \frac{\eta}{2 \cdot \pi} \cdot \text{Ln} \left( \frac{b}{a_m} \right) \Rightarrow a_m = 1.3629 \text{ mm} \end{cases} \quad (2.15)$$

El esquema del filtro quedaría como sigue:

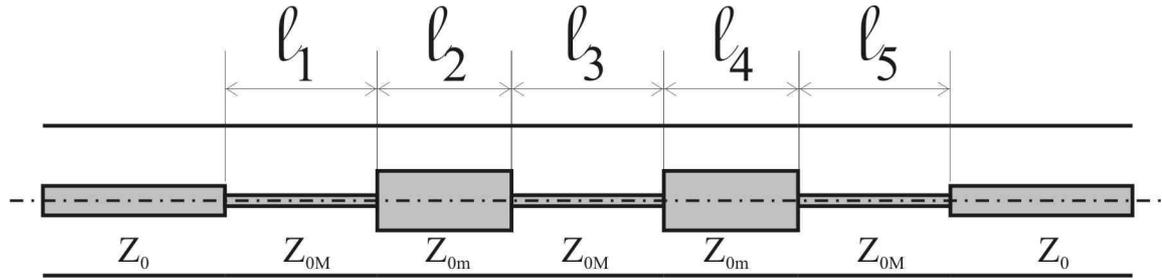


Figura 2.6.-Esquema del filtro paso bajo con coaxiales

Y la respuesta del filtro, a modo de curiosidad, con líneas ideales y con el coaxial, es:

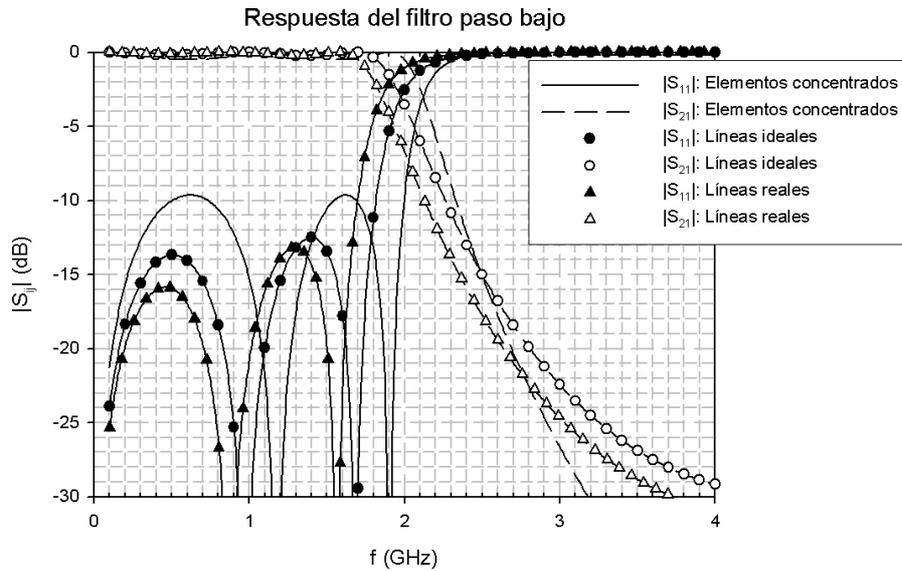


Figura 2.7.-Respuesta del filtro paso bajo con elementos concentrados, con líneas ideales y con el coaxial real

d) Como sabemos que el modo a considerar es el T.E.<sub>10</sub>, y el número de onda de corte para los modos T.E.<sub>mn</sub> es:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2 = k^2 + \gamma^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon + \gamma^2 \quad (2.16)$$

Y como la frecuencia de corte es aquella a la cual la constante de propagación se anula, tenemos:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2 = (2 \cdot \pi \cdot f_c)^2 \cdot \mu \cdot \epsilon \quad (2.17)$$

Para el modo fundamental,  $m=1$  y  $n=0$ , por lo que:

$$f_c = \frac{1}{2 \cdot a \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \tag{2.18}$$

Y de aquí es inmediato calcular el ancho de la guía para una frecuencia de corte dada. En este caso, para  $f_c=1.5 \text{ GHz}$ :

$$a = \frac{1}{2 \cdot f_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = 10 \text{ cm} \tag{2.19}$$

Asimismo, la impedancia de los modos T.E.<sub>mm</sub> es:

$$Z_{T.E.} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\gamma} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\sqrt{k_c^2 - k^2}} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{2.20}$$

Por lo que para los tres casos que se nos plantean, es decir cuando  $a=10 \text{ cm}$ ,  $a_1=0.9 \cdot a$  y  $a_2=1.1 \cdot a$ , tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{T.E.}|_{a=10 \text{ cm}} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - (2 \cdot \pi \cdot f_1)^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon}} = 569.957 \ \Omega \\ Z_{T.E.}|_{a=0.9 \cdot 10 \text{ cm}} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{0.9 \cdot a}\right)^2 - (2 \cdot \pi \cdot f_1)^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon}} = 515.352 \ \Omega \\ Z_{T.E.}|_{a=1.1 \cdot 10 \text{ cm}} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{1.1 \cdot a}\right)^2 - (2 \cdot \pi \cdot f_1)^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon}} = 682.003 \ \Omega \end{array} \right. \tag{2.21}$$

e) Por último, nos preguntan cuál de los dos filtros paso bajo esperamos que tenga un mejor comportamiento, el realizado con coaxiales o el realizado con guía rectangular.

Es evidente que el realizado con guía rectangular no sirve en absoluto para realizar un filtro paso bajo, ya que sabemos que los modos superiores, modos T.E. y modos T.M. son modos que sólo se pueden propagar a partir de una determinada frecuencia, llamada frecuencia de corte, por lo que no sirven para la síntesis de filtros paso bajo.

### 15.3. PROBLEMA 3 (40 p)

Se dispone de un amplificador con una etapa, figura 1, trabajando a la frecuencia de  $f = 10 \text{ GHz}$ . El transistor utilizado presenta a dicha frecuencia los siguientes parámetros de dispersión respecto a  $Z_0 = 50 \Omega$ :

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,7 \angle 163^\circ & 0,05 \angle 146^\circ \\ 2,9 \angle 122^\circ & 0,84 \angle 109^\circ \end{bmatrix}$$

Los parámetros de ruido del transistor a  $10 \text{ GHz}$  son:

$$F_{min} = 2 \quad ; \quad r_n = 0,74 \quad ; \quad \rho_{opt} = 0,8 \angle -130^\circ$$

Se sabe que presenta una ganancia unilateral de  $G = 13,5 \text{ dB}$ , un factor de ruido igual a  $4,7 \text{ dB}$  y que la impedancia de carga es  $Z_L = 30 - j36 \Omega$ .

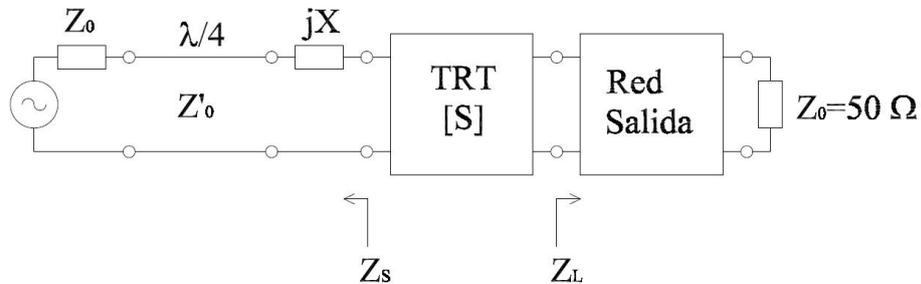


Figura 1: Amplificador de una etapa con TRT.

- (12 p) a.- Dibujar en la carta de Smith los círculos de estabilidad y sombrear las zonas inestables de entrada y salida. Comprobar si  $\rho_L$  está en zona estable o no.
- (15 p) b.- Calcular que ganancia  $G_1$  asociada a la red de entrada aparece, y dibujar su círculo de ganancia constante.
- (5 p) c.- Dibujar el círculo de ruido constante  $F = 4,7 \text{ dB}$ .
- (8 p) d.- Calcular el valor de  $\rho_S$ , y los valores  $Z'_0$  y  $X$  de la red de entrada de la figura 1 que sintetizan este factor de reflexión.

Datos:

Círculo de estabilidad de salida (o de carga):

$$C_L = \frac{(S_{22} - \Delta S_{11}^*)^*}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2}$$

$$r_L = \left| \frac{S_{12}S_{21}}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} \right|$$

Círculo de estabilidad de entrada (o de fuente):

$$C_S = \frac{(S_{11} - \Delta S_{22}^*)^*}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2}$$

$$r_S = \left| \frac{S_{12}S_{21}}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} \right|$$

Círculo de ganancia constante  $G_1$ :

$$C_1 = \frac{G_1 S_{11}^*}{1 + G_1 |S_{11}|^2}$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 - G_1(1 - |S_{11}|^2)}}{1 + G_1 |S_{11}|^2}$$

Círculo de ganancia constante  $G_2$ :

$$C_2 = \frac{G_2 S_{22}^*}{1 + G_2 |S_{22}|^2}$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{1 - G_2(1 - |S_{22}|^2)}}{1 + G_2 |S_{22}|^2}$$

Factor de ruido:

$$F = F_{min} + 4r_n \frac{|\rho_{opt} - \rho_S|^2}{(1 - |\rho_S|^2)|1 + \rho_{opt}|^2}$$

Círculo de ruido constante:

$$C_F = \frac{\rho_{opt}}{N + 1}$$

$$r_F = \frac{1}{1 + N} \sqrt{N(N + 1 - |\rho_{opt}|^2)}$$

Factor de estabilidad:

$$K = \frac{1 + |\Delta|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2|S_{12}S_{21}|}$$

con

$$N = \frac{F - F_{min}}{4r_n} |1 + \rho_{opt}|^2$$

Ganancia de transferencia:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \frac{|S_{21}|^2(1 - |\rho_S|^2)(1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - \rho_S S_{11})(1 - \rho_L S_{22}) - S_{21}S_{12}\rho_S\rho_L|^2}$$

a) El centro del círculo de estabilidad de salida vendrá dado por:

$$C_L = \frac{(S_{22} - \Delta S_{11}^*)^*}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2}$$

Donde  $\Delta$  es el determinante de la matriz de dispersión que vendrá dada por:

$$\Delta = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} = 0,7 \angle_{166^\circ} 0,84 \angle_{109^\circ} - 0,05 \angle_{146^\circ} 2,9 \angle_{122^\circ} = 0,4435 \angle_{-86,69^\circ}$$

Por lo que el centro del círculo de estabilidad de salida valdrá:

$$C_L = \frac{0,5297 \angle_{-108,23^\circ}}{0,5089} = 1,0408 \angle_{-108,23^\circ} = -0,3257 - j0,9885$$

En cuanto al radio del círculo de estabilidad de salida vendrá dado por:

$$r_L = \left| \frac{S_{12}S_{21}}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} \right| = 0,2848$$

Para el círculo de estabilidad de entrada repetiríamos lo mismo:

$$C_S = \frac{(S_{11} - \Delta S_{22}^*)^*}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} = \frac{0,3277 \angle_{-161,51^\circ}}{0,2933} = 1,1171 \angle_{-161,51^\circ} = -1,0595 - j0,3542$$

En cuanto al radio del círculo de entrada valdrá:

$$r_S = \left| \frac{S_{12}S_{21}}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} \right| = 0,4943$$

Dado que tanto  $|S_{11}|$  como  $|S_{22}|$  son menores que la unidad, los centros de la carta de Smith estarán en la zona estable. Las figuras 2 y 3 muestran en forma sombreada las zonas inestables.

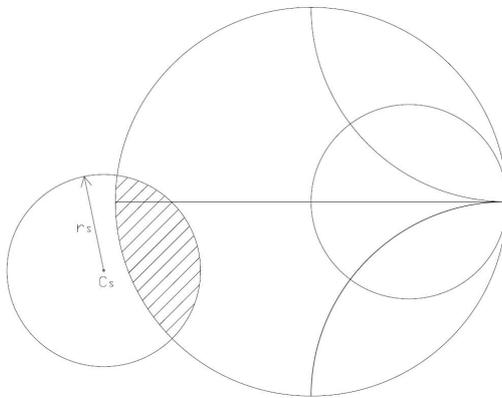


Figura 2: Estabilidad de entrada

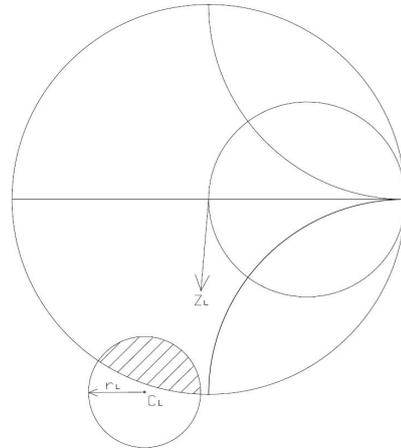


Figura 3: Estabilidad de salida

Como  $Z_L$  es dato se puede ubicar directamente en la carta de Smith mediante los círculos de impedancia constante ( $\bar{Z}_L = 0,6 - j0,72$ ) o calculando  $\rho_L$  mediante:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -0,0395 - j0,4678 = 0,4694 \angle_{-94,83}$$

Colocando este valor de  $\rho_L$  en la carta de Smith se observa que está situado en zona estable, figura 3.

b) La ganancia de transferencia unilateral vendrá dada por:

$$G_{TU} = G_T(S_{12} = 0) = \frac{1 - |\rho_S|^2}{|1 - \rho_S S_{11}|^2} |S_{21}|^2 \frac{1 - |\rho_L|^2}{|1 - \rho_L S_{22}|^2} = G_1 \cdot G_o \cdot G_2$$

La ganancia  $G_2$  se puede calcular dado que  $\rho_L$  es conocida:

$$G_2 = \frac{1 - |\rho_L|^2}{|1 - \rho_L S_{22}|^2} = \frac{1 - 0,47^2}{|1 - 0,47 \angle_{-95^\circ} 0,84 \angle_{109^\circ}|^2} = \frac{0,7791}{0,3897} = 1,9947$$

La ganancia de transferencia unilateral en lineal es conocida y viene dada por:

$$G_{TU} = 10^{13,5/10} = 22,3872$$

Por lo que  $G_1$  valdrá:

$$G_1 = \frac{G_{tu}}{|S_{21}|^2 G_2} = \frac{22,3872}{2,9^2 \cdot 1,9947} = 1,3345$$

Que en  $dB$  será:

$$G_1(dB) = 10 \log G_1 = 1,2532 \text{ dB}$$

Una vez conocida la ganancia se pueden calcular tanto el centro como el radio del círculo de ganancia constante mediante sus expresiones correspondientes:

$$C_1 = \frac{G_1 S_{11}^*}{1 + G_1 |S_{11}|^2} = \frac{1,3345 \cdot 0,7 \angle_{-163^\circ}}{1 + 1,3345 \cdot 0,7^2} = -0,5401 - j0,1651 = 0,5648 \angle_{-163^\circ}$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 - G_1(1 - |S_{11}|^2)}}{1 + G_1 |S_{11}|^2} = \frac{\sqrt{1 - 1,3345(1 - 0,7^2)}}{1 + 1,3345 \cdot 0,7^2} = 0,3417$$

Con estos valores el círculo de ganancia constante quedará como se muestra en la figura 4.

c) En primer lugar se calcula el factor de ruido en lineal:

$$F = 10^{F(dB)/10} = 10^{4,7/10} = 2,9512$$

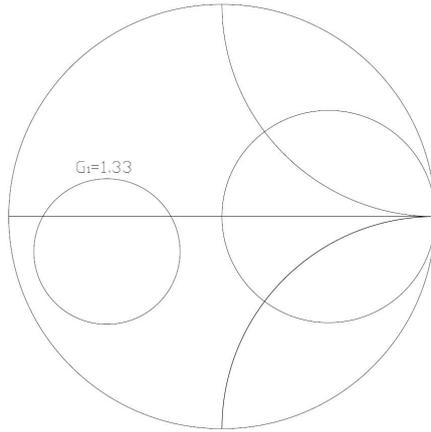


Figura 4: Círculo ganancia constante  
 $G_1 = 1,3345$

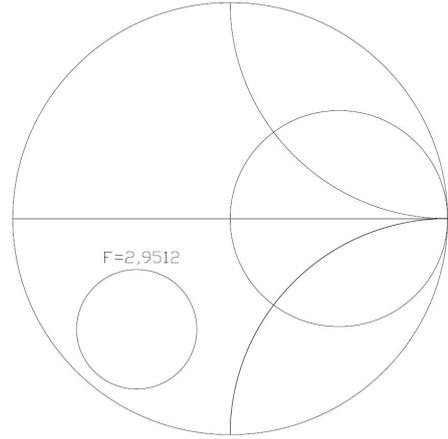


Figura 5: Círculo de ruido constante  
 $F = 2,9512$

Con esta valor se calcula el factor  $N$ :

$$N = \frac{F - F_{min}}{4r_n} |1 + \rho_{opt}|^2 = \frac{2,9512 - 2}{4 \cdot 0,74} |1 + 0,8 \angle_{-130^\circ}|^2 = 0,1965$$

Y a su vez se calculan el centro y el radio del círculo de ruido como:

$$C_F = \frac{\rho_{opt}}{N + 1} = \frac{0,8 \angle_{-130^\circ}}{1,1965} = -0,4298 - j0,5122 = 0,6686 \angle_{-130^\circ}$$

$$r_F = \frac{1}{1 + N} \sqrt{N(N + 1 - |\rho_{opt}|^2)} = \frac{0,3307}{1,1965} = 0,2764$$

Con estos valores el círculo de ruido constante quedará como se muestra en la figura 5.

d) Para buscar el valor de  $\rho_S$  se buscan los puntos de cruce de las circunferencias de ganancia constante  $G_1 = 1,3345$  y de ruido constante  $F = 2,9512$ , obteniéndose dos soluciones posibles, figura 6.

De las dos soluciones solo una está en zona estable, de ahí que este sea el único valor de  $\rho_S$  posible. De la carta de Smith se puede leer que aproximadamente este valor vale  $\rho_S = 0,44 \angle_{-126^\circ}$ . Por lo que la impedancia  $Z_S$  deberá valer:

$$Z_S = Z_0 \frac{1 + \rho_S}{1 - \rho_S} = 23,5672 - j20,8065 \Omega$$

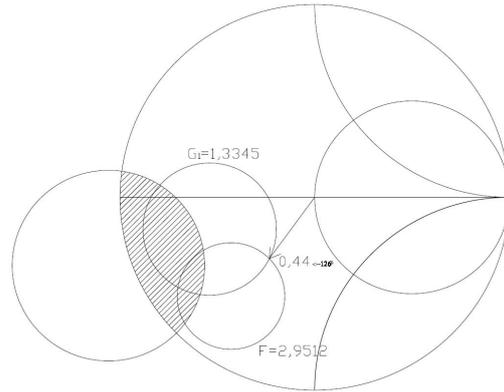


Figura 6: Posibles valores de  $\rho_S$

Observando la red de entrada propuesta en la figura 1 se observa que la parte real de  $Z_S$  se consigue mediante un adaptador de impedancias de  $\lambda/4$  y la parte imaginaria directamente con la reactancia serie  $jX$ . La impedancia  $Z'_0$  deberá cumplir que:

$$Z'_0 = \sqrt{Z_o \cdot \Re[Z_S]} = \sqrt{50 \cdot 23,5672} = 34,3273 \Omega$$

Mientras que  $X$  valdrá:

$$X = \Im[Z_S] = -20,8065 \Omega$$

# **MICROONDAS**

**Examen enero 06**

**M. Baquero, F. Peñaranda y V. Boria**

## 14. ENERO 06

### 14.1. PROBLEMA 1 (40 p)

Se pretende diseñar un divisor de potencia no balanceado. Este divisor debe ser una red de tres accesos, pasiva, sin pérdidas y recíproca.

- (12 p) a.- Calcular su matriz de dispersión, tomando como entrada el acceso 1 y salidas los accesos 2 y 3, si las pérdidas de inserción que se desean en una de las ramas ( $S_{21}$  p.e.) es de 5 dB y se sabe que  $S_{11} = 0$ , que los parámetros  $S_{21}$  y  $S_{31}$  son imaginarios puros y negativos y que  $S_{22}$  es real y positivo.

Dos posibles realizaciones de este divisor son las mostradas en las figuras 1 y 2, donde se hace uso de inversores ideales.

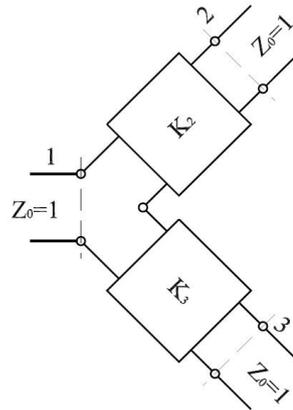
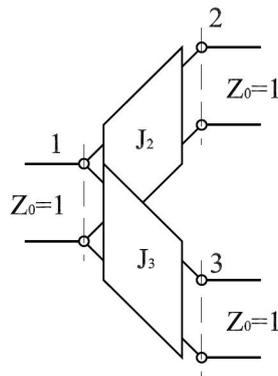


Figura 1: Divisor con inversores en paralelo.

Figura 2: Divisor con inversores en serie.

- (10 p) b.- Calcular los valores de las constantes de inversión  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $K_2$  y  $K_3$  necesarios para conseguir adaptación en la entrada y pérdidas de inserción de 5 dB en la rama 2.

- (12 p) c.- Calcular los parámetros  $S_{22}$ ,  $S_{33}$  y  $S_{32}$  del divisor de la figura 1.

Para conseguir aislamiento entre los accesos 2 y 3 en el caso del divisor de la figura 1 se introduce una resistencia  $R = 1/G$  en serie entre los accesos 2 y 3, como muestra la figura 3.

- (6 p) d.- Calcular el valor de  $G$  que hace que  $S_{32} = 0$  de la red de la figura 3.

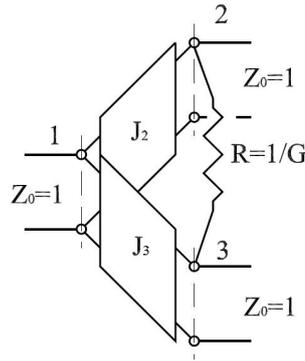


Figura 3: Divisor con inversores en paralelo y resistencia de desacoplo.

Datos:

Expresión del parámetro  $S_{32}$  de un red de tres accesos recíproca en función de los elementos de la matriz de admitancia de la red:

$$S_{32} = \frac{1}{\det([I] + [Y])} \left( -Y_{21} \begin{vmatrix} Y_{21} & Y_{31} \\ 1 + Y_{22} & Y_{32} \end{vmatrix} - (1 - Y_{22}) \begin{vmatrix} 1 + Y_{11} & Y_{31} \\ Y_{21} & Y_{32} \end{vmatrix} - Y_{32} \begin{vmatrix} 1 + Y_{11} & Y_{21} \\ Y_{21} & 1 + Y_{22} \end{vmatrix} \right)$$

a) Dado que  $S_{11} = 0$  y que la red es recíproca el aspecto de la matriz de dispersión será el siguiente:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & S_{22} & S_{32} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

Al ser sin pérdidas deberá cumplirse la propiedad de unitariedad, que lleva a que:

$$|S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1 \quad (1)$$

$$|S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \quad (2)$$

$$|S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 + |S_{33}|^2 = 1 \quad (3)$$

$$S_{21}S_{22}^* + S_{31}S_{32}^* = 0 \quad (4)$$

$$S_{21}S_{32}^* + S_{31}S_{33}^* = 0 \quad (5)$$

$$S_{21}S_{31}^* + S_{22}S_{32}^* + S_{32}S_{33}^* = 0 \quad (6)$$

Por otro lado las pérdidas de inserción en la rama 2 debe ser de 5 dB, por lo que se tendrá que:

$$IL(dB) = -20 \log |S_{21}| = 5 \text{ dB}$$

$$|S_{21}| = 10^{-5/20} = 0,5623$$

Y por la ecuación (2) se deduce que:

$$|S_{31}| = \sqrt{1 - |S_{21}|^2} = 0,8269$$

Y dado que se sabe que son imaginarios puros tanto  $S_{21}$  como  $S_{31}$  serán:

$$\begin{aligned} S_{21} &= -j0,5623 \\ S_{31} &= -j0,8269 \end{aligned}$$

De la ecuación (4):

$$S_{32}^* = -S_{22}^* \frac{S_{21}}{S_{31}} \quad (7)$$

Y sustituyendo en la ecuación (2):

$$\begin{aligned} |S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{22}|^2 \left| \frac{S_{21}}{S_{31}} \right|^2 &= 1 \\ |S_{22}| &= \sqrt{\frac{1 - |S_{21}|^2}{1 + \left| \frac{S_{21}}{S_{31}} \right|^2}} = 0,6838 \end{aligned}$$

Y como se sabe que  $S_{22}$  es real y positivo resulta:

$$S_{22} = 0,6838$$

De la ecuación (4) también se deduce que:

$$|S_{32}| = |S_{22}| \left| \frac{S_{21}}{S_{31}} \right| = 0,465$$

De igual forma de la ecuación (5) se deduce que

$$S_{33}^* = -S_{32}^* \frac{S_{21}}{S_{31}} \quad (8)$$

Por lo que:

$$|S_{33}| = |S_{32}| \left| \frac{S_{21}}{S_{31}} \right| = 0,3162$$

Faltaría solamente encontrar las fases de los parámetros  $S_{33}$  y  $S_{32}$ . De la ecuación (7), dado que las fases de  $S_{21}$  y  $S_{31}$  son iguales y la fase de  $S_{22}$  es cero, se deduce que la fase de  $S_{32}$  es  $180^\circ$ ; es decir será un número real y negativo. Y a su vez de la ecuación (8), con igual razonamiento, se llega a que  $S_{33}$  será real y positivo. De forma que la matriz de dispersión quedará como:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -j0,5623 & -j0,8269 \\ -j0,5623 & 0,6838 & -0,4650 \\ -j0,8269 & -0,4650 & 0,3162 \end{bmatrix} \quad (9)$$

b) En el caso de la configuración paralelo, cuando los accesos 2 y 3 están terminados, se tendrá una admitancia a la entrada igual a:

$$Y_{ent} = \frac{J_2^2}{Y_0} + \frac{J_3^2}{Y_0}$$

Para que el parámetro  $S_{11}$  sea igual a cero deberá cumplirse que  $Y_{ent} = Y_0$ , por lo que resultará que:

$$Y_0^2 = J_2^2 + J_3^2$$

Y como  $Y_0 = 1$  quedará que:

$$1 = J_2^2 + J_3^2 \quad (10)$$

Por otro lado se sabe que la relación entre la potencia entregada al acceso 2 con respecto a la de entrada por el acceso 1 debe ser de  $-5 \text{ dB}$ . Traslado las admitancias de los accesos 2 y 3 a la entrada mediante sus respectivos inversores se obtiene el circuito de la figura 4.

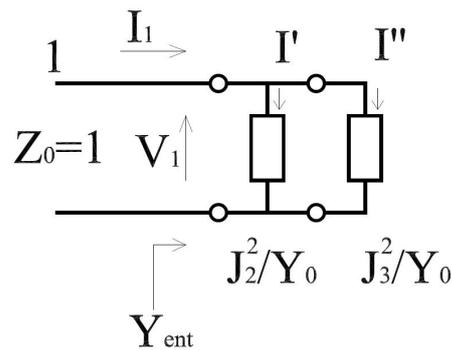


Figura 4: Circuito equivalente divisor paralelo.

De este circuito se deduce que la potencia entregada por el acceso 1 vendrá dada por:

$$P_1 = \frac{1}{2} V_1 \cdot I_1^* = \frac{|V_1|^2}{2}$$

La potencia entregada al acceso 2 será la misma que la entregada a la admitancia  $J_2^2/Y_0$ , que vendrá dada por:

$$P_2 = \frac{1}{2}V_1 \cdot I_2^* = \frac{1}{2}V_1 \cdot V_1^* \frac{J_2^2}{Y_0} = \frac{|V_1|^2 J_2^2}{2} = P_1 J_2^2$$

La relación en  $dB$  de las potencias  $P_2$  y  $P_1$  debe ser igual a  $-5 dB$ , por lo que:

$$-5 dB = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log J_2^2$$

Es decir:

$$J_2 = 10^{-5/20} = 0,5623 \quad (11)$$

Y de la ecuación (10) se deduce que:

$$J_3 = \sqrt{1 - J_2^2} = 0,8269 \quad (12)$$

En cuanto a la configuración serie se haría algo similar. En primer lugar se calcularía la impedancia de entrada por el acceso 1 cuando los accesos 2 y 3 están terminados:

$$Z_{ent} = \frac{K_2^2}{Z_0} + \frac{K_3^2}{Z_0}$$

Para que el parámetro  $S_{11}$  sea cero deberá cumplirse que:

$$Z_{ent} = Z_0$$

Por lo quedará que:

$$1 = K_2^2 + K_3^2 \quad (13)$$

Si ahora se busca el circuito equivalente trasladando las impedancias de los accesos 2 y 3 a través de sus respectivos inversores se obtiene el esquema de la figura 5.

La potencia entregada por el acceso 1 será:

$$P_1 = \frac{1}{2}V_1 \cdot I_1^* = \frac{|V_1|^2}{2Z_0} = \frac{|V_1|^2}{2}$$

La potencia entregada al acceso 2 se podrá calcular como:

$$P_2 = \frac{1}{2}V' \cdot I_1^* = \frac{1}{2}V_1 \frac{K_2^2/Z_0}{K_2^2/Z_0 + K_3^2/Z_0} \frac{V_1^*}{K_2^2/Z_0 + K_3^2/Z_0} = \frac{|V_1|^2 K_2^2/Z_0}{2(K_2^2/Z_0 + K_3^2/Z_0)^2}$$

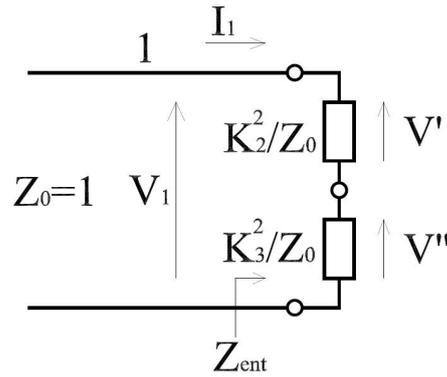


Figura 5: Circuito equivalente divisor serie.

Y como  $K_2^2 + K_3^2 = 1$  resulta:

$$P_2 = \frac{|V_1|^2 K_2^2 / Z_0}{2} = \frac{|V_1|^2 K_2^2}{2}$$

Y como ha de cumplirse que la relación de potencias entre los accesos sea de  $-5 \text{ dB}$  resultará que:

$$-5 \text{ dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log K_2^2$$

Es decir

$$K_2 = 10^{-5/20} = 0,5623$$

Y en cuanto a la constante  $K_3$  será:

$$K_3 = \sqrt{1 - K_2^2} = 0,8269$$

c) Para el cálculo de los parámetros  $S_{22}$  y  $S_{32}$  se terminarán los accesos 1 y 3 y se excitará por el acceso 2 según se muestra en la figura 6.

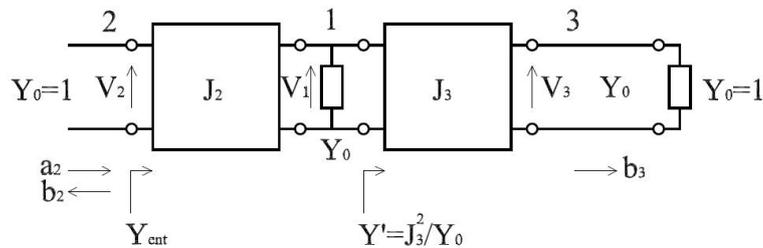


Figura 6: Cálculo de los parámetros  $S_{22}$  y  $S_{32}$ .

La admitancia del acceso 3 trasladada a través del inversor será  $Y' = J_3^2/Y_0 = J_3^2$ . Esta admitancia sumada a la que presenta el acceso 1 y trasladada a través del inversor del acceso 2 supone una admitancia de entrada igual a

$$Y_{ent} = \frac{J_2^2}{Y_0 + Y'} = \frac{J_2^2}{1 + J_3^2}$$

Por lo que el parámetro  $S_{22}$  quedará como:

$$S_{22} = \frac{Y_0 - Y_{ent}}{Y_0 + Y_{ent}} = \frac{1 - \frac{J_2^2}{1 + J_3^2}}{1 + \frac{J_2^2}{1 + J_3^2}} = \frac{1 + J_3^2 - J_2^2}{1 + J_3^2 + J_2^2}$$

Y teniendo presente la relación (10) resultará:

$$S_{22} = \frac{1 - J_2^2 + J_3^2}{2} = J_3^2 \quad (14)$$

Es evidente que el caso del parámetro  $S_{33}$  es igual al del  $S_{22}$  intercambiando los papeles de los accesos 2 y 3. Por lo que el parámetro  $S_{33}$  vendrá dado por:

$$S_{33} = J_2^2 \quad (15)$$

En cuanto al parámetro  $S_{32}$  se tendrá que:

$$S_{32} = \left. \frac{b_3}{a_2} \right|_{a_1=a_3=0} = \{Z_{02} = Z_{03} = Z_0\} = \frac{V_3^-}{V_2^+} = \{V_3^+ = 0; V_2 = V_2^+(1 + S_{22})\} = \frac{V_3}{V_2}(1 + S_{22}) = \frac{V_3}{V_1} \frac{V_1}{V_2}(1 + S_{22})$$

Teniendo en cuenta que la matriz de admitancia de un inversor viene dada por:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & Y_{21} \\ Y_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $Y_{21} = \pm jJ$ , se puede poner que cuando se carga el acceso 2 con una admitancia  $Y_L$ , figura 7, la relaciones de tensiones entrada y salida serán:

$$V_2 = -\frac{I_2}{Y_L} = -\frac{Y_{21}V_1}{Y_L}$$

Es decir

$$\frac{V_2}{V_1} = \mp j \frac{J}{Y_L}$$

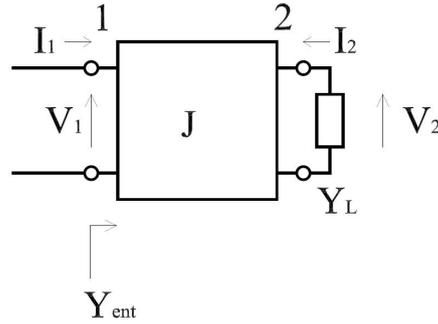


Figura 7: Relación tensiones entrada-salida inversor.

Para el caso del circuito de la figura 6 esta relación de tensiones supondrá:

$$\frac{V_1}{V_2} = \mp j \frac{J_2}{Y_0 + Y'} = \mp j \frac{J_2}{1 + J_3^2}$$

$$\frac{V_3}{V_1} = \mp j \frac{J_3}{Y_0} = \mp j J_3$$

Por lo que el parámetro  $S_{32}$  quedará como:

$$S_{32} = \frac{V_3 V_1}{V_1 V_2} (1 + S_{22}) = (\mp j J_3) (\mp j \frac{J_2}{1 + J_3^2}) (1 + J_3^2) = -\frac{J_3 J_2}{1 + J_3^2} (1 + J_3^2) = -J_2 J_3$$

Por lo que resumiendo:

$$S_{22} = J_3^2 = 0,6838 \quad (16)$$

$$S_{33} = J_2^2 = 0,3162 \quad (17)$$

$$S_{32} = -J_2 J_3 = -0,4650 \quad (18)$$

d) Dada la conexión en paralelo de las tres redes, los dos inversores y la resistencia, resultará más sencillo trabajar con matrices de admitancia. Las matrices de admitancia de los inversores son sobradamente conocidas:

$$[Y_2] = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12_2} \\ Y_{12_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Y_3] = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12_3} \\ Y_{12_3} & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de admitancia de la resistencia serie, figura 8, se calculará fácilmente partiendo de la definición de los elementos de la matriz de admitancia. El parámetro  $Y_{11}$  vendrá dado por:

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{R} = G$$

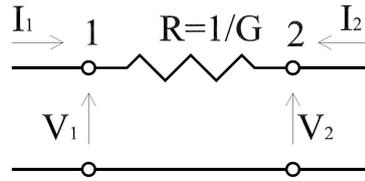


Figura 8: Resistencia serie.

Mientras que el parámetro  $Y_{12}$  será:

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = -\frac{1}{R} = -G$$

De forma que la matriz de admitancia de la conductancia serie será:

$$[Y_G] = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix}$$

De las matrices de admitancia de los inversores se sabe que las corrientes de entrada en cada uno de ellos vienen dadas por:

$$\begin{aligned} I_{12} &= Y_{122} V_2 \\ I_{13} &= Y_{123} V_3 \end{aligned}$$

Y como la corriente de entrada por el acceso 1 será la suma de estas dos corrientes, resultará que:

$$I_1 = I_{12} + I_{13} = Y_{122} V_2 + Y_{123} V_3 \quad (19)$$

La corriente de entrada del inversor  $J_2$  por el lado del acceso 2 viene dada por:

$$I_{22} = Y_{122} V_1$$

Y la corriente que fluye hacia la conductancia desde el acceso 2 será:

$$I_G = G V_2 - G V_3$$

Por lo que la corriente de entrada por el acceso 2 será:

$$I_2 = I_{22} + I_G = Y_{122} V_1 + G V_2 - G V_3 \quad (20)$$

En cuanto a la corriente de entrada por el acceso 3 será semejante a la de la entrada 2 cambiando los papeles de 2 y 3:

$$I_3 = I_{23} - I_G = Y_{123} V_1 - G V_2 + G V_3 \quad (21)$$

Agrupando las expresiones (19), (20) y (21) de forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12_2} & Y_{12_3} \\ Y_{12_2} & G & -G \\ Y_{12_3} & -G & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Expresión que permite identificar directamente el valor de la matriz de admitancia del divisor con la resistencia serie:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12_2} & Y_{12_3} \\ Y_{12_2} & G & -G \\ Y_{12_3} & -G & G \end{bmatrix} \quad (22)$$

Haciendo uso de la expresión que relaciona el parámetro  $S_{32}$  con los elementos de la matriz de admitancia, dada como datos en el enunciado, resultará que:

$$S_{32} = \frac{2(G + Y_{12_2}Y_{12_3})}{\det([I] + [Y])}$$

Y para que este parámetro se anule se deberá cumplir que:

$$G + Y_{12_2}Y_{12_3} = 0$$

Y como  $Y_{12_2} = \pm jJ_2$  e  $Y_{12_3} = \pm jJ_3$  resulta que:

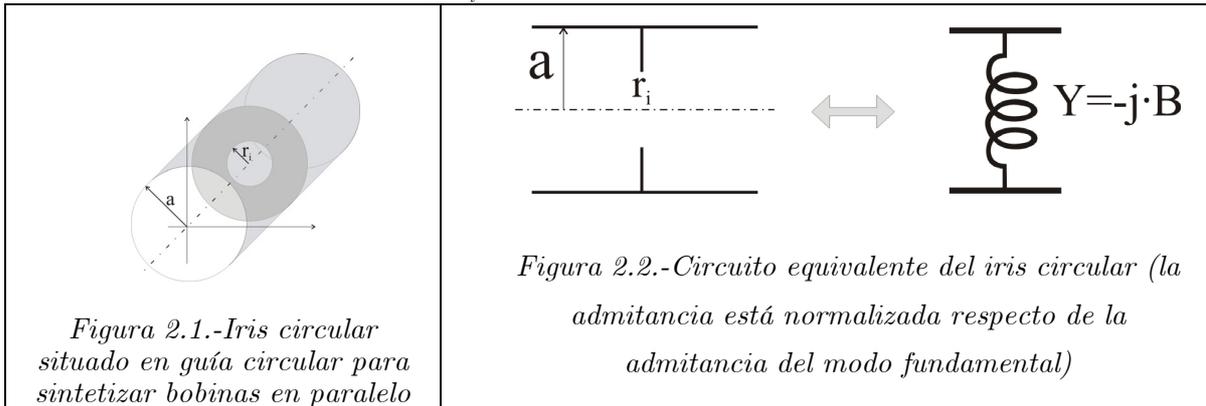
$$G = J_2J_3 = 0,4650$$

## 14.2 PROBLEMA 2 (40p)

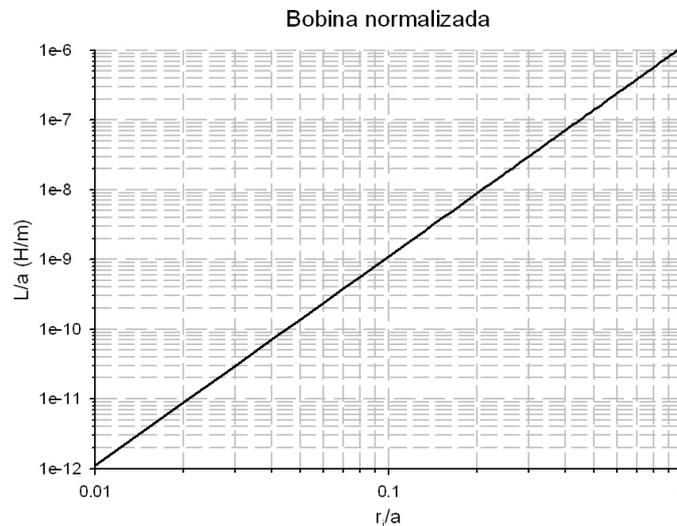
Se desea construir un filtro paso banda con una guía circular vacía (dieléctrico aire), para el modo fundamental de dicha guía.

Los datos de diseño del filtro son que la banda de paso, con rizado de  $r=0.2$  dB, irá desde  $f_1=2.4$  GHz a  $f_2=2.6$  GHz, mientras que la banda eliminada tiene como límite inferior  $f_a=2.2$  GHz y como límite superior  $f_b=2.8$  GHz, con una atenuación en la banda eliminada  $L_A=20$  dB.

El filtro se construirá con los inversores sintetizados mediante bobinas en paralelo, bobinas que en guía circular se construyen mediante iris circulares centrados. Este tipo de iris muestra en la figura 2.1, donde se aprecia que el radio de la guía circular es  $R=a$  y el radio del iris es  $R=r_i$ . La figura 2.2 muestra el circuito equivalente de un iris de radio interno  $R=r_i$ .



Y la figura 2.3 muestra el valor de la bobina paralelo del circuito equivalente.



*Figura 2.3.-Bobina equivalente normalizada respecto del radio (H/m)*

Con esta información, se pide:

(7p) a) Determine el radio  $a$  de la guía circular para que la frecuencia de corte del modo fundamental sea  $f_c=2.2$  GHz. **NO** utilice directamente la expresión de la frecuencia de corte y el modo fundamental, sino que debe calcular cuál es dicho modo y su frecuencia de corte a partir de los modos *TE* y *TM*.

(8p) b) Calcule las admitancias paralelo que sintetizarán los inversores del filtro paso banda, así como las distancias eléctricas (en radianes) que habrá entre cada

admitancia paralelo. Indique, para ello, el orden del filtro paso banda a sintetizar y dibuje también un esquema de cómo quedaría el filtro con admitancias y longitudes eléctricas.

(20) c) Calcule las distancias reales (en milímetros) entre los iris de la guía circular, así como los radios de los diferentes iris que haya en el filtro sintetizado con guía circular. Indique con claridad cuáles son las bobinas que va a sintetizar.

(5p) d) Finalmente, calcule el retardo que sufrirá una señal a la frecuencia central de la banda de paso para atravesar todo el filtro, eliminando el efecto de los iris y considerando únicamente las líneas de transmisión.

Datos:

- 1) Campos transversales a partir de las componentes axiales:

$$\vec{E}_t = \frac{-j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \nabla_t \times (H_z \cdot \hat{z}) - \gamma \cdot \nabla_t E_z}{k^2 + \gamma^2} ; \vec{H}_t = \frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \nabla_t \times (E_z \cdot \hat{z}) - \gamma \cdot \nabla_t H_z}{k^2 + \gamma^2}$$

- 2) Operadores en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla_t f = \hat{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\phi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi} ; \nabla_t \vec{A} = \hat{r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \hat{\phi} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

- 3) Ecuación de cambio de variable de paso banda a paso bajo:

$$\omega' = \frac{1}{W} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) ; W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} ; \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

- 4) Ceros de la función de Bessel de primera especie, y su derivada:

n	$p_n$	$p'_n$	$p_n$	$p_n$	$p_n$
0	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309
1	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
2	5.1356	8.4172	11.6198	14.7960	17.9598
3	6.3802	9.7610	13.0152	16.2235	19.4094

n	$p'_n$	$p'_n$	$p'_n$	$p'_n$	$p'_n$
0	3.8317	5.5201	10.1735	13.3237	16.4706
1	1.8412	7.0156	8.5363	11.7060	14.8636
2	3.0542	8.4172	9.9695	13.1704	16.3475
3	4.2012	9.7610	11.3459	14.5858	17.7887

- 5) Coeficientes de la síntesis de filtros por Chebychev para rizado  $r=0.2$  dB

n	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$
1	0.4342	1.0000							
2	1.0378	0.6746	1.5386						
3	1.2275	1.1525	1.2275	1.0000					
4	1.3028	1.2844	1.9762	0.8468	1.5386				
5	1.3394	1.3370	2.1661	1.3370	1.3394	1.0000			
6	1.3598	1.3632	2.2395	1.4556	2.0974	0.8838	1.5386		

n	g	g <sub>1</sub>	g <sub>2</sub>	g <sub>3</sub>	g <sub>4</sub>	g <sub>5</sub>	g <sub>6</sub>	g <sub>7</sub>	g <sub>8</sub>	g <sub>9</sub>
7	1.3723	1.3782	2.2757	1.5002	2.2757	1.3782	1.3723	1.0000		
8	1.3804	1.3876	2.2963	1.5218	2.3414	1.4925	2.1349	0.8972	1.5386	

6) Curva de atenuaciones para filtro de Chebychev de rizado r=0.2 dB

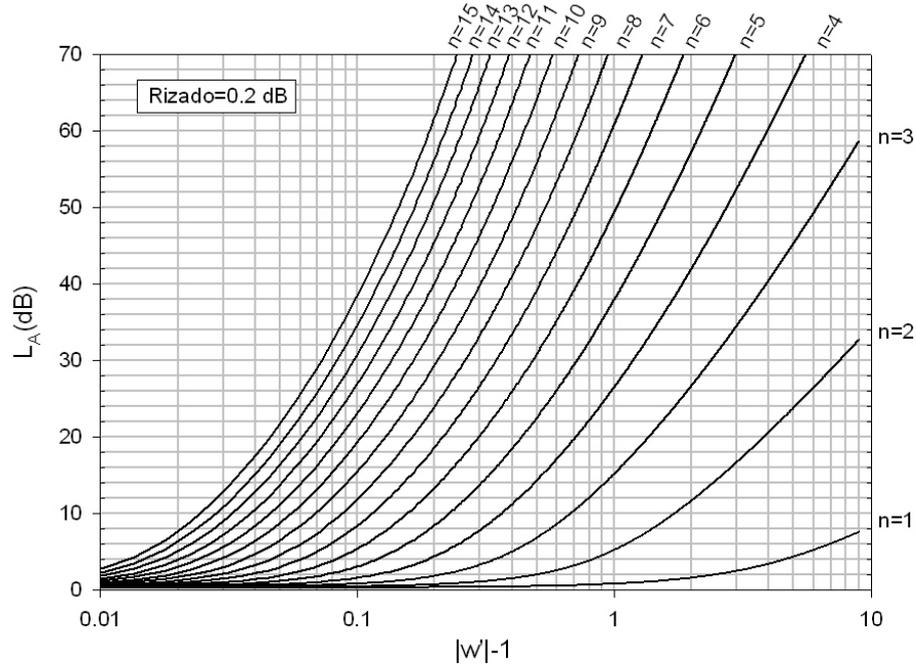


Figura 2.4.-Curvas de atenuación

7) Constantes de inversión de los inversores de la síntesis de filtros paso banda:

$$\bar{K}_{01} = \sqrt{\frac{\pi \cdot W}{2 \cdot g_1}} ; \bar{K}_{i,i+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{W}{\sqrt{g_i \cdot g_{i+1}}} ; \bar{K}_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\pi \cdot W}{2 \cdot g_N \cdot g_{N+1}}}$$

8) Síntesis de inversores con admitancias en paralelo:

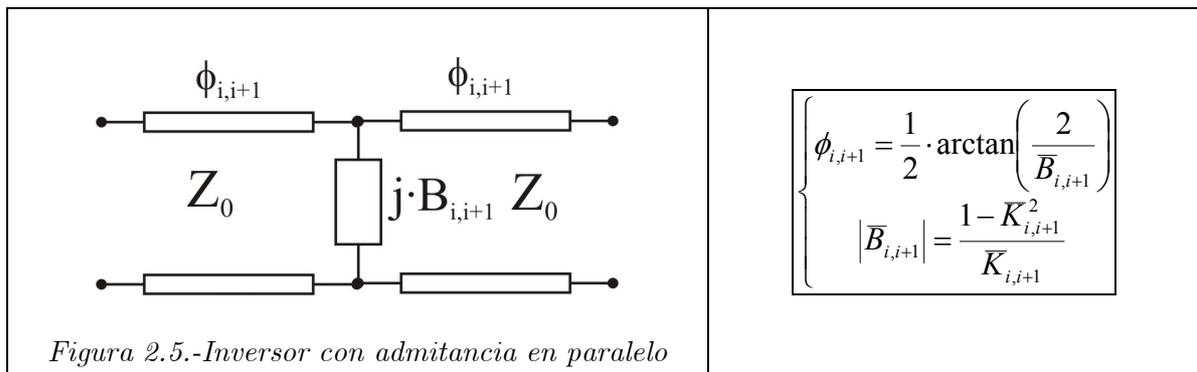


Figura 2.5.-Inversor con admitancia en paralelo

a) Sabemos que la frecuencia de corte es aquella a la cual la constante de propagación es cero. De esta forma, tenemos:

$$K_c^2 = K^2 + \gamma^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon + \gamma^2 \Rightarrow f_c = \frac{K_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \Big|_{\gamma=0} \quad (2.1)$$

En la guía circular sabemos que la solución de la ecuación de onda para los modos TM es:

$$\nabla_t^2 E_z + K_c^2 \cdot E_z = 0 \Rightarrow E_z = A \cdot J_n(K_c \cdot r) \cdot \cos(n \cdot \varphi + \Phi_0) \quad (2.2)$$

y para los modos TE es:

$$\nabla_t^2 H_z + K_c^2 \cdot H_z = 0 \Rightarrow H_z = A \cdot J_n(K_c \cdot r) \cdot \cos(n \cdot \varphi + \Phi_0) \quad (2.3)$$

En el primer caso, modos TM, la condición de contorno implica que  $E_z(r=a)=0$ , por lo que tenemos que el número de onda de corte  $K_c$  es:

$$J_n(K_c \cdot a) = 0 \Rightarrow K_c|_{TM_{nl}} = \frac{P_{nl}}{a} \quad (2.4)$$

Y para los modos TE, la condición de contorno se traduce en que  $\frac{\partial E_z}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$ , por lo que tenemos que el número de onda de corte  $K_c$  es:

$$J'_n(K_c \cdot a) = 0 \Rightarrow K_c|_{TE_{nl}} = \frac{P'_{nl}}{a} \quad (2.5)$$

En definitiva, las frecuencias de corte para los modos TM y TE son:

$$f_c|_{TM_{nl}} = \frac{P_{nl}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \quad ; \quad f_c|_{TE_{nl}} = \frac{P'_{nl}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \quad (2.6)$$

Así pues, el orden en el que aparecerán los modos en la guía circular será el orden en el que aparecen los ceros de la función de Bessel de primera especie y los de su primera derivada. De esta forma, el primer cero, a la vista de la tabla, es  $p'_{11}=1.8412$ , por lo que el primer modo será el  $TE_{11}$ . Aplicando entonces la ecuación (2.6), y despejando el radio  $a$ , sabiendo que la frecuencia de corte es  $f_c=2.2 \text{ GHz}$ , tenemos:

$$a = \frac{P'_{11}}{f_c|_{TE_{11}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = 4 \text{ cm} \quad (2.7)$$

b) Para diseñar el filtro, lo primero es calcular los parámetros del prototipo paso bajo. Para ello hacemos uso de la ecuación de transformación de frecuencias.

Antes calcularemos la frecuencia central y el ancho de banda relativo, de tal forma que:

$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = 2.498 \text{ GHz} ; W = \frac{f_2 - f_1}{f_0} = 0.08 \text{ (8\%)} \tag{2.8}$$

Según esto, las frecuencias transformadas serán:

$$|\omega'(f_1)| = |\omega'(f_2)| = 1 ; \omega'(f_a) = -3.18 ; \omega'(f_b) = 2.85 \tag{2.9}$$

Como era de prever, las frecuencias transformadas de la banda de paso son  $\omega'=1$ , y para las bandas eliminadas son diferentes. Para determinar el orden escogemos el caso peor, por lo que tomaremos como banda eliminada  $\omega'_a=2.85$ ,

Con este valor de banda eliminada nos vamos a las curvas de atenuación del filtro de Chebychev de rizado  $r=0.2 \text{ dB}$  (figura 2.4) y seleccionamos el orden, como se observa en la siguiente figura.

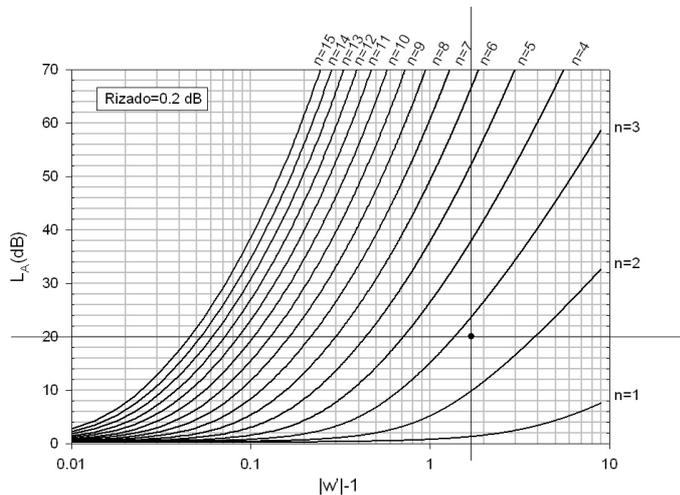


Figura 2.6.-Curvas de atenuación

Por lo tanto, el orden del filtro será  $n=3$ , y los coeficientes del prototipo paso bajo serán:

$g_0$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$
1.0000	1.2275	1.1525	1.2275	1.0000

Una vez tenemos los coeficientes del prototipo, debemos calcular las constantes de inversión, que serán, a partir de las expresiones que nos dan como datos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{K}_{01} = \sqrt{\frac{\pi \cdot W}{2 \cdot g_1}} = \bar{K}_{34} = \sqrt{\frac{\pi \cdot W}{2 \cdot g_3 \cdot g_4}} = 0.3201 \\ \bar{K}_{12} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{W}{\sqrt{g_1 \cdot g_2}} = \bar{K}_{23} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{W}{\sqrt{g_2 \cdot g_3}} = 0.1057 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Y a partir de estas constantes calculamos los CUATRO inversores sintetizados a partir de admitancias paralelo, admitancias que serán bobinas. De esta forma tenemos para el primer y último inversor las siguientes admitancias y líneas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{B}_{01} = \frac{1 - \bar{K}_{01}^2}{\bar{K}_{01}} = \bar{B}_{34} = \frac{1 - \bar{K}_{34}^2}{\bar{K}_{34}} = 2.8041 \\ \phi_{01} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2}{\bar{B}_{01}}\right) = \phi_{34} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2}{\bar{B}_{34}}\right) = 0.3098 \text{ rad} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Y para el segundo y tercer inversores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{B}_{12} = \frac{1 - \bar{K}_{12}^2}{\bar{K}_{12}} = \bar{B}_{23} = \frac{1 - \bar{K}_{23}^2}{\bar{K}_{23}} = 9.3517 \\ \phi_{12} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2}{\bar{B}_{12}}\right) = \phi_{23} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2}{\bar{B}_{23}}\right) = 0.1053 \text{ rad} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Por lo tanto, las distancias que hará que poner entre admitancias serán líneas en  $\lambda/2$  minoradas por las líneas de los inversores, ya que al ser admitancias sintetizadas con bobinas las líneas de los inversores serán *negativas*. Como las líneas en  $\lambda/2$  en términos de fase son líneas de  $\pi$  radianes ( $\beta \cdot l = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$ ), tenemos que la línea entre el primer inversor (primera bobina) y el segundo (segunda bobina), que es la misma que la línea entre el tercer y cuarto inversores (tercera y cuarta bobinas), será:

$$\phi_1 = \pi - \phi_{01} - \phi_{12} = 2.7265 \text{ rad} = \pi - \phi_{23} - \phi_{34} = \phi_3 \quad (2.13)$$

Y la línea central, que une el segundo y tercer inversores, es:

$$\phi_2 = \pi - \phi_{12} - \phi_{23} = 2.9309 \text{ rad} \quad (2.14)$$

Finalmente, el esquema del filtro será:

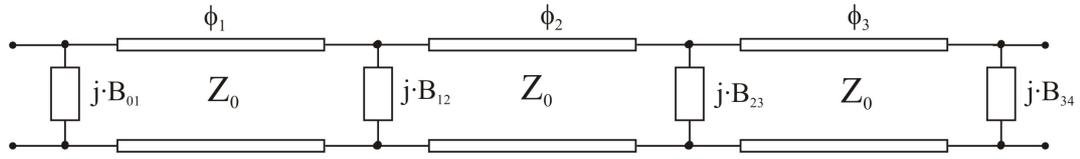


Figura 2.7.-Esquema del filtro con longitudes eléctricas y admitancias

c) En este apartado vamos a diseñar físicamente el filtro, por lo que debemos convertir en longitudes físicas las líneas de transmisión y los iris que sintetizarán las bobinas en paralelo.

Primero veremos cuáles son las distancias reales entre bobinas, es decir las distancias reales entre los iris que sintetizan las bobinas en paralelo. Las distancias eléctricas las tenemos calculadas en el apartado anterior, en las ecuaciones (2.13) y (2.14), y son:

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_3 = 2.7265 \text{ rad} = \beta \cdot l_1 = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot l_1 \\ \phi_2 = 2.9309 \text{ rad} = \beta \cdot l_2 = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot l_2 \end{cases} \quad (2.15)$$

De estas ecuaciones debemos despejar las longitudes físicas  $l_1$  y  $l_2$ , pero debe tenerse en cuenta que las longitudes de onda  $\lambda$  NO son en espacio libre sino las longitudes de onda dentro de la guía y para el modo que se propaga. Por ello, estas longitudes de onda son:

$$\begin{aligned} K_c^2 &= K^2 + \gamma^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon - \beta^2 \\ &\Downarrow \\ \beta &= \sqrt{\omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon - K_c^2} = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \\ &\Downarrow \\ \lambda &= \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{2 \cdot \pi / (\omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon})}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para nuestro caso, la frecuencia de corte es  $f_c=2.2 \text{ GHz}$ , según el dato que nos dan, por lo que la longitud de onda (y la constante de propagación) en la guía para el modo fundamental  $TE_{11}$  son:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{2 \cdot \pi / (\omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon})}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = 27.71 \text{ cm} ; \beta = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 22.67 \text{ m}^{-1} \quad (2.17)$$

De esta forma podemos calcular las longitudes físicas  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  a partir de la ecuación (2.15) y la longitud de onda anterior, llegando a:

$$\begin{cases} l_1 = l_3 = \frac{\phi_1 \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} = \frac{\phi_3 \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} = 12.02 \text{ cm} \\ l_2 = \frac{\phi_2 \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} = 12.92 \text{ cm} \end{cases} \quad (2.18)$$

Para el cálculo de los iris debemos calcular primero las bobinas a sintetizar. Conociendo las admitancias paralelo  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  y  $B_4$ , obtenidas en las ecuaciones (2.11) y (2.12), y cuyos valores son:

$$\begin{cases} \bar{B}_{01} = \bar{B}_{34} = 2.8041 \\ \bar{B}_{12} = \bar{B}_{23} = 9.3517 \end{cases} \quad (2.19)$$

podemos obtener las bobinas sabiendo que las admitancias normalizadas anteriores están relacionadas con las bobinas como:

$$\begin{cases} \bar{B}_{01} = \bar{B}_{34} = \frac{Z_0}{L_{01} \cdot \omega} = \frac{Z_0}{L_{34} \cdot \omega} = 2.8041 \\ \bar{B}_{12} = \bar{B}_{23} = \frac{Z_0}{L_{12} \cdot \omega} = \frac{Z_0}{L_{23} \cdot \omega} = 9.3517 \end{cases} \quad (2.20)$$

Un detalle a considerar aquí es la impedancia de normalización o característica de las líneas de transmisión. Al igual que con la longitud de onda, esta impedancia es la impedancia del modo, por lo que en este caso, puesto que el modo que se propaga es el  $TE_{11}$ , la impedancia característica será:

$$Z_0 = Z_{TE_{11}} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\gamma} = \frac{\omega \cdot \mu}{\beta} = \frac{\omega \cdot \mu \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} = 869.77 \Omega \quad (2.21)$$

Por lo tanto las bobinas a sintetizar son:

$$\begin{cases} L_{01} = L_{34} = \frac{Z_0}{B_{01} \cdot \omega} = \frac{Z_0}{B_{301} \cdot \omega} = 1.97 \cdot 10^{-8} H \\ L_{12} = L_{23} = \frac{Z_0}{B_{12} \cdot \omega} = \frac{Z_0}{B_{23} \cdot \omega} = 5.92 \cdot 10^{-9} H \end{cases} \quad (2.22)$$

Estas bobinas, normalizadas respecto del radio de la guía, para poder leer los radios de los iris en la gráfica de síntesis de bobinas, son:

$$\begin{cases} \frac{L_{01}}{a} = \frac{L_{34}}{a} = 4.94 \cdot 10^{-7} H/m \\ \frac{L_{12}}{a} = \frac{L_{23}}{a} = 1.48 \cdot 10^{-7} H/m \end{cases} \quad (2.23)$$

Si ahora miramos la gráfica de síntesis de iris, figura 2.3, podemos ver los radios de los 4 iris que configurarán los 4 inversores del filtro. Esta gráfica se muestra en la figura 2.8, donde se comprueba que los iris son:

$$\begin{cases} \frac{L_{01}}{a} = \frac{L_{34}}{a} = 4.94 \cdot 10^{-7} H/m \Rightarrow \frac{r_{01}}{a} = 0.728 \Rightarrow r_{01} = r_{34} = 2.91 \text{ cm} \\ \frac{L_{12}}{a} = \frac{L_{23}}{a} = 1.48 \cdot 10^{-7} H/m \Rightarrow \frac{r_{12}}{a} = 0.542 \Rightarrow r_{12} = r_{23} = 2.17 \text{ cm} \end{cases} \quad (2.24)$$

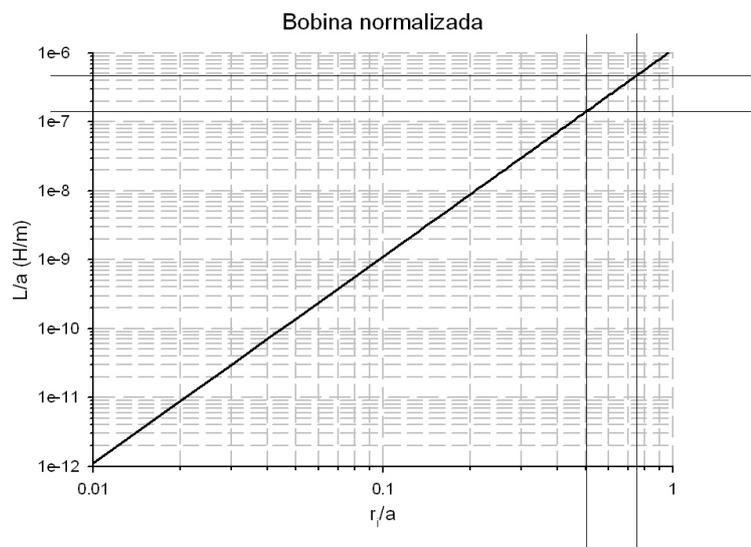


Figura 2.8.-Síntesis de los radios de los iris

d) Por último se nos pide el tiempo que tardará la señal en recorrer el filtro, sin considerar el efecto de los iris. Por lo tanto, lo que necesitamos es calcular la velocidad de grupo en la línea de transmisión, a partir de la constante de propagación y, sabiendo la longitud total del filtro, calcular el tiempo que tardará la señal en atravesarlo.

La constante de propagación la tenemos en la ecuación (2.16), y seguidamente la volvemos a escribir para mayor comodidad:

$$\begin{aligned}
 K_c^2 &= K^2 + \gamma^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon - \beta^2 \\
 &\Downarrow \\
 \beta &= \sqrt{\omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon - K_c^2} = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

La velocidad de grupo, es decir, la velocidad de propagación de la energía, viene definida como:

$$v_g = \frac{1}{\left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}}
 \tag{2.26}$$

Por ello, derivando la ecuación (2.25) tenemos la velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{1}{\left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}
 \tag{2.27}$$

Es interesante destacar que la velocidad de grupo es la del espacio libre minorada por un término menor que uno que aparece en el numerador.

Como la velocidad es la distancia partido por el tiempo, y la longitud total del filtro es  $l_1 + l_2 + l_3$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 v_g &= \frac{s}{t} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{t} = \frac{(12.02 + 12.92 + 12.02) \cdot 10^{-2} \text{ m}}{t} = 1.32 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\
 &\Downarrow \\
 &t = 2.8 \text{ ns}
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

### 14.3. PROBLEMA 3 (40 p)

Se pretende diseñar un amplificador de resistencia negativa, que proporcione una ganancia ( $G_T$ ) de 12 dB a la frecuencia  $f_0 = 3$  GHz. Para ello, se emplea una configuración con un circulator ideal, cuyo sentido de giro (a izquierdas) y matriz de parámetros  $S$  se muestra en la figura 1.

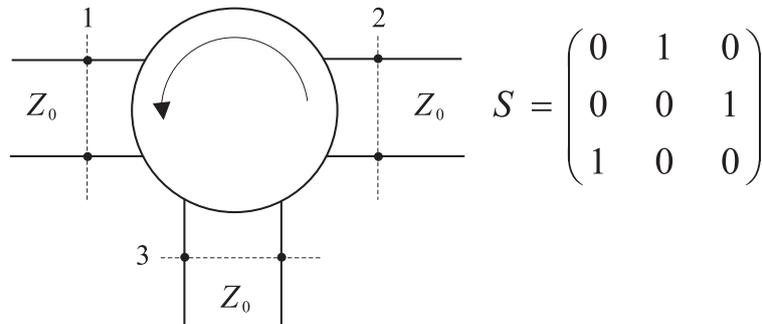


Figura 1: Circulador ideal y matriz de parámetros  $S$

Como elemento de resistencia negativa se empleará un transistor, cuyo acceso de salida se cargará debidamente con una impedancia  $Z_L$  (sintetizada a partir de  $Z_0$  y la correspondiente red pasiva y sin pérdidas). Dicho amplificador se conectará, haciendo uso del circulator descrito, a un generador adaptado ( $Z_g = Z_0$ ) y una carga de valor  $Z_0$  (considere  $Z_0 = 50 \Omega$  en todo el problema). Se pide responder a las siguientes cuestiones:

- (4 p) a.- Dibujar la configuración circuital del esquema de amplificador descrito, incluyendo generador, carga, transistor, red de síntesis y circulator. Deducir la expresión de  $G_T$  en función del factor de reflexión en el acceso de entrada del transistor ( $\Gamma_{in}$ ).
- (12 p) b.- Se dispone de 4 transistores cuyos parámetros  $S$ , referidos a  $Z_0$ , se muestran en la tabla 1. Para cada transistor, indicar en la solución escrita las zonas de inestabilidad de fuente (plano  $\Gamma_S$ ) y de carga (plano  $\Gamma_L$ ). A la vista de estos resultados, seleccionar el transistor más adecuado para implementar el amplificador propuesto (**razonar la respuesta**). Para el transistor escogido, indicar en la carta de Smith que se adjunta (**debe entregarse junto a la solución escrita**) las citadas zonas de inestabilidad.

Independientemente de la respuesta proporcionada en el apartado anterior, considere el transistor número 3 para responder a las siguientes tres cuestiones:

- (10 p) c.- Determinar el valor de la impedancia de carga del transistor ( $Z_L$ ) que se necesita para: obtener la ganancia deseada (12 dB) y que la impedancia en el plano de entrada del transistor ( $Z_{in}$ ) sea un número real (es decir  $\text{Im}(Z_{in}) = 0$ ). Considere todas las posibles soluciones, e indique cuál de ellas puede sintetizarse con una red pasiva y sin pérdidas.

(6 p) d.- Debido a efectos parásitos en el transistor y la red de síntesis, la impedancia que se ve en el plano de entrada del transistor ( $Z_{in}$ ) se modela realmente como:  $Z_{in} = -R_{in} - j/(C_{in}\omega)$ , donde  $R_{in}$  corresponde al valor de  $Z_{in}$  deducido en el apartado anterior y  $C_{in}$  (efectos parásitos) tiene un valor de 50 pF. Diseñe una red de sintonía a situar en el plano de entrada del transistor para compensar los citados efectos parásitos.

(8 p) e.- Si la única fuente de ruido del amplificador diseñado está asociada al transistor ( $F_{min} = 3$  dB,  $R_N = 25 \Omega$  y  $\Gamma_{opt} = 0,35 \angle 120^\circ$ ), determinar el factor de ruido global de dicho amplificador (para su cálculo considere presente la red de sintonía diseñada en el apartado anterior).

Transistor	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{21}$	$S_{22}$
1	0,94 $\angle 164^\circ$	0,03 $\angle 59^\circ$	1,50 $\angle 43^\circ$	0,57 $\angle -165^\circ$
2	0,50 $\angle 90^\circ$	0	2,40 $\angle 45^\circ$	1,30 $\angle 90^\circ$
3	2,50	0,15	10,00 $\angle 90^\circ$	0,90
4	0,10	0	4,00 $\angle 90^\circ$	0,30

Tabla 1: Parámetros  $S$  de 4 transistores

Datos:

- Factores de Estabilidad  $K$  y  $\mu$ :

$$K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2 |S_{12} S_{21}|} \quad \mu = \frac{1 - |S_{11}|^2}{|S_{22} - S_{11}^* \Delta| + |S_{12} S_{21}|}$$

- Círculos de estabilidad de fuente ( $\Gamma_S$ ) y de carga ( $\Gamma_L$ ):

$$C_S = \frac{(S_{11} - \Delta S_{22}^*)^*}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} \quad R_S = \left| \frac{S_{12} S_{21}}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} \right|$$

$$C_L = \frac{(S_{22} - \Delta S_{11}^*)^*}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} \quad R_L = \left| \frac{S_{12} S_{21}}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} \right|$$

$$\Delta = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}$$

- Coefficientes de Reflexión a la entrada y salida de un transistor:

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} \quad \Gamma_{out} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_S}{1 - S_{11} \Gamma_S}$$

- Factor de ruido de un transistor:

$$F = F_{min} + 4 r_N \frac{|\Gamma_{opt} - \Gamma_S|^2}{|1 + \Gamma_{opt}|^2 (1 - |\Gamma_S|^2)} \quad r_N = R_N / Z_0$$

a) Teniendo en cuenta que el circulator ideal tiene sentido de giro a izquierdas, la configuración circuital del esquema de amplificador descrito es la mostrada en la siguiente figura.

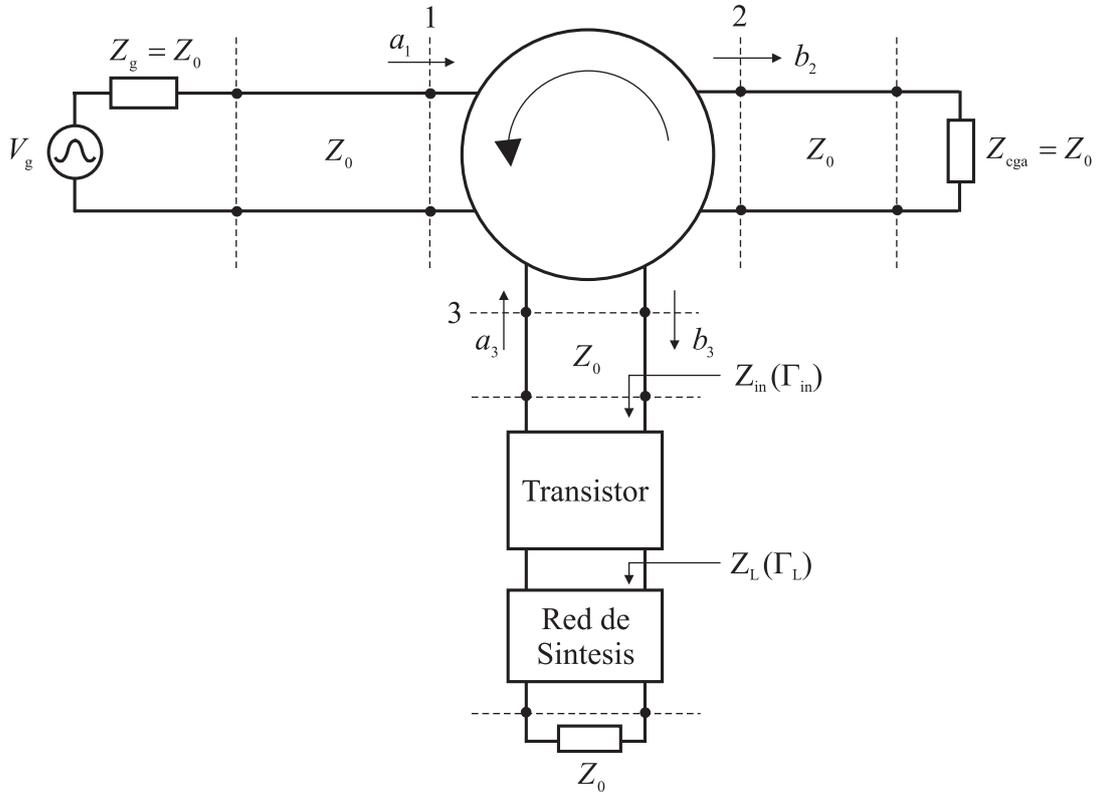


Figura 2: Configuración circuital del esquema de amplificador descrito

La ganancia de transferencia del amplificador ( $G_T$ ) se define como:

$$G_T = \frac{P_{cga}}{P_{avs}}$$

donde  $P_{cga}$  representa la potencia que entrega el amplificador a la carga de valor  $Z_0$  (ver figura 2 y recordar la matriz de parámetros  $S$  del circulator ideal con sentido de giro a izquierdas):

$$P_{cga} = \frac{1}{2} |b_2|^2 = \frac{1}{2} |a_3|^2 = \frac{1}{2} |\Gamma_{in}|^2 |b_3|^2 = \frac{1}{2} |\Gamma_{in}|^2 |a_1|^2$$

y  $P_{avs}$  es la potencia disponible del generador. Teniendo en cuenta que este generador está adaptado ( $Z_g = Z_0$ , es decir  $b_s = a_1$ ), se puede afirmar que:

$$P_{avs} = \frac{1}{2} |b_s|^2 = \frac{1}{2} |a_1|^2$$

Así pues, la expresión de  $G_T$  en función del factor de reflexión ( $\Gamma_{in}$ ) solicitada es:

$$G_T = |\Gamma_{in}|^2$$

donde  $\Gamma_{in}$  es el coeficiente de reflexión en el plano de entrada del transistor debidamente cargado (ver figura 2).

b) Para deducir las zonas de inestabilidad de fuente y de carga de los 4 transistores proporcionados, en primer lugar se estudiará el comportamiento de cada uno de ellos frente a la estabilidad. Se hará uso del factor de estabilidad  $K$  (un transistor es incondicionalmente estable si  $|\Delta| < 1$  y  $K > 1$ ) o bien del factor  $\mu$  (si  $\mu > 1$  el transistor también es incondicionalmente estable).

En la siguiente tabla se muestran los valores de los citados factores de estabilidad para los cuatro transistores, así como sus respectivos comportamientos frente a la estabilidad (I.E.= Incondicionalmente Estable, C.E.= Condicionalmente Estable).

Transistor	$\Delta$	$K$	$\mu$	Estabilidad
1	$0,548 \angle -5,592^\circ$	1,016	1,010	I.E.
2	$-0,650$	$-\infty$	0,769	C.E.
3	$2,704 \angle 33,700^\circ$	0,418	$-0,697$	C.E.
4	$0,030$	$\infty$	3,333	I.E.

Tabla 2: Estudio de la estabilidad de los 4 transistores

Así pues, de los resultados de la tabla 2 se concluye que los transistores 1 y 4 son incondicionalmente estables, es decir, cualquier valor de  $\Gamma_S$  y  $\Gamma_L$  situados en el interior de la carta de Smith ( $|\Gamma_S| \leq 1$  y  $|\Gamma_L| \leq 1$ ) produce condición de estabilidad, respectivamente, en los planos de salida y de entrada de dichos transistores. Por tanto, los transistores 1 y 4 NO presentan zonas de inestabilidad en el interior de la carta de Smith, y no son apropiados para implementar el amplificador propuesto (se debe conseguir un valor de  $Z_{in} < 0$ , ver figura 2).

A continuación se procederá a estudiar las zonas de inestabilidad de los transistores 2 y 3 (condicionalmente estables).

### Transistor 2.

A partir de los valores de los parámetros  $S$  del transistor 2 mostrados en la tabla 1, y haciendo uso de las expresiones proporcionadas en los datos del problema, se obtiene los siguientes valores para los centros y radios de los círculos de estabilidad de fuente ( $\Gamma_S$ ) y de carga ( $\Gamma_L$ ):

$$C_S = 2,00 \angle -90^\circ \quad R_S = 0$$

$$C_L = 0,77 \angle -90^\circ \quad R_L = 0$$

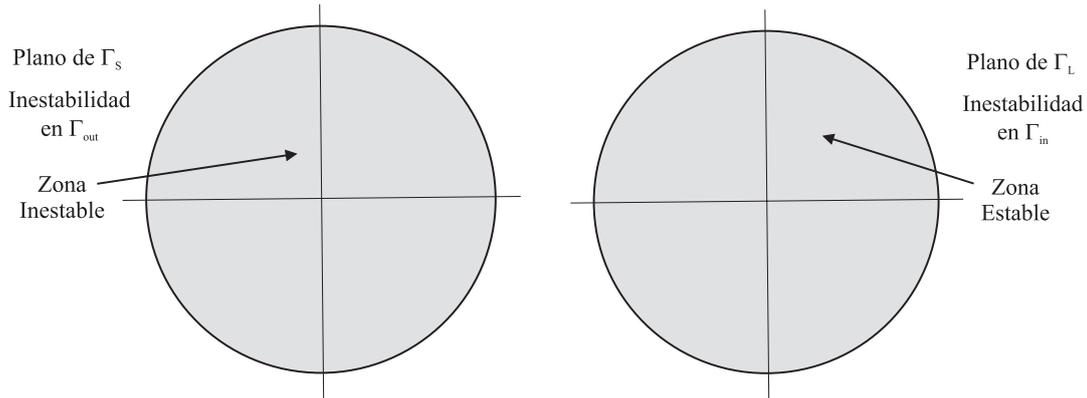


Figura 3: Zonas de inestabilidad de fuente (izqda) y carga (dcha) del trt. 2

En ambos casos (fuente y carga) se trata de dos puntos (círculos de radio 0). Para determinar las zonas de inestabilidad, se debe averiguar el comportamiento del transistor en el centro de la carta de Smith.

Así pues, si  $\Gamma_S = 0$  (centro de la carta de Smith), se sabe que  $\Gamma_{out} = S_{22} = j 1,30$  (es decir,  $|\Gamma_{out}| > 1$ ). Por tanto, cualquier valor de  $\Gamma_S$  con  $|\Gamma_S| \leq 1$  (es decir, todo el interior de la carta de Smith) produce inestabilidad en el plano de salida del transistor, y define la zona de inestabilidad de fuente (ver figura 3).

Por otra parte, si  $\Gamma_L = 0$  (centro de la carta de Smith), se sabe que  $\Gamma_{in} = S_{11} = j 0,50$  (es decir,  $|\Gamma_{in}| < 1$ ). Así pues, todo valor de  $\Gamma_L$  con  $|\Gamma_L| \leq 1$  (es decir, el interior de la carta de Smith) produce estabilidad en el plano de entrada del transistor, y define la zona de estabilidad de carga (ver figura 3). Cabe la duda del comportamiento del transistor en el punto  $\Gamma_L = 0,77 \angle -90^\circ$  (interior del círculo de estabilidad). Se puede comprobar que para dicho valor de  $\Gamma_L$  se tiene  $\Gamma_{in} = S_{11} = j 0,50$  (pues  $S_{12} = 0$ ), y por tanto dicho punto de la carta de Smith también pertenece a la zona estable de carga.

De este estudio se comprueba que el transistor 2 tampoco es adecuado para implementar el amplificador propuesto, pues con cualquier valor de  $\Gamma_L$  (sintetizable mediante una red pasiva y sin pérdidas), NO se consigue inestabilidad en el plano de entrada del transistor.

### Transistor 3.

Usando los valores de los parámetros  $S$  del transistor 3 (ver tabla 1), y empleando las expresiones de los datos del problema, se obtiene los siguientes valores para los centros y radios de los círculos de estabilidad de fuente ( $\Gamma_S$ ) y de carga ( $\Gamma_L$ ):

$$\begin{aligned} C_S &= 1,35 \angle 109,38^\circ & R_S &= 1,41 \\ C_L &= 0,93 \angle 38,44^\circ & R_L &= 0,23 \end{aligned}$$

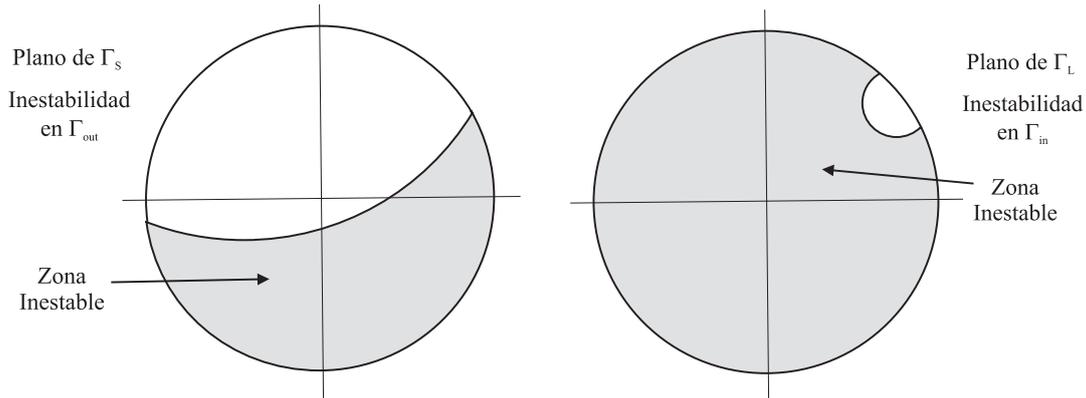


Figura 4: Zonas de inestabilidad de fuente (izqda) y carga (dcha) del trt. 3

En este transistor, en ambos casos los círculos de estabilidad (de fuente y de carga) tienen radio distinto de 0. Para determinar las zonas de inestabilidad, habrá que dibujar dichos círculos y averiguar el comportamiento del transistor en el centro de la carta de Smith.

Para determinar la zona de inestabilidad de fuente, se dibuja en primer lugar un círculo de centro  $1,35 \angle 109,38^\circ$  y radio  $1,41$  (ver figura 4, izquierda). Seguidamente, se comprueba que si  $\Gamma_S = 0$  (centro de la carta de Smith),  $\Gamma_{out} = S_{22} = 0,90$  (es decir,  $|\Gamma_{out}| < 1$ ). Así pues, el centro de la carta de Smith pertenece a la zona estable de fuente. Esto determina la zona de inestabilidad de fuente de este transistor, que se muestra sombreada en la figura 4 (parte izquierda).

Con respecto a la zona de inestabilidad de carga, en primer lugar se dibuja en la carta de Smith (ver derecha de la figura 4) el círculo de centro  $0,93 \angle 38,44^\circ$  y radio  $0,23$ . Se comprueba en este caso que si  $\Gamma_L = 0$  (centro de la carta de Smith),  $\Gamma_{in} = S_{11} = 2,50$  (es decir,  $|\Gamma_{out}| > 1$ ). Por tanto, el centro de la carta de Smith pertenece a la zona inestable de carga, determinando la zona de inestabilidad de carga del transistor (ver región sombreada en la parte derecha de la figura 4).

Estos resultados permiten afirmar que el transistor 3 SÍ es adecuado para implementar el amplificador propuesto, pues existen muchos valores de  $\Gamma_L$  (sintetizables mediante una red pasiva y sin pérdidas) que producen la inestabilidad requerida en el plano de entrada del transistor. Así pues:

El transistor 3 es el más adecuado para implementar el amplificador

Finalmente, en la figura 5 (ver siguiente página) se muestran las zonas de inestabilidad de fuente y de carga del transistor escogido (transistor número 3).

c) Recordando la expresión deducida en el primer apartado para la ganancia de este amplificador, se tiene que:

$$G_T = 12 \text{ dB} = 10 \log (|\Gamma_{in}|^2) = 20 \log (|\Gamma_{in}|) \Rightarrow |\Gamma_{in}| = 3,981$$

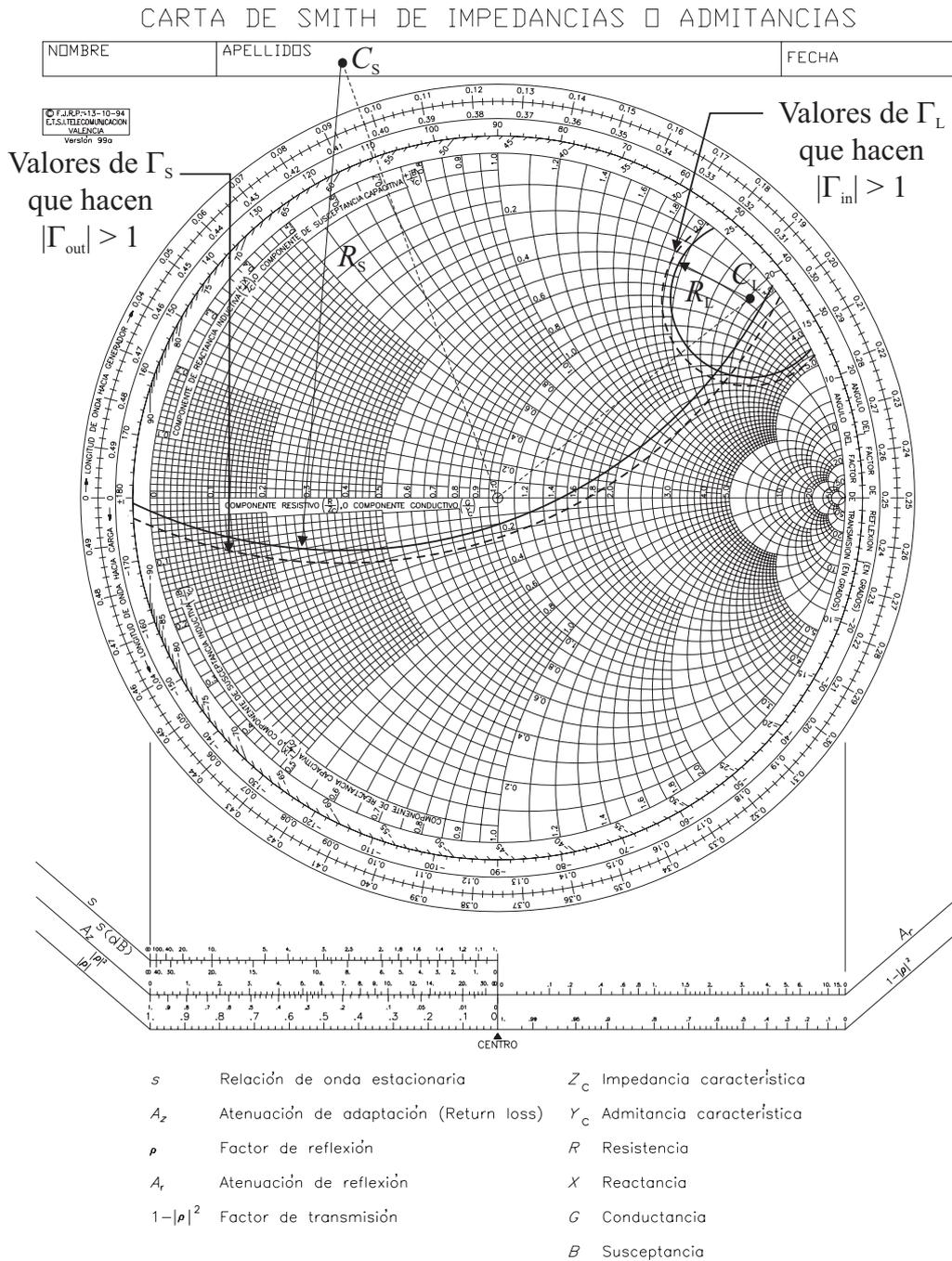


Figura 5: Zonas de inestabilidad de fuente y de carga del transistor 3

Como el enunciado del problema dice que  $Z_{in}$  debe ser un número real (es decir  $\text{Im}(Z_{in}) = 0$ ), y se sabe que  $\Gamma_{in} = (Z_{in} - Z_0)/(Z_{in} + Z_0)$ , se concluye que  $\Gamma_{in}$  también será un número real (es decir,  $\text{Im}(\Gamma_{in}) = 0$ ). Así pues, los posibles valores del coeficiente de reflexión en el plano de entrada del transistor serán:

$$\Gamma_{in,1} = 3,981 \quad \Gamma_{in,2} = -3,981$$

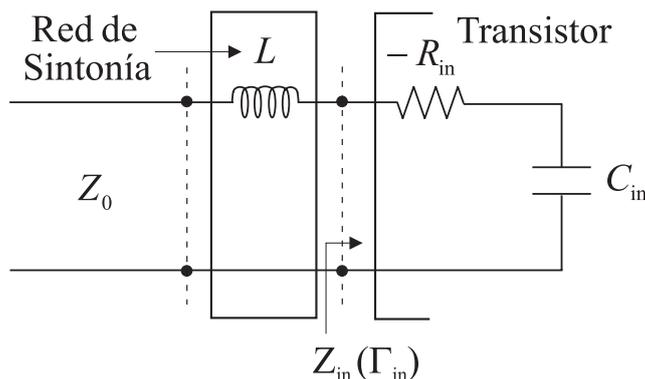


Figura 6: Red de sintonía a situar en el plano de entrada del transistor

Para sintetizar dichos valores de  $\Gamma_{in}$ , se debe cargar adecuadamente el acceso de salida del transistor ( $\Gamma_L$  en figura 2). Los posibles valores de  $\Gamma_L$  se deducen a partir de la siguiente expresión proporcionada en los datos del enunciado:

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

de la cual se puede despejar fácilmente que:

$$\Gamma_L = \frac{(S_{11} - \Gamma_{in})}{(\Delta - S_{22} \Gamma_{in})} \quad \text{con} \quad \Delta = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}$$

Así pues, para los dos posibles valores de  $\Gamma_{in}$  deducidos con anterioridad, se obtienen las siguientes soluciones:

$$\Gamma_{in,1} = 3,981 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{L,1} = 0,738 \angle -48,37^\circ$$

$$\Gamma_{in,2} = -3,981 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{L,2} = 1,076 \angle 14,42^\circ$$

De estos dos posibles valores para  $\Gamma_L$ , el único que puede sintetizarse mediante una red pasiva y sin pérdidas es el primero de ellos ( $\Gamma_{L,1}$ ), pues la segunda solución tiene  $|\Gamma_{L,2}| > 1$ . Así pues, escogiendo la primera de las dos soluciones, se tiene que la impedancia de carga ( $Z_L$ ) a sintetizar debe ser:

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{L,1}}{1 - \Gamma_{L,1}} = 40,345 - j97,787$$

d) La red de sintonía solicitada debe ser capaz de compensar la parte imaginaria de la impedancia de entrada ( $Z_{in}$ ) debida a efectos parásitos. Para ello, la solución más sencilla consiste en situar una simple bobina (con un valor de  $L$  adecuado) en serie con la impedancia de entrada descrita en el enunciado (ver figura 6).

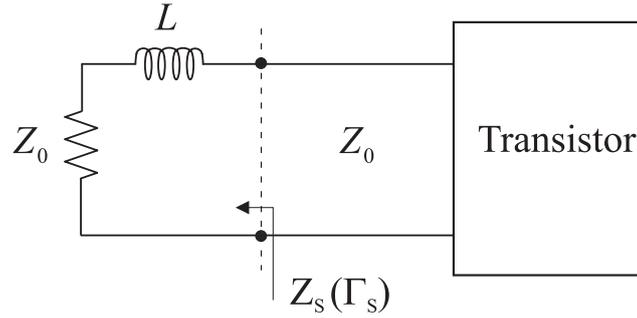


Figura 7: Impedancia de fuente vista en el plano de entrada del transistor

El valor de la bobina ( $L$ ) debe ser tal que compense el efecto del condensador ( $C_{in}$ ) a la frecuencia de trabajo  $f_0 = 3$  GHz, es decir:

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C_{in}} = \frac{1}{(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9)^2 \cdot 50 \cdot 10^{-12}} = 5,63 \cdot 10^{-11} \text{ H} = 56,3 \text{ pH}$$

e) Como la única fuente de ruido es el transistor, el factor de ruido global del amplificador se puede calcular haciendo uso de la expresión proporcionada en los datos del enunciado:

$$F = F_{\min} + 4r_N \frac{|\Gamma_{\text{opt}} - \Gamma_S|^2}{|1 + \Gamma_{\text{opt}}|^2 (1 - |\Gamma_S|^2)} \quad r_N = R_N/Z_0$$

donde  $F_{\min}$  debe expresarse en lineal ( $F_{\min} = 3 \text{ dB} = 2$ ),  $R_N = 25 \Omega$ ,  $Z_0 = 50 \Omega$  y  $\Gamma_{\text{opt}} = 0,35 \angle 120^\circ$ . Por su parte,  $\Gamma_S$  representa el factor de reflexión de fuente que ve el transistor desde su plano de entrada, que en este caso es el asociado a la impedancia de fuente ( $Z_S$ ) considerando presente la red de sintonía diseñada en el anterior apartado (ver figura 7).

Así pues, se tiene que:

$$Z_S = Z_0 + jL\omega_0 = 50 + j56,3 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 = 50 + j1,061$$

$$\Gamma_S = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} = 0,0001 + j0,0106 = 0,0106 \angle 89,39^\circ$$

Sustituyendo todos estos datos en la expresión anterior para el factor de ruido  $F$ , se obtiene finalmente que:

$$F = 2 + 4 \frac{25}{50} \frac{(0,3409)^2}{(0,8789)^2 [1 - (0,0106)^2]} = 2,3009 = 3,62 \text{ dB}$$

# MICROONDAS

Examen abril 05

M. Baquero, F. Peñaranda y V. Boria

## 13. ABRIL 05

### 13.1. PROBLEMA 1 (40 p)

(13 p) a.- Para una guía cuadrada de  $a = 20 \text{ mm}$  de lado y dieléctrico aire calcular que modos se propagarían a  $9,5 \text{ GHz}$  y poner las expresiones de sus campos.

(5 p) b.- Si se excita mediante una espira elemental ubicada en  $x = 10 \text{ mm}$  e  $y = 0$  y contenida en el plano  $ZY$  calcular que modos se excitarían a la frecuencia de trabajo  $f = 9,5 \text{ GHz}$ .

(12 p) c.- Para uno de los modos calculados en el apartado anterior calcular la atenuación que se produciría en  $\text{dBs}$  en un tramo de guía que tuviese  $20 \text{ m}$  de largo si la guía está fabricada de cobre.

(10 p) d.- Si esta guía se conecta a otra circular cuyo diámetro es de  $20 \text{ mm}$ , calcular el valor de la permitividad del dieléctrico que deberíamos poner en la guía circular para que hubiese adaptación entre las dos guías (despreciar los modos de orden superior y solo considerar un modo fundamental en cada una de las guías).

Datos:

$$\vec{E}_t = -\frac{1}{k_c^2}(\gamma \nabla_t E_z + j\omega\mu \nabla_t \times H_z \hat{z})$$

$$\vec{H}_t = -\frac{1}{k_c^2}(\gamma \nabla_t H_z - j\omega\epsilon \nabla_t \times E_z \hat{z})$$

$$Z_{TM} = \beta/\omega\epsilon ; Z_{TE} = \omega\mu/\beta$$

$$\epsilon_o = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu_o = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$\sigma_{\text{cobre}} = 0,58 \cdot 10^8 \text{ S/m}$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$n$	$P_{n1}$	$P_{n2}$	$P_{n3}$
0	2,405	5,520	2,654
1	3,892	7,016	10,174
2	9,135	8,487	41,620

$$J_n(P_{nl}) = 0$$

$n$	$P'_{n1}$	$P'_{n2}$	$P'_{n3}$
0	3,832	7,016	10,174
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,706	9,970

$$J'_n(P'_{nl}) = 0$$

a) Calculemos en primer lugar los posibles modos  $TE$ . La componente axial magnética en general viene dada por:

$$H_z = (A \sin k_x x + B \cos k_x x)(C \sin k_y y + D \cos k_y y)$$

Las condiciones de contorno nos dicen que:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0,a} = 0$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0,a} = 0$$

De las condiciones particularizadas en  $x = 0$  e  $y = 0$  se deduce que  $A = 0$  y  $C = 0$  respectivamente. De las condiciones en  $x = a$  e  $y = a$  se deduce que  $\text{sen } k_x a = 0$  y  $\text{sen } k_y a = 0$ . Por lo que deberá cumplirse que:

$$k_x a = n\pi$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$k_y a = m\pi$$

con  $m = 0, 1, 2, \dots$

Así pues el número de onda de corte de los modos  $TE$  vendrá dado por:

$$k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2}$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $m = 0, 1, 2, \dots$  pero nunca ambos enteros igual a cero simultáneamente.

Y puesto que  $k_c = 2\pi f_c/v$  las frecuencias de corte vendrán dadas por:

$$f_c = \frac{v}{2a} \sqrt{n^2 + m^2}$$

Para los modos  $TM$  la componente axial eléctrica sería:

$$E_z = (A \text{sen } k_x x + B \text{cos } k_x x)(C \text{sen } k_y y + D \text{cos } k_y y)$$

Y las condiciones de contorno en este caso serían en  $x = 0, a$  e  $y = 0, a$  que  $E_z = 0$ . De las condiciones en  $x = 0$  e  $y = 0$  se deduce que  $B = 0$  y  $D = 0$ . Y de las condiciones en  $x = a$  e  $y = a$  se deduce que  $k_x a = m\pi$  con  $m = 1, 2, \dots$  y  $k_y a = n\pi$  con  $n = 1, 2, \dots$ . Por lo que la expresión de las frecuencias de corte

serían las mismas que para los modos  $TM$  pero donde los coeficientes enteros no pueden ser cero.

Las primeras frecuencias de corte serían:

n	m	$f_{c_{mn}}(GHz)$
0	1	7,5
1	0	7,5
1	1	10,6

Luego a 9,5  $GHz$  solo se excitarán los modos con los índices  $n = 0, m = 1$  y  $n = 1, m = 0$ . Que al ser uno de ellos igual a cero deberán ser modos  $TE$ . Luego los modos que se transmitirán serán los  $TE_{01}$  y el  $TE_{10}$ . La expresión de los campos para el modo  $TE_{10}$  será:

$$\begin{aligned}
 H_z &= H_{zo} \cos k_x x \\
 H_x &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\gamma}{k_x} H_{zo} \sin k_x x \\
 H_y &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \\
 E_y &= -Z_{TE} H_x = -Z_{TE} \frac{\gamma}{k_x} H_{zo} \sin k_x x \\
 E_x &= Z_{TE} H_y = 0
 \end{aligned}$$

Y como  $Z_{TE} = \omega\mu/\beta$  quedarán las componentes del campo como:

$  \begin{aligned}  H_z &= H_{zo} \cos k_x x \\  H_x &= j H_{zo} \frac{\beta}{k_x} \sin k_x x \\  E_y &= -j H_{zo} \frac{\omega\mu}{k_x} \sin k_x x  \end{aligned}  $
---

Y las expresiones de los campos para el modo  $TE_{01}$  serán:

$$\begin{aligned}
 H_z &= H_{zo} \cos k_y y \\
 H_x &= 0 \\
 H_y &= j \frac{\beta}{k_y} H_{zo} \sin k_y y \\
 E_x &= Z_{TE} H_y = j H_{zo} \frac{\omega\mu}{k_y} \sin k_y y \\
 E_y &= 0
 \end{aligned}$$

Así pues las componentes del modo  $TE_{01}$  serán:

$$\begin{aligned} H_z &= H_{zo} \cos k_y y \\ H_y &= j H_{zo} \frac{\beta}{k_y} \operatorname{sen} k_y y \\ E_x &= j H_{zo} \frac{\omega \mu}{k_y} \operatorname{sen} k_y y \end{aligned}$$

b) Al estar contenida en el plano ZY la espira excitará el campo magnético en la dirección x. Habrá que ver en  $x = 10 \text{ mm}$  e  $y = 0$  que modos tienen componentes  $H_x$ . Para el modo  $TE_{10}$  tendremos:

$$H_x = j H_{zo} \frac{\beta}{k_x} \operatorname{sen} \frac{\pi a}{2} = j H_{zo} \frac{\beta}{k_x}$$

luego este modo si que se excitará.

Para el modo  $TE_{01}$  la componente  $H_x$  es nula y por lo tanto no se excitará.

c) La constante de atenuación viene dada por:

$$\alpha_c = \frac{P_{LC}}{2P_T}$$

Hay pues que calcular las pérdidas por unidad de longitud,  $P_{LC}$ , que viene dada por:

$$P_{LC} = \frac{1}{2} R_s \oint_C |\vec{J}_s|^2 dl = \frac{1}{2} R_s \left[ 2 \int_0^a |\hat{y} \times \vec{H}|^2 \Big|_{y=0} dx + 2 \int_0^a |\hat{x} \times \vec{H}|^2 \Big|_{x=0} dy \right]$$

$$P_{LC} = R_s \int_0^a (H_x^2 + H_z^2) \Big|_{y=0} dx + R_s \int_0^a |H_z|^2 \Big|_{x=0} dy$$

$$P_{LC} = R_s \int_0^a \left( H_{zo}^2 \frac{\beta^2}{k_x^2} \operatorname{sen}^2 k_x x + H_{zo}^2 \cos^2 k_x x \right) \Big|_{y=0} dx + R_s \int_0^a H_{zo}^2 \cos^2 k_x x \Big|_{x=0} dy$$

$$P_{LC} = R_s H_{zo}^2 \left[ \frac{\beta^2}{k_x^2} \int_0^a \operatorname{sen}^2 k_x x dx + \int_0^a \cos^2 k_x x dx \right] + R_s H_{zo}^2 \int_0^a \cos^2 k_x x \Big|_{x=0} dy$$

$$P_{LC} = R_s H_{zo}^2 \left[ \left( \frac{\beta^2}{k_x^2} + 1 \right) \frac{1}{2} a + a \right] = \frac{R_s H_{zo}^2}{2} a \left[ \frac{\beta^2}{k_x^2} + 3 \right]$$

En cuanto a la potencia transmitida  $P_T$  vendrá dada por:

$$P_T = \frac{1}{2} \int \int_S (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a (E_y \cdot H_x^*) (-\hat{z} \cdot \hat{z}) dx dy$$

$$P_T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a j H_{zo} \frac{\omega \mu}{k_x} \text{sen } k_x x \left( -j H_{zo}^* \frac{\beta}{k_x} \text{sen } k_x x \right) dx dy$$

$$P_T = \frac{1}{2} |H_{zo}|^2 \frac{\omega \mu}{k_x^2} \beta \int_0^a \int_0^a \text{sen}^2 k_x x dx dy$$

$$P_T = \frac{1}{2} |H_{zo}|^2 \frac{\omega \mu}{k_x^2} \beta \frac{1}{2} a^2$$

$$\alpha_c = \frac{R_s |H_{zo}|^2 \left( \frac{1}{2} a \left( \frac{\beta^2}{k_x^2} + 3 \right) \right)}{2 \frac{1}{2} |H_{zo}|^2 \frac{\omega \mu}{k_x^2} \beta \frac{1}{2} a^2} = \frac{R_s k_x^2}{\omega \mu \beta a} \left( \frac{\beta^2}{k_x^2} + 3 \right)$$

Particularizando esta expresión con las cifras del problema encontramos que  $\alpha_c$  valdrá:

$$\alpha_c = 0,0123 \text{ Np/m}$$

Las pérdidas en dBs para un tramo de 20 m serán:

$$L(\text{dB}) = -20 \log e^{-\alpha_c l} = 20 \alpha_c l \log e = 8,6859 \alpha_c l$$

$$L(\text{dB}) = 2,1444 \text{ dB}$$

d) El modo fundamental de la guía circular es el  $TE_{11}$ , cuya componente axial magnética viene dada por:

$$H_z = H_{zo} J_1(k_c \rho) \text{sen } \phi$$

La condición de contorno es:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right|_{\rho=r_o} = 0$$

Siendo  $r_o$  el radio de la guía circular. De la que se deduce que:

$$k_c r_o = P'_{11}$$

$$k_c = \frac{P'_{11}}{r_o}$$

Luego la impedancia de este modo vendrá dada por:

$$Z_{TE} = \frac{\omega \mu}{\beta}$$

con

$$\beta = \sqrt{k_1^2 - k_c^2} = k_1 \sqrt{1 - \frac{k_{c11}^2}{k_1^2}}$$

Mientras que en la guía rectangular la impedancia del modo fundamental era:

$$Z_{TE} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{\omega \mu}{k_0 \sqrt{1 - \frac{k_{c10}^2}{k_0^2}}}$$

con  $k_{c10} = \pi/a$ .

Igualando las dos impedancias quedará que:

$$\frac{\omega \mu}{k_1 \sqrt{1 - \frac{k_{c11}^2}{k_1^2}}} = \frac{\omega \mu}{k_0 \sqrt{1 - \frac{k_{c10}^2}{k_0^2}}}$$

Es decir que:

$$k_0 \sqrt{1 - \frac{k_{c10}^2}{k_0^2}} = k_1 \sqrt{1 - \frac{k_{c11}^2}{k_1^2}}$$

de donde se deduce que se debe cumplir que:

$$1 - \frac{k_{c10}^2}{k_0^2} = \frac{k_1^2}{k_0^2} \left( 1 - \frac{k_{c11}^2}{k_1^2} \right)$$

Y sustituyendo por las expresiones de los números de onda de corte tendremos que:

$$1 - \frac{\pi^2/a^2}{\omega^2/c^2} = \frac{c^2}{v^2} \left( 1 - \frac{P_{11}'^2/r_o^2}{\omega^2/v^2} \right)$$

$$1 - \frac{\pi^2/a^2}{\omega^2/c^2} = \epsilon_r \left( 1 - \frac{P_{11}'^2/r_o^2}{\omega^2\epsilon_r/c^2} \right)$$

$$1 - \frac{\pi^2/a^2}{\omega^2/c^2} = \left( \epsilon_r - \frac{P_{11}'^2/r_o^2}{\omega^2/c^2} \right)$$

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\pi^2/a^2}{\omega^2/c^2} + \frac{P_{11}'^2/r_o^2}{\omega^2/c^2}$$

Y como  $r_o = a/2$  resulta que:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\pi^2/a^2}{\omega^2/c^2} + \frac{P_{11}'^2/a^2/4}{\omega^2/c^2}$$

$$\epsilon_r = 1 - \frac{c^2}{\omega^2 a^2} (\pi^2 - 4P_{11}'^2)$$

Sustituyendo valores resulta:

$$\boxed{e_r = 1,2329}$$

### 13.2. PROBLEMA 2 (40 p)

Se pretende analizar el anillo cuadrado de lado igual a  $\lambda/4$  mostrado en la figura 1, cuyos 4 accesos de impedancia característica normalizada ( $Z_0 = 1$ ) se sitúan en los vértices del cuadrado. Las líneas de transmisión que definen el anillo tienen impedancias características de valores  $Z_1 = 1$  y  $Z_2 = \sqrt{2}$ .

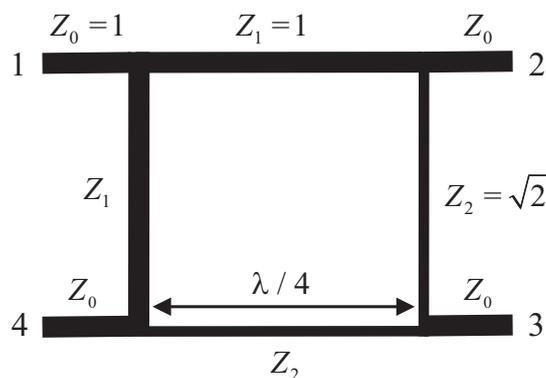


Figura 1: Anillo cuadrado de 4 accesos a estudiar

Se pide responder a las siguientes cuestiones:

- (3 p) a.- ¿La matriz de parámetros  $S$  de esta red de 4 accesos es simétrica? ¿Por qué? ¿Dicha red presenta simetría respecto de algún plano? En caso afirmativo indicar de qué plano se trata.
- (14 p) b.- Obtener en primer lugar los valores de los parámetros  $S_{11}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{31}$  y  $S_{41}$  de la red. Para ello, tras cargar debidamente los accesos del anillo, se recomienda hacer uso de la simetría física de dicha estructura cargada.
- (7 p) c.- Encontrar seguidamente los valores de los parámetros  $S_{33}$ ,  $S_{23}$  y  $S_{43}$  de la red siguiendo un procedimiento análogo al utilizado en la resolución del apartado anterior.
- (10 p) d.- Deducir a continuación los valores de los parámetros  $S_{22}$ ,  $S_{42}$  y  $S_{44}$  de la red. Para ello, se recomienda cargar los accesos correspondientes del anillo y resolver la estructura simétrica resultante.
- (6 p) e.- A partir de los resultados anteriores, escribir la matriz de parámetros  $S$  del anillo propuesto. A la vista de dicha matriz, ¿se podría utilizar el anillo como un divisor de potencia de 1 entrada y 3 salidas? Justificar la respuesta e indicar la fracción de potencia incidente que se obtendría en cada salida. Indicar otras ventajas e inconvenientes de este divisor.

Nota: Para resolver este problema desprece el efecto que introducen los codos en ángulo recto (considérellos como simples uniones entre 2 líneas de transmisión).

a) La red de 4 accesos propuesta es pasiva, lineal y con dieléctrico isótropo (sin ferritas), por lo que se trata de una red recíproca y en consecuencia se puede afirmar que la matriz de parámetros  $S$  de dicha red será simétrica.

Observando la red propuesta, se comprueba que existe un claro Plano de Simetría (PS) que coincide con una diagonal del anillo cuadrado propuesto (la que contiene a los accesos 1 y 3), tal y como se muestra en la siguiente figura.

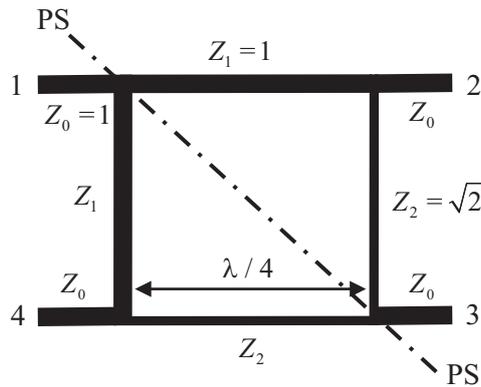


Figura 2: Plano de Simetría (PS) del anillo cuadrado propuesto

b) De acuerdo con la definición de los parámetros  $S_{11}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{31}$  y  $S_{41}$ , para su cálculo se debe cargar los accesos 2, 3 y 4 de la red con sus respectivas impedancias características (es decir,  $Z_0 = 1$ ), dando lugar a la estructura simétrica mostrada en la figura 3.

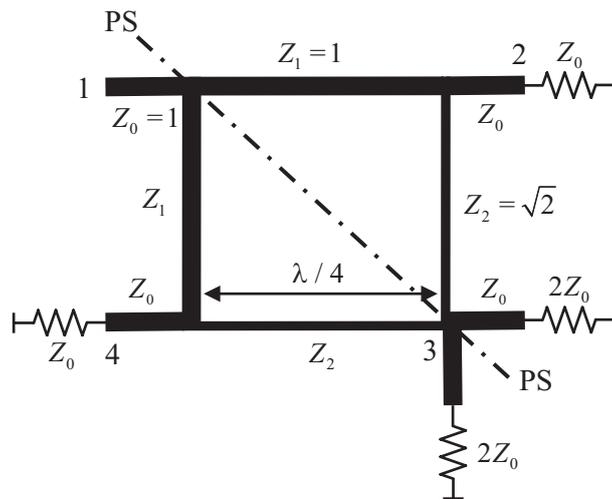


Figura 3: Anillo cargado para calcular los parámetros  $S_{11}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{31}$  y  $S_{41}$

Observando la simetría física de la estructura cargada recién mostrada, y teniendo en cuenta que la misma se debe excitar desde el acceso 1 (situado en el Plano de Simetría) para el cálculo de los parámetros  $S_{11}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{31}$  y  $S_{41}$ , se concluye que en el acceso 3 del anillo se dan condiciones de circuito abierto. Por tanto, la geometría a considerar para la obtención de dichos parámetros  $S$  es la siguiente:

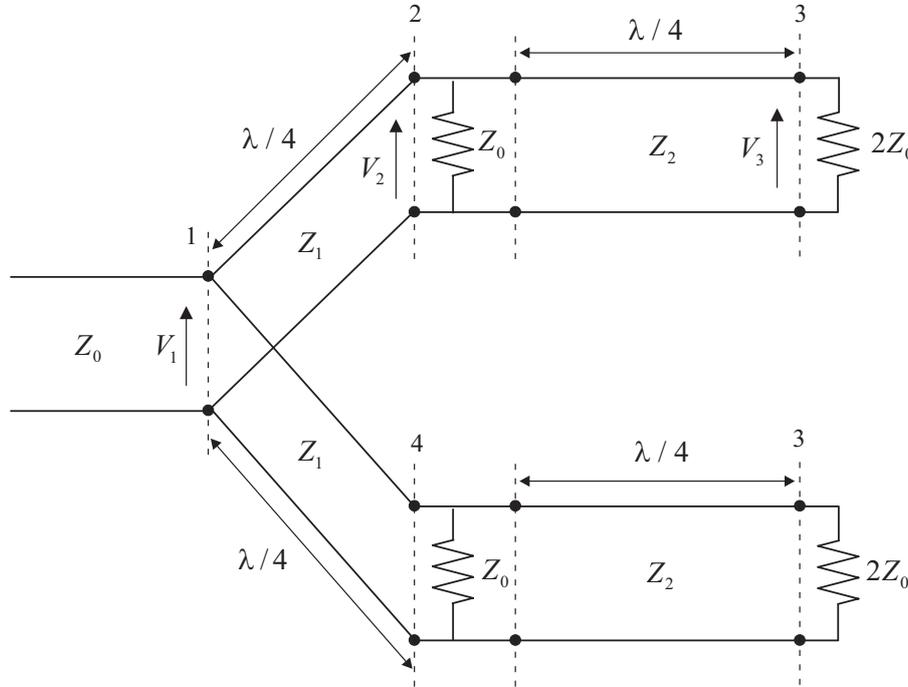


Figura 4: Geometría para el cálculo de los parámetros  $S_{11}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{31}$  y  $S_{41}$

Para obtener el parámetro  $S_{11}$ , se debe calcular la impedancia de entrada en el acceso 1 de la estructura anterior, es decir:

$$Z_{in1} = Z_{ins} // Z_{ini} = Z_{ins}/2$$

donde  $Z_{ins}$  es la impedancia de la rama superior vista desde el acceso 1 (que por simetría es igual a la impedancia de la rama inferior  $Z_{ini}$ ). Para calcular el valor de  $Z_{ins}$ , se partirá del extremo de la rama superior cargado con una impedancia de valor  $2Z_0$ . Teniendo en cuenta que el tramo de línea de impedancia característica  $Z_2$  tiene una longitud de  $\lambda/4$  (actúa como un inversor de impedancias), a la entrada de dicha línea se verá la siguiente impedancia (que llamaremos  $Z_{in3}$ ):

$$Z_{in3} = \frac{(Z_2)^2}{2Z_0} = \frac{(\sqrt{2}Z_0)^2}{2Z_0} = Z_0 = 1$$

Esta impedancia se encuentra en paralelo con la impedancia de carga del acceso 2 ( $Z_0$ ), por lo que la impedancia de carga total de la siguiente línea de longitud  $\lambda/4$  (que denominaremos  $Z_{l2}$ ) tendrá un valor de:

$$Z_{l2} = Z_0 // Z_0 = Z_0/2 = 1/2$$

y por tanto la impedancia  $Z_{in,s}$  buscada presentará el siguiente valor:

$$Z_{in,s} = \frac{(Z_1)^2}{Z_{l2}} = \frac{(Z_0)^2}{Z_0/2} = 2 Z_0 = 2$$

De este modo, se concluye fácilmente que:

$$Z_{in1} = Z_{in,s}/2 = Z_0 = 1$$

y por tanto:

$$S_{11} = \frac{Z_{in1} - Z_0}{Z_{in1} + Z_0} = 0$$

A continuación, se calculará el parámetro  $S_{21}$  haciendo uso de la expresión

$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11})$$

donde las tensiones  $V_1$  y  $V_2$  se muestran en la figura 4. Para el cálculo de dicha relación entre tensiones, se debe resolver la estructura mostrada a continuación.

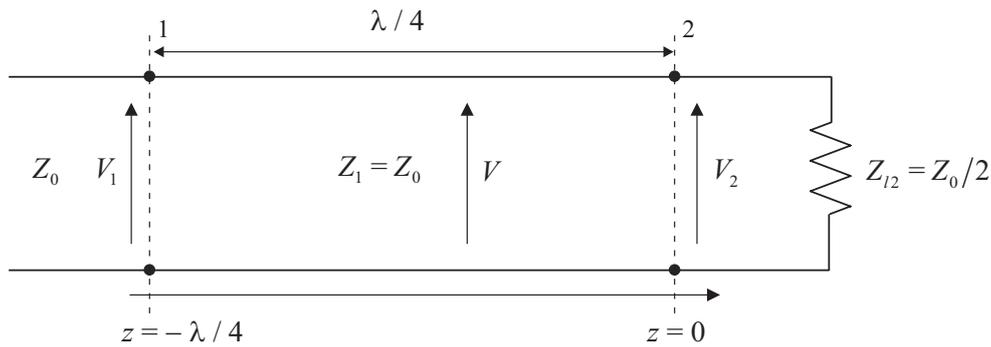


Figura 5: Geometría para el cálculo de la relación  $V_2/V_1$

La evolución de la tensión  $V$  en la línea de la figura 5 presenta el aspecto:

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}$$

donde las ondas  $V^+$  y  $V^-$  se relacionan a través del factor de reflexión en el plano de carga de la línea:

$$\rho_{l2} = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_{l2} - Z_1}{Z_{l2} + Z_1} = \frac{(Z_0/2) - Z_0}{(Z_0/2) + Z_0} = -\frac{1}{3}$$

Las tensiones  $V_1$  y  $V_2$  se deducen como los valores de  $V(z)$  en  $z = -\lambda/4$  y en  $z = 0$ , respectivamente, por lo que:

$$V_1 = V(z = -\lambda/4) = j V^+ - j V^- = j V^+ (1 - \rho_{l2})$$

$$V_2 = V(z = 0) = V^+ + V^- = V^+ (1 + \rho_{l2})$$

y por tanto el cociente de tensiones buscado presenta el siguiente valor:

$$\frac{V_2}{V_1} = -j \frac{(1 + \rho_{l2})}{(1 - \rho_{l2})} = -j \frac{Z_{l2}}{Z_1} = -j \frac{1}{2}$$

Así pues, el parámetro  $S_{21}$  buscado tendrá el siguiente valor:

$$S_{21} = -j \frac{1}{2} (1 + 0) = -j \frac{1}{2}$$

Observando la simetría de la estructura mostrada en la figura 4, se concluye fácilmente que:

$$S_{41} = S_{21} = -j \frac{1}{2}$$

Finalmente, se procede al cálculo del parámetro  $S_{31}$ , para lo cual se hará uso de la siguiente expresión:

$$S_{31} = \frac{V_3}{V_1} (1 + S_{11}) = \frac{V_3}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} \frac{V_2}{V_1}$$

donde el valor del cociente  $V_2/V_1$  se termina de deducir, y para el cálculo del cociente  $V_3/V_2$  se observa (ver figura 4) que debe resolverse una estructura equivalente a la mostrada en la figura 5, por lo que se puede afirmar:

$$\frac{V_3}{V_2} = -j \frac{(1 + \rho_{l3})}{(1 - \rho_{l3})} = -j \frac{Z_{l3}}{Z_2} = -j \frac{2Z_0}{\sqrt{2}Z_0} = -j \sqrt{2}$$

y por tanto se tiene:

$$S_{31} = (-j \sqrt{2}) \left(-j \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) Para encontrar los valores de los parámetros  $S_{33}$ ,  $S_{23}$  y  $S_{43}$ , se seguirá un procedimiento análogo al del apartado anterior, que en este caso se inicia cargando los accesos 1, 2 y 4 de la red con la impedancia característica  $Z_0 = 1$ , lo que da lugar a la estructura simétrica de la figura 6.

De nuevo, al descomponer la impedancia de carga  $Z_0$  del acceso 1 en 2 impedancias en paralelo de valor  $2Z_0$ , y teniendo en cuenta que la estructura se excita ahora por el acceso 3, el anillo cargado de la figura 6 es simétrico respecto del plano PS, y se puede afirmar que en el acceso 1 se dan condiciones de circuito abierto. Así pues, la geometría a estudiar para obtener los parámetros  $S_{33}$ ,  $S_{23}$  y  $S_{43}$  es la que se ofrece en la figura 7.

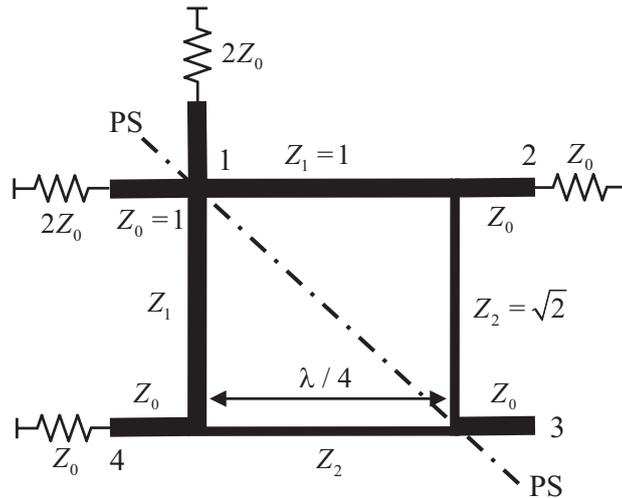


Figura 6: Anillo cargado para calcular los parámetros  $S_{33}$ ,  $S_{23}$  y  $S_{43}$

Procediendo de igual modo que en el cálculo del parámetro  $S_{11}$ , se debe obtener la impedancia de entrada en el acceso 3 de la estructura de la figura 7, es decir:

$$Z_{in3} = Z_{ins} // Z_{ini} = Z_{ins}/2$$

donde  $Z_{ins}$  es la impedancia de la rama superior que se ve desde el acceso 3 (que por simetría es igual a la impedancia de la rama inferior  $Z_{ini}$ ). Para calcular el valor de  $Z_{ins}$ , se partirá del extremo de la rama superior cargado con

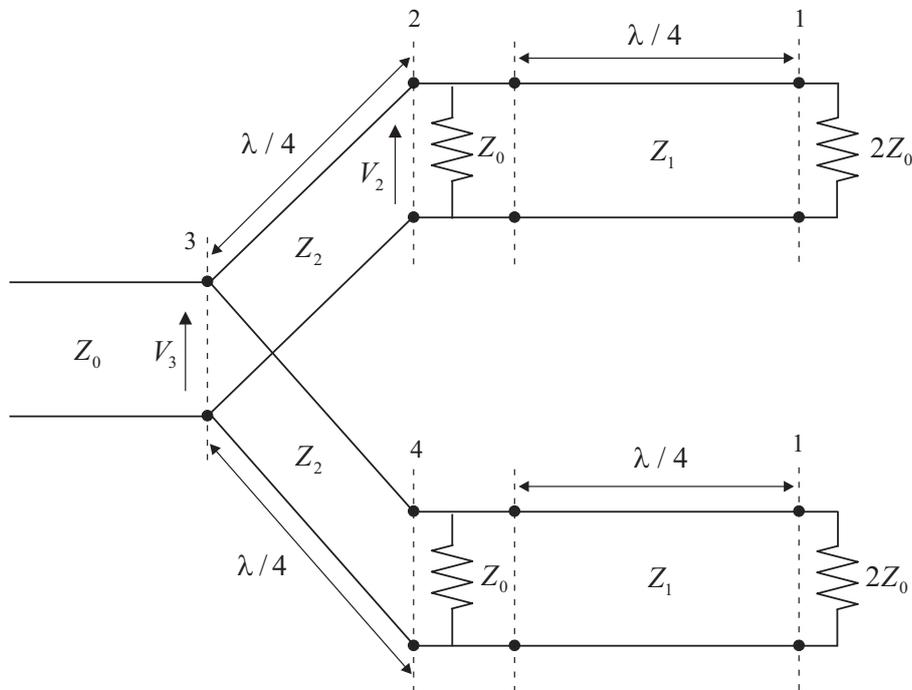


Figura 7: Geometría para el cálculo de los parámetros  $S_{33}$ ,  $S_{23}$  y  $S_{43}$

una impedancia de valor  $2Z_0$ . Teniendo en cuenta que la línea de impedancia característica  $Z_1$  tiene una longitud de  $\lambda/4$ , a la entrada de dicha línea se verá la siguiente impedancia (que llamaremos  $Z_{in1}$ ):

$$Z_{in1} = \frac{(Z_1)^2}{2Z_0} = \frac{(Z_0)^2}{2Z_0} = \frac{Z_0}{2} = \frac{1}{2}$$

Esta impedancia se encuentra en paralelo con la impedancia de carga del acceso 2 ( $Z_0$ ), por lo que la impedancia de carga total de la siguiente línea de longitud  $\lambda/4$  (que denominaremos  $Z_{l2}$ ) tendrá un valor de:

$$Z_{l2} = Z_0 // (Z_0/2) = Z_0/3 = 1/3$$

y por tanto la impedancia  $Z_{ins}$  buscada presentará el siguiente valor:

$$Z_{ins} = \frac{(Z_2)^2}{Z_{l2}} = \frac{(\sqrt{2}Z_0)^2}{Z_0/3} = 6Z_0 = 6$$

De este modo, se concluye fácilmente que:

$$Z_{in3} = Z_{ins}/2 = 3Z_0 = 3$$

y por tanto:

$$S_{33} = \frac{Z_{in3} - Z_0}{Z_{in3} + Z_0} = \frac{1}{2}$$

Para el cálculo del parámetro  $S_{23}$  se evaluará la expresión:

$$S_{23} = \frac{V_2}{V_3} (1 + S_{33})$$

donde en este caso, para calcular el cociente  $V_2/V_3$ , se pueden volver a utilizar directamente las expresiones determinadas en el apartado anterior para el cálculo de  $V_2/V_1$ . Es decir, se tendrá que:

$$\frac{V_2}{V_3} = -j \frac{(1 + \rho_{l2})}{(1 - \rho_{l2})} = -j \frac{Z_{l2}}{Z_2} = -j \frac{Z_0/3}{\sqrt{2}Z_0} = -j \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

y sustituyendo en la expresión del parámetro  $S_{23}$  se obtiene:

$$S_{23} = -j \frac{1}{3\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = -j \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

En cuanto al parámetro  $S_{43}$ , teniendo en cuenta la simetría de la estructura bajo análisis, se puede afirmar que:

$$S_{43} = S_{23} = -j \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Obsérvese que en este apartado no se pregunta por el valor del parámetro  $S_{13}$ , ya que debido a la propiedad de reciprocidad del anillo bajo estudio se puede afirmar directamente que:

$$S_{13} = S_{31} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

lo cual se podría también comprobar numéricamente resolviendo la estructura circuital de la figura 7.

d) Los parámetros  $S_{22}$ ,  $S_{42}$  y  $S_{44}$  de la red tienen en común que para su cálculo se deben cargar los accesos 1 y 3 de la red con sus respectivas impedancias características (es decir,  $Z_0 = 1$ ). Esta carga da lugar a la estructura mostrada a continuación.

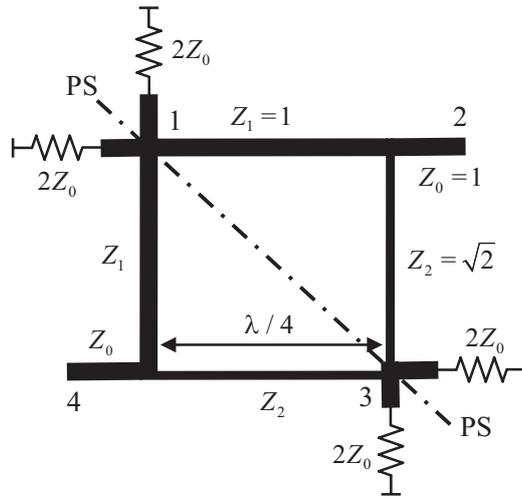


Figura 8: Anillo cargado para calcular los parámetros  $S_{22}$ ,  $S_{42}$  y  $S_{44}$

Se observa pues que los parámetros  $S$  buscados ( $S_{22}$ ,  $S_{42}$  y  $S_{44}$ ) corresponden a los de una red de 2 accesos (accesos 2 y 4 en la figura 8) con un claro Plano de Simetría (PS).

Aplicando pues la propiedad de simetría para una red con un número par de accesos (en este caso 2) como la mostrada en la figura 8, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} S_{22} & S_{24} \\ S_{42} & S_{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho^e + \rho^o & \rho^e - \rho^o \\ \rho^e - \rho^o & \rho^e + \rho^o \end{pmatrix}$$

En la expresión anterior,  $\rho^e$  y  $\rho^o$  son los factores de reflexión de la red mostrada en la figura 8 sustituyendo el PS, respectivamente, por una Pared Magnética (PM) y por una Pared Eléctrica (PE).

Así pues, para el cálculo del factor de reflexión  $\rho^e$ , se debe considerar el siguiente circuito.

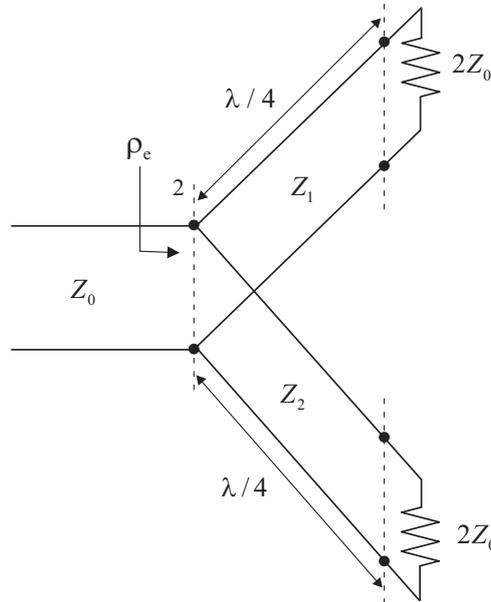


Figura 9: Red de 1 acceso, tras sustituir PS por PM, para calcular  $\rho^e$

Para obtener el valor de  $\rho^e$  buscado, se debe obtener previamente la impedancia de entrada en el acceso 2 de la estructura anterior, es decir:

$$Z_{in2}^e = Z_{ins}^e // Z_{ini}^e$$

donde en este caso se deduce fácilmente que:

$$Z_{ins}^e = \frac{Z_1^2}{2Z_0} = \frac{Z_0^2}{2Z_0} = \frac{Z_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Z_{ini}^e = \frac{Z_2^2}{2Z_0} = \frac{(\sqrt{2}Z_0)^2}{2Z_0} = Z_0 = 1$$

y por tanto:

$$Z_{in2}^e = (Z_0/2) // Z_0 = \frac{Z_0}{3} = \frac{1}{3}$$

Así pues, el valor de  $\rho^e$  será el siguiente:

$$\rho^e = \frac{Z_{in2}^e - Z_0}{Z_{in2}^e + Z_0} = \frac{Z_0/3 - Z_0}{Z_0/3 + Z_0} = -\frac{1}{2}$$

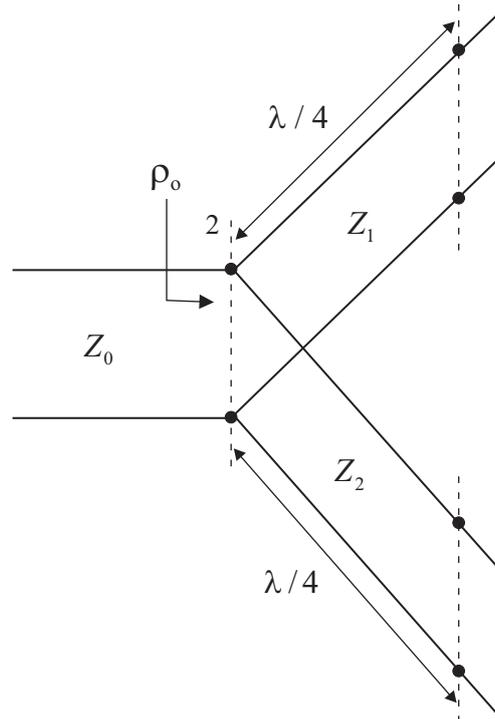


Figura 10: Red de 1 acceso, tras sustituir PS por PE, para calcular  $\rho^o$

Con respecto al cálculo del factor de reflexión  $\rho^o$ , se debe estudiar la configuración circuital de la figura 10.

Procediendo de forma similar, para obtener el valor de  $\rho^o$  se debe calcular la impedancia de entrada en el acceso 2 de la estructura anterior, es decir:

$$Z_{in2}^o = Z_{ins}^o // Z_{ini}^o$$

donde en este caso se deduce fácilmente que:

$$Z_{ins}^o = \frac{Z_1^2}{0} = \infty$$

$$Z_{ini}^o = \frac{Z_2^2}{0} = \infty$$

y por tanto:

$$Z_{in2}^o = \infty$$

Así pues,  $\rho^o$  tendrá el siguiente valor:

$$\rho^o = \frac{Z_{in2}^o - Z_0}{Z_{in2}^o + Z_0} = 1$$

Una vez conocidos los valores de  $\rho^e$  y  $\rho^o$ , se concluye que los parámetros  $S_{22}$ ,  $S_{42}$  y  $S_{44}$  de la estructura original tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} S_{22} = S_{44} &= \frac{1}{2} (\rho^e + \rho^o) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4} \\ S_{24} = S_{42} &= \frac{1}{2} (\rho^e - \rho^o) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

e) De los resultados obtenidos en los apartados anteriores, se concluye que la matriz de parámetros  $S$  del anillo propuesto (haciendo uso de la simetría de dicha matriz) tiene el siguiente aspecto:

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j & -\sqrt{2} & -j \\ -j & 1/2 & -j/\sqrt{2} & -3/2 \\ -\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 1 & -j/\sqrt{2} \\ -j & -3/2 & -j/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

A la vista de dicha matriz, se puede afirmar que SÍ se puede utilizar el anillo propuesto como un divisor de potencia de 1 entrada y 3 salidas. Como entrada del divisor conviene escoger el acceso 1 (que está adaptado, pues  $S_{11} = 0$ ) y como salidas los accesos 2, 3 y 4 que deberían terminarse en sus respectivas impedancias características (es decir, con  $Z_0 = 1$ ).

Bajo las citadas condiciones de funcionamiento, en cada uno de los accesos de salida del divisor se entregaría la siguiente potencia:

$$P_{s2} = \frac{1}{2} |b_2|^2 = \frac{1}{2} |S_{21}|^2 |a_1|^2 = |S_{21}|^2 P_{i1} = 0,25 P_{i1}$$

$$P_{s3} = \frac{1}{2} |b_3|^2 = \frac{1}{2} |S_{31}|^2 |a_1|^2 = |S_{31}|^2 P_{i1} = 0,50 P_{i1}$$

$$P_{s4} = \frac{1}{2} |b_4|^2 = \frac{1}{2} |S_{41}|^2 |a_1|^2 = |S_{41}|^2 P_{i1} = 0,25 P_{i1}$$

De estos resultados, se concluye que la potencia entrante en el divisor por el acceso 1, estando terminados los otros 3 accesos con  $Z_0$  (en este caso,  $Z_0 = 1$ ), se reparte del siguiente modo: un 25% (una cuarta parte) sale por el acceso 2, un 50% (la mitad) sale por el acceso 3, y el 25% restante (otra cuarta parte) sale por el acceso 4.

Así pues, una clara ventaja de este divisor de potencia, implementado sólo con líneas de transmisión y sin ningún elemento resistivo, es que reparte toda la potencia entrante al mismo entre los otros accesos, y no disipa internamente potencia (es decir, no tiene pérdidas). Como inconveniente, señalar que el reparto de dicha potencia entre los accesos de salida no es equitativo.

Otro inconveniente de este divisor es que está implementado con líneas de transmisión de longitud  $\lambda/4$ , por lo que sólo será operativo a aquella frecuencia a la cual las longitudes eléctricas de sus líneas sean iguales a  $\lambda/4$ .

Un último inconveniente de este divisor es que los accesos de salida no están desacoplados entre sí, pues los parámetros  $S$  que relacionan los accesos 2, 3 y 4 no son nulos. Esto puede suponer que cualquier pequeña desadaptación en los accesos de salida provoque un reparto de la potencia entrante entre dichos accesos diferente al nominal comentado anteriormente (es decir, un 25 % para el acceso 2, un 50 % para el acceso 3 y un 25 % para el acceso 4).

## 13.3 PROBLEMA 3 (40p)

Tenemos un transistor, cuyos parámetros  $S$  a la frecuencia de trabajo  $f=2.45$  GHz son, respecto de la impedancia de referencia  $Z_0=50 \Omega$ :

$$S = \begin{pmatrix} 0.63_{-96^\circ} & 0.80_{15^\circ} \\ 1.30_{-53^\circ} & 0.62_{98^\circ} \end{pmatrix}$$

También tenemos los parámetros que caracterizan el ruido de este transistor:  $F_{\min}=2.1$  dB,  $r_n=R_n/Z_0=0.12$  y  $\Gamma_{\text{opt}}=0.68_{147^\circ}$

En la carta de Smith que se adjunta están representados los círculos de estabilidad de fuente y carga, así como los círculos de ruido, ganancia  $G_1$  y ganancia  $G_2$  constantes (suponga en todo el problema un diseño unilateral):

RUIDO (dB)			$G_1$ (dB)			$G_2$ (dB)		
Centro	Radio	Valor	Centro	Radio	Valor	Centro	Radio	Valor
0.672 <sub>147°</sub>	0.082	2.15	0.622 <sub>96°</sub>	0.090	2.10	0.606 <sub>98°</sub>	0.118	1.95
0.639 <sub>147°</sub>	0.185	2.35	0.597 <sub>96°</sub>	0.182	1.81	0.589 <sub>98°</sub>	0.178	1.75
0.608 <sub>147°</sub>	0.250	2.55	0.580 <sub>96°</sub>	0.226	1.61	0.572 <sub>98°</sub>	0.224	1.55
0.579 <sub>147°</sub>	0.301	2.75	0.570 <sub>96°</sub>	0.247	1.50	0.555 <sub>98°</sub>	0.262	1.35
0.551 <sub>147°</sub>	0.345	2.95	0.558 <sub>96°</sub>	0.273	1.35	0.538 <sub>98°</sub>	0.296	1.15
0.518 <sub>147°</sub>	0.393	3.20	0.537 <sub>96°</sub>	0.312	1.10			
0.469 <sub>147°</sub>	0.459	3.60	0.489 <sub>96°</sub>	0.393	0.50			
0.426 <sub>147°</sub>	0.515	4.00	0.451 <sub>96°</sub>	0.451	0.00			
0.391 <sub>147°</sub>	0.558	4.35	0.415 <sub>96°</sub>	0.502	-0.50			
0.373 <sub>147°</sub>	0.581	4.55	0.381 <sub>96°</sub>	0.549	-1.00			
0.355 <sub>147°</sub>	0.602	4.75	0.351 <sub>96°</sub>	0.587	-1.45			
			0.327 <sub>96°</sub>	0.618	-1.85			
			0.309 <sub>96°</sub>	0.640	-2.15			

Con esta información, se pide:

(4p) a) Determine cuáles son las zonas ESTABLES, para carga y fuente, de este transistor –dibuje una réplica de la carta de smith e indique sobre ella dichas zonas–.

(4p) b) Si buscamos una configuración estable de mínimo ruido, ¿cuál sería este ruido mínimo que se puede conseguir y cuál el coeficiente de reflexión que lo proporciona?. Indique también qué ganancia  $G_1$  debida a la fuente obtendría con dicha impedancia de fuente.

(4p) c) Por el contrario, si quisiéramos una configuración estable de máxima ganancia  $G_1$  (debida a la fuente), ¿cuál sería esta ganancia, con qué coeficiente de reflexión de fuente se conseguiría y qué ruido tendríamos?

(9p) d) Si ahora deseamos tener un factor de ruido  $F < 2.95$  dB, ¿qué ganancia  $G_1$  máxima, debida a la fuente, podemos conseguir y con qué coeficiente de reflexión de fuente?

(4p) e) Respecto al término  $G_2$ , ganancia debida a la carga, ¿qué valor máximo estable podemos conseguir y con qué coeficiente de reflexión de carga?

(15p) f) Si nos fijamos una ganancia máxima unilateral  $G_u > 4.95$  dB, ¿qué factor de ruido mínimo podemos conseguir, suponiendo que  $G_2$  es máxima, según el apartado anterior?. Determine un coeficiente de reflexión de fuente que satisfaga esta condición.

Datos:

$$1) \text{ Ganancia: } G_T = |S_{21}|^2 \cdot \frac{(1 - |\Gamma_S|^2) \cdot (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11} \cdot \Gamma_S) \cdot (1 - S_{22} \cdot \Gamma_L) - S_{21} \cdot S_{12} \cdot \Gamma_L \cdot \Gamma_S|^2}$$

2) La impedancia de referencia en todo el circuito es  $Z_0=50 \Omega$ .

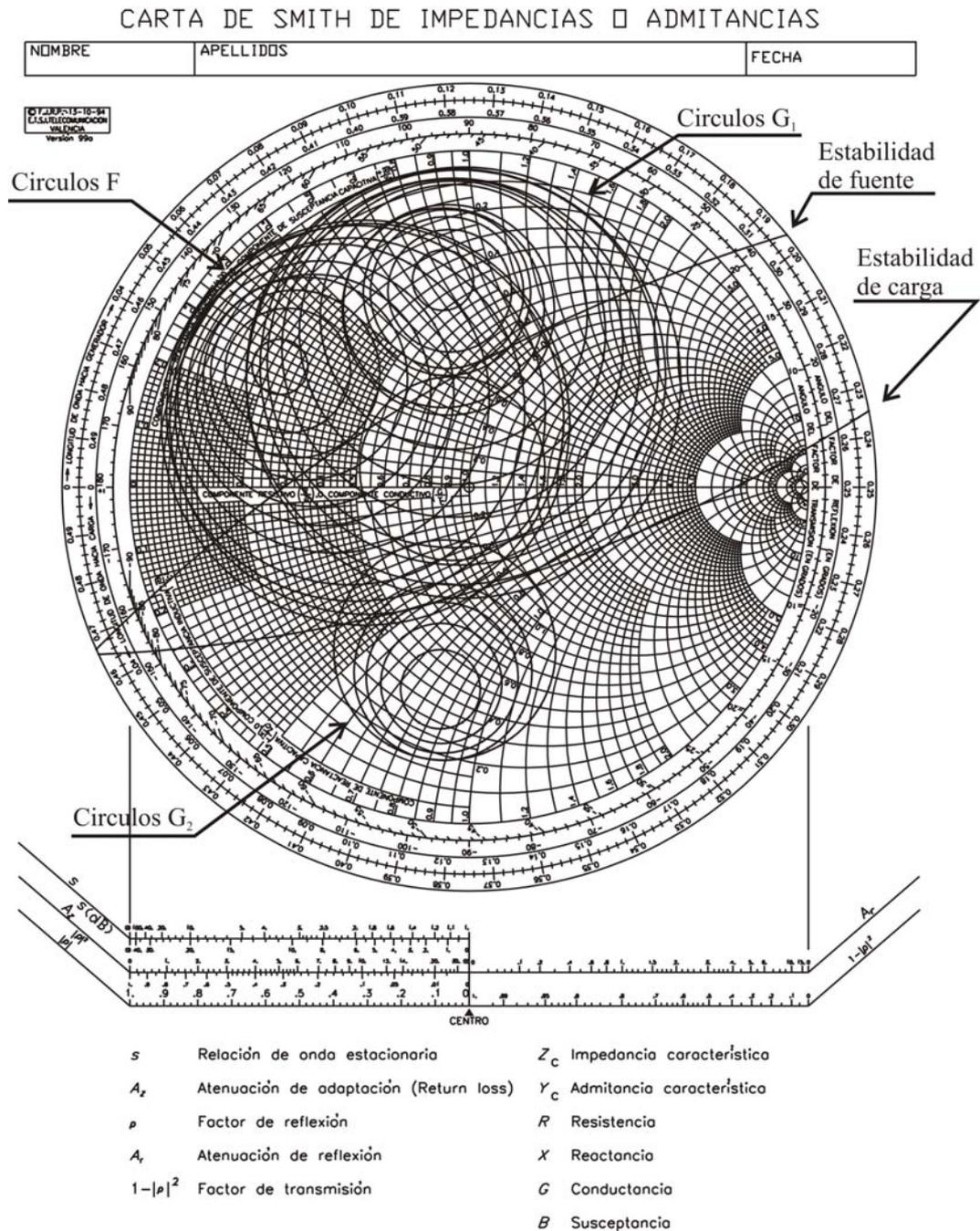


Figura 3.1.-Carta de Smith con círculos de ruido y ganancia

a) Para determinar las zonas estables e inestables, recordamos los valores de los coeficientes de reflexión a la entrada y a la salida de un cuadripolo:

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} \cdot S_{21} \cdot \Gamma_L}{1 - S_{22} \cdot \Gamma_L} ; \Gamma_{out} = S_{22} + \frac{S_{12} \cdot S_{21} \cdot \Gamma_S}{1 - S_{11} \cdot \Gamma_S} \quad (3.1)$$

Para determinar la zona estable de carga (lugar geométrico de los coeficientes de reflexión de carga que hacen que  $|\Gamma_{in}| < 1$ ), debemos fijarnos en el círculo de estabilidad de carga. Comprobamos que cuando la carga es  $\Gamma_L = 0$  (centro de la carta de Smith),  $|\Gamma_{in}| = |S_{11}| < 1$ , por lo que este punto es estable, concluyendo entonces que la zona estable de carga es la INTERIOR al círculo (ver figura 3.2).

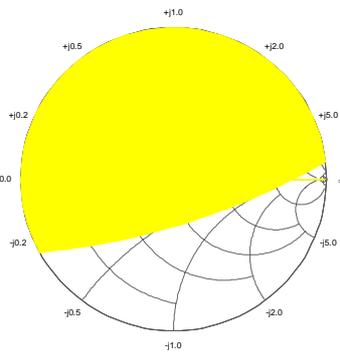


Figura 3.2.-Zona estable de CARGA

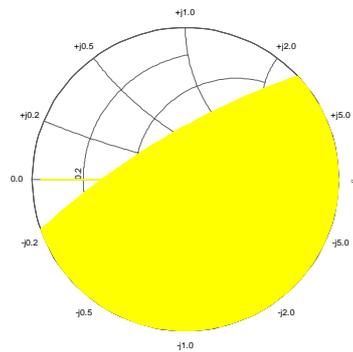


Figura 3.3.-Zona estable de FUENTE

De forma dual, para determinar la zona estable de fuente (lugar geométrico de los coeficientes de reflexión de fuente que hacen que  $|\Gamma_{out}| < 1$ ), debemos fijarnos en el círculo de estabilidad de fuente. Comprobamos que cuando la fuente es  $\Gamma_S = 0$  (centro de la carta de Smith),  $|\Gamma_{out}| = |S_{22}| < 1$ , por lo que este punto es estable, concluyendo entonces que la zona estable de carga es de nuevo la INTERIOR al círculo (ver figura 3.3).

b) Para obtener el mínimo ruido sabemos que debemos colocar en la fuente el coeficiente de reflexión de fuente óptimo  $\Gamma_{opt}$ . Pero en esta ocasión este punto está fuera del círculo de estabilidad de fuente, es decir en zona INESTABLE, por lo que no podemos conseguir el ruido mínimo  $F_{min} = 2.1$  dB. Debemos buscar, entonces, un punto que, estando en zona estable (zona interior), nos dé el menor factor de ruido posible. Para buscar este punto bastará con ir viendo los círculos de ruido constante, hasta que encontramos que hay uno que es tangente al círculo de estabilidad. Este punto de tangencia nos dará el coeficiente de reflexión de fuente que nos da el mínimo ruido estando ya en zona estable. El factor de ruido es  $F = 2.55$  dB y el coeficiente de reflexión de fuente:

$$\Gamma_S = -0.3713 + j \cdot 0.1233 = 0.3912_{161.63^\circ} \Rightarrow Z_S = Z_S \cdot \frac{1 + \Gamma_S}{1 - \Gamma_S} = 22.34 + j \cdot 6.50 \quad (3.2)$$

Además, podemos comprobar que por este punto pasa el círculo de ganancia constante  $G_1 = 0.00 \text{ dB}$ , por lo que este será el término de ganancia debido a la fuente.

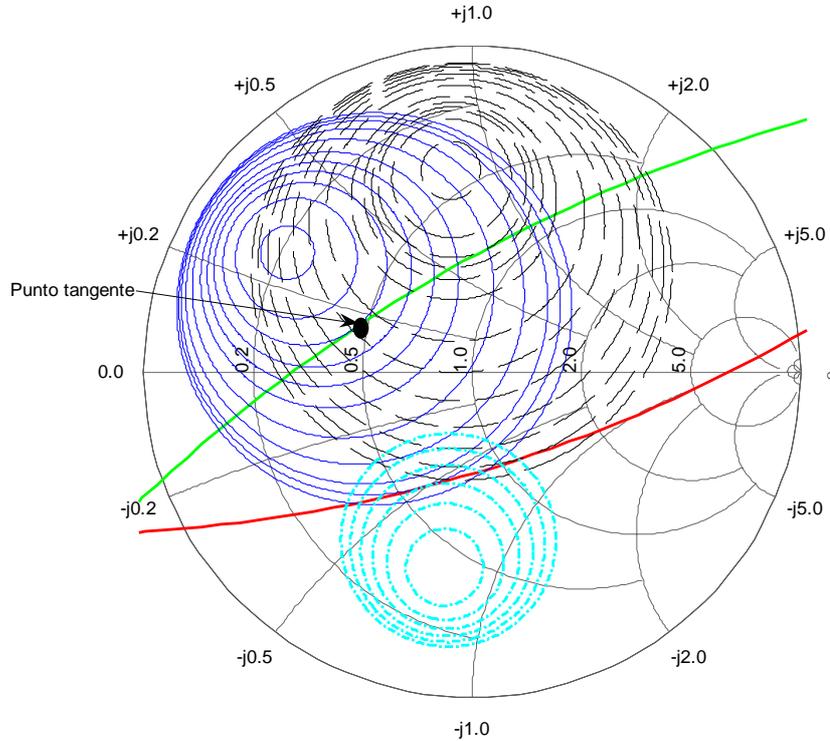


Figura 3.4.-Coeficiente de reflexión de fuente estable que da mínimo ruido

c) Para conseguir la máxima ganancia  $G_1$ , término de ganancia debida a la fuente, debemos conseguir adaptación conjugada en el plano de fuente, de tal forma que  $\Gamma_S = S_{11}^*$ , teniendo entonces:

$$G_1 = \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - S_{11} \cdot \Gamma_S|^2} \Bigg|_{\Gamma_S = S_{11}^*} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2} = 1.658 \quad \langle = 2.196 \text{ dB} \rangle \quad (3.3)$$

Pero, al igual que ha sucedido antes, este punto está en zona inestable, ya que se encuentra fuera del círculo de estabilidad de fuente, por lo que no podemos conseguir la ganancia máxima  $G_{1-Max} = 2.196 \text{ dB}$ . Debemos buscar, entonces, un punto que, estando en zona estable (zona interior), nos dé el mayor valor de ganancia  $G_1$  posible. Para buscar este punto bastará con ir viendo los círculos de ganancia constante, hasta que encontramos que hay uno que es tangente al círculo de estabilidad. Este punto de tangencia nos dará el coeficiente de reflexión de fuente que nos da el máximo de

ganancia posible debido a la fuente. La ganancia es  $G_1 = 1.61 \text{ dB}$  y el coeficiente de reflexión de fuente:

$$\Gamma_s = 0.0483 + j \cdot 0.3781 = 0.3812_{82.72^\circ} \Rightarrow Z_s = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_s}{1 - \Gamma_s} = 40.75 + j \cdot 36.06 \quad (3.4)$$

Y para obtener el ruido que se consigue con este coeficiente de reflexión de fuente, basta leer el círculo de ruido constante que pasa por este punto, y que resulta ser

$$F = 3.60 \text{ dB}$$

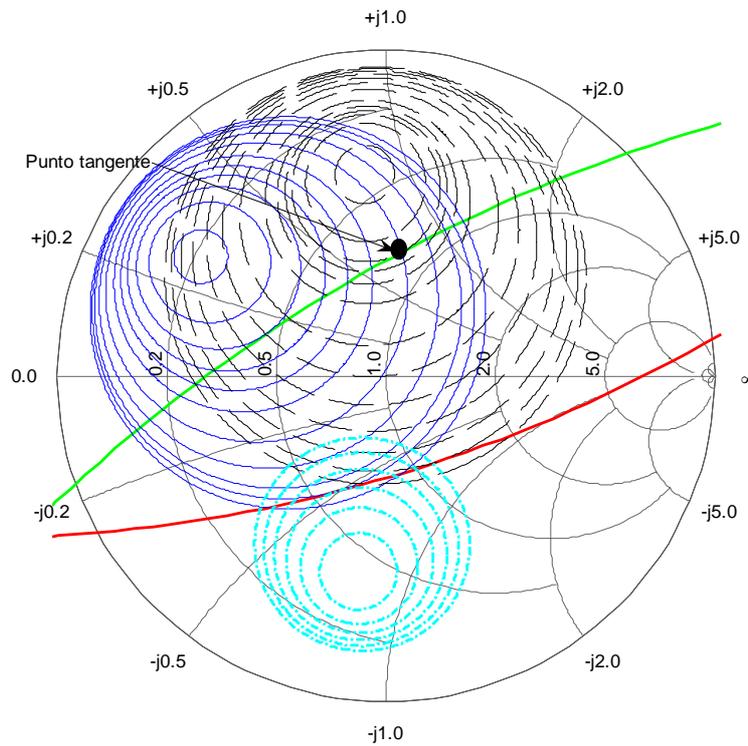


Figura 3.5.-Coeficiente de reflexión de fuente estable que da máxima ganancia  $G_1$

d) Si nos situamos en el círculo de ruido constante  $F=2.95 \text{ dB}$ , vemos que si queremos que el amplificador sea estable debemos buscar un círculo de ganancia  $G_1$  constante que tenga puntos en zona estable y que dé máxima ganancia. Este punto lo tenemos en el círculo de ganancia  $G_1=1.35 \text{ dB}$ , tal y como se muestra en la figura 3.6.

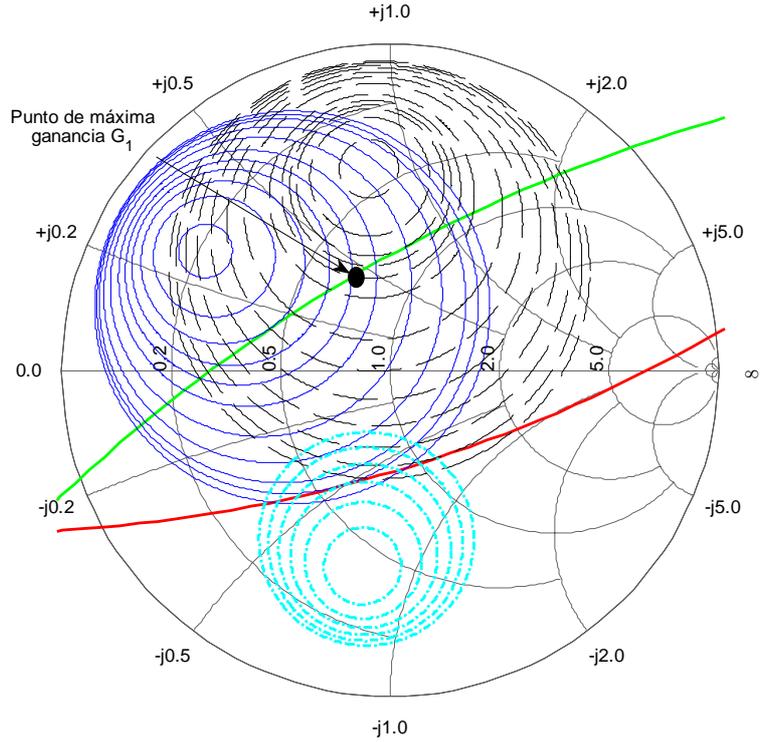


Figura 3.6.-Coeficiente de reflexión de fuente estable que da máxima ganancia  $G_1$

Este punto, sobre el círculo  $G_1=1.35$  dB y sobre el círculo  $F=2.95$  dB da el siguiente coeficiente de reflexión de fuente, con su impedancia asociada:

$$\Gamma_s = -0.1163 + j \cdot 0.2878 = 0.3104_{112^\circ} \Rightarrow Z_s = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_s}{1 - \Gamma_s} = 34 + j \cdot 21.66 \quad (3.5)$$

e) Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado **c)**, tenemos que el punto de máxima ganancia  $G_2$  debida a la carga se consigue cuando tenemos adaptación conjugada en el plano de carga, de tal forma que  $\Gamma_L = S_{22}^*$ , teniendo entonces:

$$G_2 = \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - S_{22} \cdot \Gamma_L|^2} \Big|_{\Gamma_L = S_{22}^*} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2} = 1.624 \langle = 2.107 \text{ dB} \rangle \quad (3.6)$$

Pero, al igual que antes, este punto está en zona inestable, ya que se encuentra fuera del círculo de estabilidad de carga, por lo que no podemos conseguir la ganancia máxima  $G_{2-Max}=2.107$  dB. Debemos buscar, entonces, un punto que, estando en zona estable (zona interior), nos dé el mayor valor de ganancia  $G_2$  posible. Para buscar este punto bastará con ir viendo los círculos de ganancia constante, hasta que encontramos que hay uno que es tangente al círculo de estabilidad. Este punto de tangencia nos

dará el coeficiente de reflexión de fuente que nos da el máximo de ganancia posible debido a la carga. La ganancia es  $G_2 = 1.55 \text{ dB}$  y el coeficiente de reflexión de carga:

$$\Gamma_L = -0.1353 - j \cdot 0.3504 = 0.3756_{-111.11^\circ} \Rightarrow Z_L = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} = 30.42 - j \cdot 24.82 \quad (3.7)$$

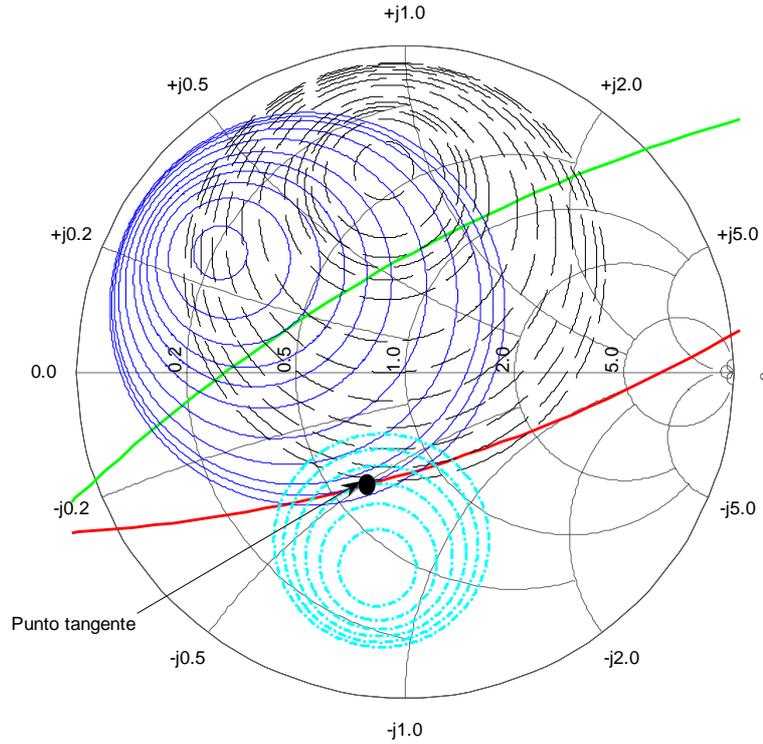


Figura 3.7.-Coeficiente de reflexión de carga estable que da máxima ganancia  $G_2$

f) La ganancia de transferencia unilateral se calcula como ( $S_{12}=0$ ):

$$G_{Tu} = \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - S_{11} \cdot \Gamma_S|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - S_{11} \cdot \Gamma_S|^2} = G_1 \cdot G_0 \cdot G_2 \quad (3.8)$$

Es decir, consta de 3 términos, dependiendo el primero y el último de la fuente y la carga respectivamente, y llamados  $G_1$  y  $G_2$  y siendo el central dependiente únicamente del parámetro  $S_{21}$ , llamado  $G_0$ .

Por lo tanto, y trabajando en decibelios, tenemos que el término  $G_1$  debe cumplir la siguiente condición:

$$G_{Tu} = G_1 + G_0 + G_2 \geq 4.95 \Rightarrow G_1 \geq 1.1 \quad (3.9)$$

Ahora sólo debemos situarnos en el círculo de ganancia constante  $G_1=1.1$  dB y, sabiendo que cualquier coeficiente de reflexión de fuente nos sirve, coger el que esté en un círculo de ruido constante menor. Este círculo se corresponde con el factor de ruido  $F=2.75$  dB, tal y como se muestra en la siguiente figura:

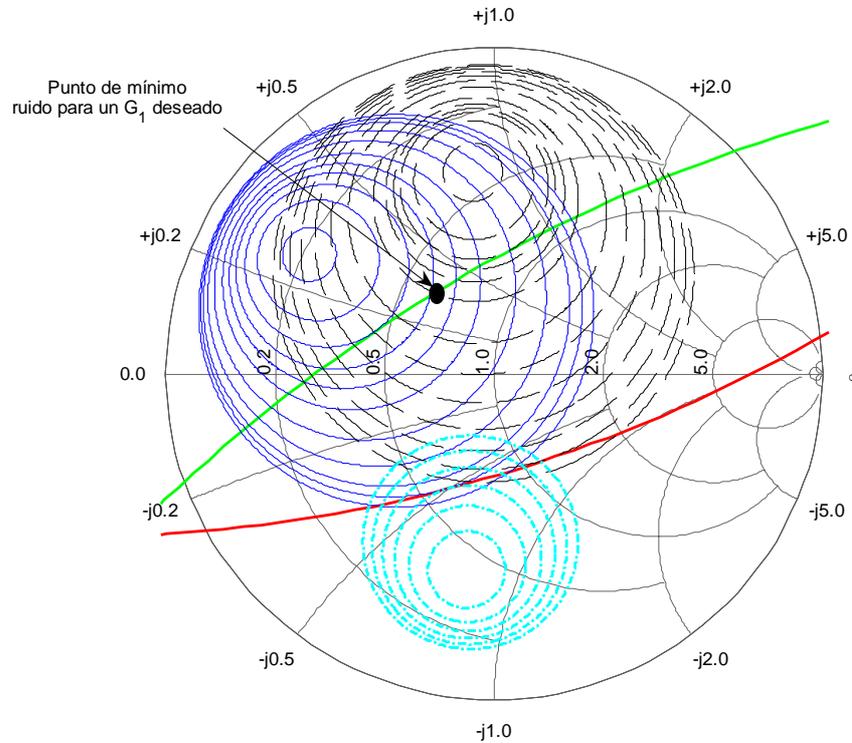


Figura 3.8.-Coeficiente de reflexión de fuente para  $G_1=1.1$  dB y  $F=2.75$  dB

El coeficiente de reflexión de fuente que da esta ganancia y este ruido es:

$$\Gamma_s = -0.1899 + j \cdot 0.2442 = 0.3094_{127.87^\circ} \Rightarrow Z_s = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_s}{1 - \Gamma_s} = 50.64 + j \cdot 16.55 \quad (3.10)$$

# MICROONDAS

Examen enero 05

M. Baquero, F. Peñaranda y V. Boria

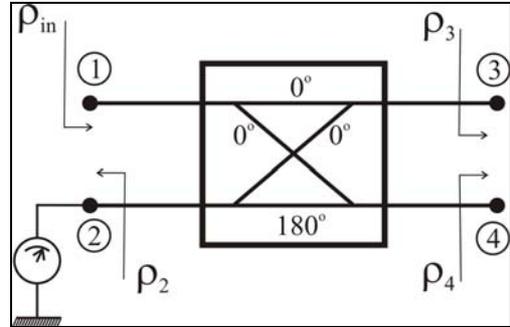
## 12 FEBRERO

### 12.1 PROBLEMA 1 (40p)

Se dispone un acoplador direccional ideal de  $180^\circ$ , de acoplamiento desconocido y del que todos sus parámetros son reales, como se observa en la figura 1.1.

En el puerto 2 se ha colocado un bolómetro (medidor de potencia de microondas), con una impedancia de entrada  $Z_0$  y en el puerto 1 un generador de potencia disponible  $P_{avs}$  e impedancia de fuente  $Z_0$ .

Por otra parte, en los puertos 3 y 4 se han colocado diversas cargas, siendo las del puerto 3 conocidas y las del puerto 4 desconocidas.



A la vista de esto, se pide:

Figura 1.1

(5p) a) Encuentre la expresión analítica del coeficiente de reflexión  $\rho_{in}$  en el puerto 1 y de la potencia medida en el bolómetro del puerto 2 en función de los datos disponibles.

Inicialmente realizamos dos medidas de potencia ( $P_1$  y  $P_2$ ) colocando, respectivamente, un circuito abierto y un cortocircuito en el puerto 3.

(5p) b) Calcule el valor de la carga colocada en el puerto 4 suponiendo que la carga es real, en función de las medidas  $P_1$  y  $P_2$ .

Si descubrimos que la carga colocada en el puerto 4 no es únicamente resistiva, sino que es reactiva, se decide realizar 3 medidas, en lugar de dos, para poder determinar el valor de dicha impedancia.

(20p) c) Determine el valor de la carga colocada en el puerto 4, si las potencias medidas son  $P_1=-10$  dBm,  $P_2=-12.28$  dBm y  $P_3=-18.30$  dBm, cuando las cargas del puerto 3 son  $\rho_1=0.55_{-135^\circ}$ ,  $\rho_2=0.40_{-95^\circ}$ , y  $\rho_3=0.20_{+135^\circ}$ .

(10p) d) Finalmente, determine el valor del acoplamiento del acoplador direccional utilizado, si la potencia disponible del generador es  $P_{avs}=0$  dBm, así como el valor de la resistencia y la bobina colocadas en serie en el puerto 4, si la frecuencia de trabajo es  $f=2.45$  GHz.

Datos:

1) La solución de la ecuación compleja en  $z$ :  $\left| \frac{a-z}{b-z} \right| = A$ , donde  $A$  es un número

real y positivo, es una circunferencia cuyo centro y radio son, respectivamente:

$$C = \frac{b \cdot A^2 - a}{A^2 - 1} \text{ y } R = A \cdot \left| \frac{a-b}{A^2 - 1} \right|.$$

2) La impedancia de referencia en todo el circuito es  $Z_0=50 \Omega$ .

a) La matriz  $S$  del acoplador direccional de  $180^\circ$  es de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Donde los valores  $\alpha$  y  $\beta$  son reales, según el enunciado, y, por unitariedad, se ha de cumplir que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

Por lo tanto, tenemos que las ondas de potencia en cada puerto del acoplador son:

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha \cdot a_3 + \beta \cdot a_4 \\ b_2 &= \beta \cdot a_3 - \alpha \cdot a_4 \\ b_3 &= \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot a_2 \\ b_4 &= \beta \cdot a_1 - \alpha \cdot a_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Si tenemos en cuenta que el puerto 2 está cargado con una impedancia  $Z_0$  y que los puertos 3 y 4 presentan los coeficientes de reflexión  $\rho_3$  y  $\rho_4$ , de tal forma que:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= \rho_3 \cdot b_3 \\ a_4 &= \rho_4 \cdot b_4 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Llegamos al siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} b_1 &= (\alpha^2 \cdot \rho_3 + \beta^2 \cdot \rho_4) \cdot a_1 \\ b_2 &= \alpha \cdot \beta \cdot (\rho_3 - \rho_4) \cdot a_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Por lo tanto, el coeficiente de reflexión en el puerto 1 será:

$$\rho_{in} = \frac{b_1}{a_1} = \alpha^2 \cdot \rho_3 + \beta^2 \cdot \rho_4 \quad (1.5)$$

Y la potencia medida en el puerto 2:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot |b_2|^2 = \frac{1}{2} \cdot |a_1|^2 \cdot |\alpha \cdot \beta|^2 \cdot |\rho_3 - \rho_4|^2 \quad (1.6)$$

b) Viendo la ecuación (1.6), podemos sustituir los valores de medida para la situación 1 y 2. El primer caso sería cuando tenemos un circuito abierto, siendo en este caso  $\rho_3=1$  y el segundo caso es cuando tenemos un cortocircuito, siendo  $\rho_3=-1$ . Por lo tanto, tenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} \cdot |a_1|^2 \cdot |\alpha \cdot \beta|^2 \cdot |1 - \rho_4|^2 \\ P_2 &= \frac{1}{2} \cdot |a_1|^2 \cdot |\alpha \cdot \beta|^2 \cdot |-1 - \rho_4|^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Como nos dice el enunciado que la carga es resistiva, sabemos que  $\rho_4$  es real, y de módulo menor que 1, por lo que dividiendo ambas ecuaciones y operando, llegamos a:

$$\begin{aligned} \rho_4 &= \frac{1 - \sqrt{P_1/P_2}}{1 + \sqrt{P_1/P_2}} \\ Z_4 &= Z_0 \cdot \sqrt{P_2/P_1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

c) Si resulta que la carga del puerto 4 no es real, sino reactiva (parte real y parte imaginaria), entonces necesitamos alguna medida más. Por ello, tenemos 3 ecuaciones similares a la ecuación (1.6), una por cada medida:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} \cdot |a_1|^2 \cdot |\alpha \cdot \beta|^2 \cdot |\rho_{31} - \rho_4|^2 \\ P_2 &= \frac{1}{2} \cdot |a_1|^2 \cdot |\alpha \cdot \beta|^2 \cdot |\rho_{32} - \rho_4|^2 \\ P_3 &= \frac{1}{2} \cdot |a_1|^2 \cdot |\alpha \cdot \beta|^2 \cdot |\rho_{33} - \rho_4|^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Si dividimos la 1ª por la 2ª, y esta por la 3ª, tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} &= \frac{|\rho_{31} - \rho_4|}{|\rho_{32} - \rho_4|} \\ \sqrt{\frac{P_2}{P_3}} &= \frac{|\rho_{32} - \rho_4|}{|\rho_{33} - \rho_4|} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nótese que estas ecuaciones son exactamente las que nos dan como dato en el enunciado del problema, donde  $\rho_4$  es la incógnita, y cuya resolución es una circunferencia de centro y radio conocidos.

Sustituyendo valores, tenemos que las dos ecuaciones anteriores quedan como:

$$\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = 1.3 = \frac{|0.55_{-135^\circ} - \rho_4|}{|0.4_{-95^\circ} - \rho_4|} \tag{1.11}$$

$$\sqrt{\frac{P_2}{P_3}} = 2 = \frac{|0.4_{-95^\circ} - \rho_4|}{|0.2_{+135^\circ} - \rho_4|}$$

Sustituyendo estos valores en la circunferencia solución, encontraremos el lugar geométrico de todos los posibles  $\rho_4$  (coeficientes de reflexión del puerto 4) que satisfacen cada una de las dos ecuaciones anteriores. Los centros y radios respectivos son:

$$1.3 = \frac{|0.55_{-135^\circ} - \rho_4|}{|0.4_{-95^\circ} - \rho_4|} \Rightarrow \begin{cases} C = 0.631_{-40.79^\circ} = 0.478 - j \cdot 0.412 \\ R = 0.667 \end{cases}$$

$$2 = \frac{|0.4_{-95^\circ} - \rho_4|}{|0.2_{+135^\circ} - \rho_4|} \Rightarrow \begin{cases} C = 0.367_{+118.83^\circ} = -0.177 + j \cdot 0.321 \\ R = 0.367 \end{cases} \tag{1.12}$$

Si ahora dibujamos estas dos circunferencias, obtendremos, en sus puntos de cruce, la solución que estábamos buscando:

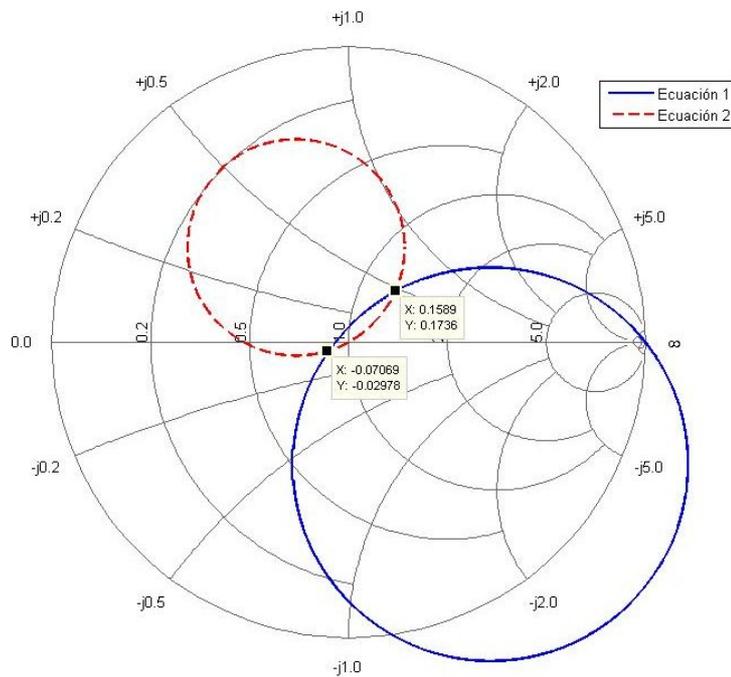


Figura 1.2.-Circunferencias solución de la ecuación compleja

En esta figura podemos ver que en este caso hay DOS puntos de cruce, lo que quiere decir que, en principio tenemos DOS soluciones, y no sólo una. Los dos coeficientes de reflexión, marcados en la figura, son:

$$\begin{cases} \rho_4 = 0.1589 + j \cdot 0.1736 \Rightarrow Z_4 = Z_0 \cdot (1.28 + j \cdot 0.47) = 64.03 + j \cdot 23.54 \\ \rho_4 = -0.0707 - j \cdot 0.0298 \Rightarrow Z_4 = Z_0 \cdot (0.867 - j \cdot 0.052) = 43.33 - j \cdot 2.60 \end{cases} \quad (2.13)$$

Si pensamos que podríamos generar una tercera ecuación, con los datos proporcionados, para crear una tercera circunferencia, no llegaríamos a resolver la indeterminación, ya que es una combinación lineal de las anteriores. Esta ecuación sería:

$$\sqrt{\frac{P_1}{P_3}} = 2.6 = \frac{|0.55_{-135^\circ} - \rho_4|}{|0.2_{+135^\circ} - \rho_4|} \quad (2.14)$$

El centro y radio de la circunferencia solución serían:

$$2.6 = \frac{|0.55_{-135^\circ} - \rho_4|}{|0.2_{+135^\circ} - \rho_4|} \Rightarrow \begin{cases} C = 0.253_{112.87^\circ} = -0.099 + j \cdot 0.234 \\ R = 0.264 \end{cases} \quad (2.15)$$

Y, por último, la representación gráfica sería:

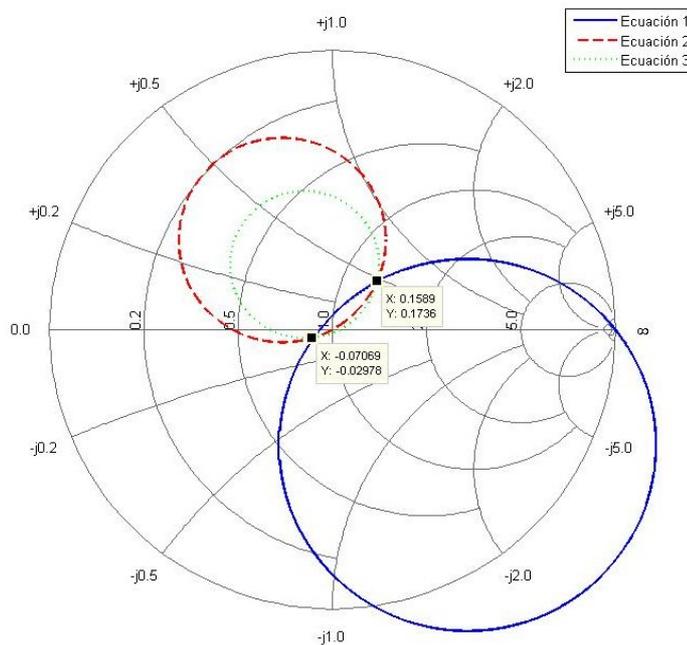


Figura 1.3.-Circunferencias solución de la ecuación compleja, incluyendo la tercera ecuación

Se puede comprobar que la tercera circunferencia corta en los mismo puntos que las dos anteriores, como cabía esperar.

c) Finalmente, recordando la ecuación (1.6), que nos da la potencia medida en el puerto 3, tenemos:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot |b_2|^2 = \frac{1}{2} \cdot |a_1|^2 \cdot |\alpha \cdot \beta|^2 \cdot |\rho_3 - \rho_4|^2 \quad (3.16)$$

Puesto que la impedancia del generador es la misma que la impedancia de referencia  $Z_0$ , sabemos que la potencia disponible es igual a la potencia de la onda entrante, de tal forma que:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot |b_2|^2 = \frac{1}{2} \cdot |a_1|^2 \cdot |\alpha \cdot \beta|^2 \cdot |\rho_3 - \rho_4|^2 = P_{avs} \cdot |\alpha \cdot \beta|^2 \cdot |\rho_3 - \rho_4|^2 \quad (3.17)$$

Y ahora, puesto que tenemos diversas medidas realizadas, podemos tomar una cualquiera (con su  $P_2$ ,  $\rho_3$  y carga  $\rho_4$  calculada en el apartado anterior), y despejar  $\alpha$  y  $\beta$ . Hay que recordar en este punto que, como ya se ha dicho antes, por unitariedad, se ha de cumplir que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

Así pues, si despejamos, por ejemplo, el término  $\alpha$ , tenemos:

$$\alpha^2 \cdot (1 - \alpha^2) = \frac{P_2}{P_{avs} \cdot |\rho_3 - \rho_4|^2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{P_2}{P_{avs} \cdot |\rho_3 - \rho_4|^2}}}{2} \quad (3.18)$$

Y sustituyendo valores (tomando  $\rho_4$  como  $\rho_4 = 0.1589 + j \cdot 0.1736$ , puesto que nos dicen que la carga es una resistencia en serie con una bobina), obtenemos:

$$\alpha = 0.8924 \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \alpha^2} = 0.4513 \Rightarrow C = -20 \cdot \log(\beta) = 6.91 \text{ dB} \quad (3.19)$$

Y, para terminar, los valores del circuito serie colocado en el puerto 4 serán:

$$Z_4 = 64.03 + j \cdot 23.54 = R + j \cdot L \cdot \omega \Rightarrow \begin{cases} R = 64.03 \ \Omega \\ L = 1.53 \text{ nH} \end{cases} \quad (3.20)$$

## 12.2. PROBLEMA 2 (40 p)

Se pretende estudiar una cavidad cilíndrica de paredes conductoras, rellena de un material dieléctrico con pérdidas ( $\epsilon_r = 8$ ,  $\text{tg}\delta = 3 \cdot 10^{-4}$ ), como la mostrada en la figura 1. Dicha cavidad, de longitud  $d$ , se construye a partir de una guía circular sectorial ( $\alpha = 90^\circ$ ) de radio  $a$  (ver figura 2).

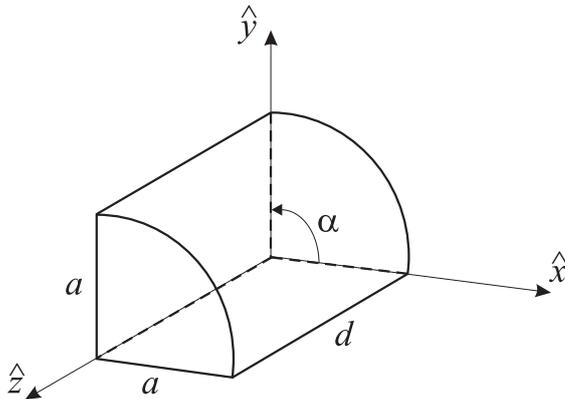


Figura 1: Cavidad cilíndrica

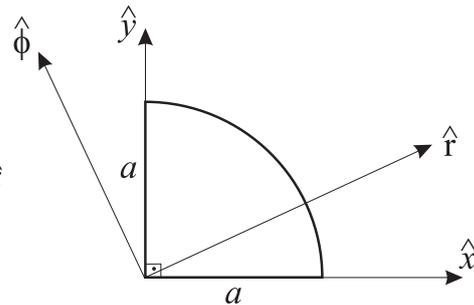


Figura 2: Guía sectorial

En primer lugar se analizará la guía circular sectorial de la figura 2. Para ello, se pide responder a las siguientes cuestiones:

- (8 p) a.- Deducir las expresiones de las componentes axiales de los modos  $\text{TM}_{nl}^z$  y  $\text{TE}_{nl}^z$ , indicando los valores posibles de los subíndices  $n$  y  $l$  en cada caso. Obtener el valor del cociente entre la frecuencia de corte del segundo modo y la del modo fundamental (margen de comportamiento monomodo), y compararlo con el de una guía circular estándar de radio  $a$ .
- (8 p) b.- Si la guía sectorial presenta en su pared conductora curvada (en  $r = a$  y  $\phi = 45^\circ$ ) una ranura que se extiende en sentido longitudinal a lo largo del eje  $\hat{z}$ , ¿cuál sería el nuevo margen de comportamiento monomodo? Indicar si es posible excitar el modo fundamental de esta guía ranurada mediante una sonda coaxial cuyo conductor interno penetra por dicha ranura.

A continuación se estudiará la cavidad cilíndrica de la figura 1 (en la que no existe ninguna ranura). Se pide responder a las siguientes cuestiones:

- (10 p) c.- Deducir unas expresiones para las dimensiones  $a$  y  $d$  que permitan que el primer modo  $\text{TM}_{nlq}^z$  y el primer modo  $\text{TE}_{nlq}^z$  (es decir, aquéllos con frecuencias de resonancia más bajas en sus respectivas familias modales) sean degenerados a una frecuencia  $f_0$ .

(14 p) d.- Si las dimensiones de la cavidad son  $a = 8 \text{ mm}$  y  $d = 5 \text{ mm}$ , obtener el valor del factor de calidad asociado al modo resonante  $\text{TM}_{210}^z$ . Para resolver este apartado considerar, además de las pérdidas en el dieléctrico, que las únicas paredes conductoras con pérdidas ( $\sigma = 3,8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ ) son las situadas en  $z = 0$  y  $z = d$ .

Datos:

- Solución de las Ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{E}_t = -\frac{1}{k_c^2} [\gamma \nabla_t E_z + j \omega \mu \nabla_t \times H_z \hat{z}] \quad \vec{H}_t = -\frac{1}{k_c^2} [\gamma \nabla_t H_z - j \omega \varepsilon \nabla_t \times E_z \hat{z}]$$

- Operadores en Coordenadas Cilíndricas:

$$\nabla_t \times A_z \hat{z} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \hat{r} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{\phi} \quad \nabla_t A_z = \frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

- Energía media eléctrica y magnética almacenada en un volumen  $V$ :

$$U_e = \frac{1}{4} \varepsilon' \iiint_V |\vec{E}|^2 dV \quad U_m = \frac{1}{4} \mu_0 \iiint_V |\vec{H}|^2 dV$$

- Potencias medias disipadas en conductores y dieléctricos con pérdidas:

$$P_{Lc} = \frac{1}{2} R_s \iint_S |\vec{J}_s|^2 dS \quad P_{Ld} = \frac{1}{2} \omega \varepsilon'' \iiint_V |\vec{E}|^2 dV$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2 \sigma}} \quad \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \quad \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

- Funciones de Bessel ( $J_0(0) = 1$  y  $J_n(0) = 0$  si  $n \neq 0$ ) e Integrales:

$$\int x J_n^2(kx) dx = \frac{x^2}{2} J_n'^2(kx) + \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{n^2}{k^2 x^2}\right) J_n^2(kx)$$

$$\int_0^{p_{nl}} \left[ J_n'^2(x) + \frac{n^2}{x^2} J_n^2(x) \right] x dx = \frac{(p_{nl})^2}{2} J_n'^2(p_{nl})$$

- Ceros de las funciones de Bessel ( $p_{nl}$ ) y de sus derivadas ( $p'_{nl}$ ):

$l$	$p_{0l}$	$p_{1l}$	$p_{2l}$	$p_{3l}$	$p_{4l}$	$p_{5l}$	$p_{6l}$
1	2,405	3,832	5,136	6,380	7,588	8,771	9,936
2	5,520	7,016	8,417	9,761	11,065	12,339	13,589
3	8,654	10,173	11,620	13,015	14,373	15,700	17,004

$l$	$p'_{0l}$	$p'_{1l}$	$p'_{2l}$	$p'_{3l}$	$p'_{4l}$	$p'_{5l}$	$p'_{6l}$
1	3,832	1,841	3,054	4,201	5,318	6,416	7,501
2	7,016	5,331	6,706	8,015	9,282	10,520	11,735
3	10,173	8,536	9,969	11,346	12,682	13,987	15,268

a) Para deducir las expresiones de las componentes axiales de los modos  $\text{TM}_{nl}^z$  y  $\text{TE}_{nl}^z$  de la guía circular sectorial con  $\alpha = 90^\circ$ , se parte de la solución general de la ecuación de onda escalar para un sistema de coordenadas cilíndricas:

$$A_z(r, \phi) = [A \cos(\nu \phi) + B \sin(\nu \phi)] J_\nu(k_c r)$$

donde  $A_z$  representa la componente axial  $E_z$  para los modos  $\text{TM}_{nl}^z$  y  $H_z$  para los modos  $\text{TE}_{nl}^z$ . En la expresión de  $A_z$  no se ha incluido la función de Bessel de segunda especie (es decir  $Y_\nu(k_c r)$ ), pues dicha función diverge (tiende a infinito) en puntos de la guía sectorial próximos al origen (cuando  $r \rightarrow 0$ ).

Con el objeto de obtener los valores de los coeficientes  $A$  y  $B$ , así como del número de onda de corte  $k_c$ , asociados a la familia de modos  $\text{TM}_{nl}^z$ , se impondrá la condición de contorno (conductor eléctrico perfecto) en las tres paredes de la guía sectorial (es decir, en  $\phi = 0, \pi/2$  y en  $r = a$ ). Así pues, se deduce que:

$$E_z(\phi = 0) = A J_\nu(k_c r) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$E_z(\phi = \pi/2) = B \sin(\nu \pi/2) J_\nu(k_c r) = 0 \Rightarrow \nu = n \text{ con } n = 0, 2, 4, \dots$$

$$E_z(r = a) = B \sin(n\phi) J_n(k_c a) = 0 \Rightarrow k_c = p_{nl}/a$$

donde  $p_{nl}$  representa el cero  $l$ -ésimo ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ) de la función de Bessel de primera especie y orden  $n$  (es decir  $J_n(p_{nl}) = 0$ ). En resumen, la componente axial  $E_z$  de los modos  $\text{TM}_{nl}^z$  tiene la siguiente expresión:

$$E_z = B J_n(k_c r) \sin(n\phi)$$

con  $k_c = p_{nl}/a$ ,  $n = 2, 4, 6, \dots$  y  $l = 1, 2, 3, \dots$

Obsérvese que en este caso el subíndice modal  $n$  no puede valer 0, pues ello supondría que la componente axial  $E_z$  fuera nula, y por tanto la solución modal no existiría.

Para el caso de los modos  $\text{TE}_{nl}^z$ , los valores de los coeficientes  $A$  y  $B$ , así como del número de onda de corte  $k_c$ , se deducen imponiendo de nuevo la condición de contorno de pared eléctrica, pero ahora sobre la componente axial  $H_z$ . Procediendo de este modo se obtiene:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = B \nu J_\nu(k_c r) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right|_{\phi=\pi/2} = -A \nu \sin(\nu \pi/2) J_\nu(k_c r) = 0 \Rightarrow \nu = n \text{ con } n = 0, 2, 4, \dots$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=a} = A k_c \cos(n\phi) J'_n(k_c a) = 0 \Rightarrow k_c = p'_{nl}/a$$

En la expresión anterior,  $p'_{nl}$  representa el cero  $l$ -ésimo ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ) de la primera derivada de la función de Bessel de primera especie y orden  $n$  (es decir  $J'_n(p'_{nl}) = 0$ ). Así pues, la componente axial  $H_z$  de los modos  $\text{TE}_{nl}^z$  tiene el siguiente aspecto final:

$$\boxed{H_z = A J_n(k_c r) \cos(n\phi)}$$

$$\text{con } k_c = p'_{nl}/a, \quad n = 0, 2, 4, \dots \text{ y } l = 1, 2, 3, \dots$$

En este caso el subíndice modal  $n$  sí puede valer 0, pues ello no implica que  $H_z$ , y por tanto todas las demás componentes de este modo, sean nulas.

Para obtener el margen de comportamiento monomodo requerido, es necesario identificar los dos modos de esta guía sectorial con frecuencias de corte más bajas. A la vista de las tablas de ceros ( $p_{nl}$  y  $p'_{nl}$ ) que se muestran en los datos del enunciado, y teniendo en cuenta los posibles valores del subíndice  $n$  para cada familia modal, se concluye que los valores más bajos de dichos ceros son  $p'_{21} = 3,054$  y  $p'_{01} = 3,832$ ; que se corresponden respectivamente con los modos  $\text{TE}_{21}^z$  y  $\text{TE}_{01}^z$ . Por tanto, el margen monomodo solicitado vale en este caso:

$$\boxed{\frac{f_{c\text{TE}_{01}^z}}{f_{c\text{TE}_{21}^z}} = \frac{k_{c\text{TE}_{01}^z}}{k_{c\text{TE}_{21}^z}} = \frac{(p'_{01}/a)}{(p'_{21}/a)} = \frac{3,832}{3,054} = 1,255}$$

En el caso de una guía circular estándar, los números de onda de corte de los modos  $\text{TM}_{nl}^z$  y  $\text{TE}_{nl}^z$  presentan las siguientes expresiones:

$$k_{c\text{TM}_{nl}^z} = \frac{p_{nl}}{a} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \text{ y } l = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_{c\text{TE}_{nl}^z} = \frac{p'_{nl}}{a} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \text{ y } l = 1, 2, 3, \dots$$

donde  $p_{nl}$  y  $p'_{nl}$  tienen el mismo significado descrito anteriormente. Así pues, viendo de nuevo las tablas de ceros de los datos del problema, y teniendo en cuenta los posibles valores que puede tomar ahora el subíndice  $n$ , se deduce que los valores más bajos de dichos ceros son ahora  $p'_{11} = 1,841$  y  $p_{01} = 2,405$ ; que se corresponden respectivamente con los modos  $\text{TE}_{11}^z$  y  $\text{TM}_{01}^z$ . Por tanto, el margen de comportamiento monomodo de la guía circular estándar será:

$$\boxed{\frac{f_{c\text{TM}_{01}^z}}{f_{c\text{TE}_{11}^z}} = \frac{k_{c\text{TM}_{01}^z}}{k_{c\text{TE}_{11}^z}} = \frac{(p_{01}/a)}{(p'_{11}/a)} = \frac{2,405}{1,841} = 1,306}$$

Se observa pues que los márgenes de comportamiento monomodo de la guía sectorial bajo estudio y de la guía circular estándar presentan valores muy similares.

b) La existencia de ranuras puede imposibilitar la existencia de soluciones modales en el interior de una guía, concretamente aquéllas cuyas corrientes superficiales

asociadas ( $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$ ) se vean interrumpidas por la dimensión alargada de la ranura (en este caso dirigida según el eje  $\hat{z}$ ). Por tanto, aquellos modos de la guía sectorial con  $J_\phi(r = a, \phi = \pi/4) \neq 0$ , es decir con  $H_z(r = a, \phi = \pi/4) \neq 0$ , no podrán existir en el caso de la guía sectorial ranurada bajo estudio.

Si nos fijamos en los modos  $\text{TM}_{nl}^z$  de la guía sectorial deducidos en el apartado anterior, todos ellos cumplen por definición que  $H_z = 0$  en cualquier posición de la guía. Por tanto, ningún modo de dicha familia se verá afectado por la presencia de la citada ranura, y podrán seguir existiendo en la guía sectorial ranurada.

En el caso de los modos  $\text{TE}_{nl}^z$ , se deberá evaluar la expresión de la componente axial  $H_z$  deducida en el apartado anterior en la posición de la ranura (es decir en  $r = a, \phi = \pi/4$ ) para ver cuándo se anula. Se tiene pues que:

$$H_z(r = a, \phi = \pi/4) = AJ_n(k_c a) \cos(n\pi/4) = 0 \Rightarrow n = 2, 6, 10, 14, \dots$$

Por tanto, los modos  $\text{TE}_{nl}^z$  con  $n = 2, 6, 10, \dots$  sí podrán existir en la guía ranurada, mientras que los modos  $\text{TE}_{nl}^z$  con  $n = 0, 4, 8, \dots$  se verán anulados por la presencia de la citada ranura.

Así pues, teniendo en cuenta que los modos  $\text{TE}_{nl}^z$  con  $n = 0, 4, 8, \dots$  no pueden existir en la guía ranurada, se concluye que los valores más bajos de los ceros  $p_{nl}$  y  $p'_{nl}$  son en este caso  $p'_{21} = 3,054$  y  $p_{21} = 5,136$ ; que se corresponden con los modos  $\text{TE}_{21}^z$  y  $\text{TM}_{21}^z$ . Por tanto, el nuevo margen de comportamiento monomodo en el caso de la guía ranurada presenta el siguiente valor:

$$\boxed{\frac{f_{c\text{TM}_{21}^z}}{f_{c\text{TE}_{21}^z}} = \frac{k_{c\text{TM}_{21}^z}}{k_{c\text{TE}_{21}^z}} = \frac{(p_{21}/a)}{(p'_{21}/a)} = \frac{5,136}{3,054} = 1,682}$$

Se observa pues que en este caso el margen de comportamiento monomodo es mayor que el de la guía sectorial sin ranura y el de la guía circular estándar deducidos en el apartado anterior.

En la técnica de excitación propuesta, el conductor interno de la sonda coaxial actúa como un dipolo elemental. Por tanto, para saber si es posible excitar el modo fundamental de la guía ranurada (que es el modo  $\text{TE}_{21}^z$  de acuerdo con el anterior resultado), será necesario comprobar que el campo eléctrico de dicho modo no se anula en la posición de la sonda (es decir en  $r = a, \phi = \pi/4$ ). A su vez, la sonda deberá poder orientarse de forma que el citado conductor interno resulte paralelo a alguna componente no nula de campo eléctrico.

Será necesario pues deducir las componentes de campo eléctrico transversal ( $\vec{E}_t$ ) del modo  $\text{TE}_{21}^z$ , que por definición tiene  $E_z = 0$ . Para ello se hará uso de la siguiente relación:

$$\vec{E}_t = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \nabla_t \times H_z \hat{z} = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \hat{r} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \hat{\phi} \right)$$

Realizando las operaciones anteriores, y particularizando para el caso del modo fundamental ( $\text{TE}_{21}^z$ ), se obtienen las siguientes componentes de campo eléctrico transversal para dicho modo:

$$E_r = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{2}{r} A J_2(k_c r) \sin(2\phi)$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c} A J_2'(k_c r) \cos(2\phi)$$

donde  $k_c = p'_{21}/a$ . Si se evalúan las dos expresiones anteriores en  $r = a$  y  $\phi = \pi/4$ , se comprueba fácilmente que  $E_r \neq 0$  y que  $E_\phi = 0$ , pues  $J_2(p'_{21}) \sin(\pi/2) \neq 0$  y  $J_2'(p'_{21}) \cos(\pi/2) = 0$ . Por tanto, se puede afirmar que mediante una sonda coaxial cuyo conductor interno penetre por la ranura de la citada guía sectorial:

Sí se puede excitar el modo fundamental de dicha guía

Con el objeto de maximizar la excitación del citado modo fundamental, sería conveniente orientar la sonda en dirección paralela al vector  $\hat{r}$  (pues  $E_r$  es la única componente no nula del campo eléctrico en la posición de la ranura), es decir la sonda debe orientarse formando  $45^\circ$  con respecto al vector  $\hat{x}$ .

c) En primer lugar, para saber los posibles valores que pueden tomar los subíndices  $q$  de los modos  $\text{TM}_{nlq}^z$  y  $\text{TE}_{nlq}^z$  de la cavidad bajo estudio (los valores que admiten  $n$  y  $l$  son los mismos deducidos en el primer apartado), deben obtenerse las expresiones de dichos modos.

Para construir los modos  $\text{TM}_{nlq}^z$  de la cavidad, se parte de la expresión deducida en el apartado a) para la componente axial de los modos  $\text{TM}_{nl}^z$ . Combinando adecuadamente dos de estas soluciones modales, una propagándose en la dirección  $+\hat{z}$  y otra en la dirección  $-\hat{z}$ , se obtiene:

$$E_z = J_n(k_c r) \sin(n\phi) [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{j\beta z}]$$

Haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell, se deducen las siguientes expresiones para el resto de componentes transversales de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ :

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z \propto [E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{j\beta z}]$$

$$\vec{H}_t = j \frac{\omega \epsilon}{k_c^2} \nabla_t \times E_z \hat{z} \propto [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{j\beta z}]$$

Forzando la condición de conductor perfecto en las paredes de la cavidad situadas en  $z = 0$  y  $z = d$ , es decir  $\vec{E}_t(z = 0, d) = 0$ , se concluye que  $E_0^- = E_0^+$  y que  $\beta = q\pi/d$  (donde  $q$  es un número entero del que debe determinarse si empieza en 0 o en 1).

Sustituyendo las relaciones anteriores en las expresiones de los campos eléctrico y magnético de los modos  $\text{TM}_{nlq}^z$  de la cavidad, se obtiene que:

$$E_z \propto \cos\left(\frac{q\pi z}{d}\right) \quad \vec{E}_t \propto \text{sen}\left(\frac{q\pi z}{d}\right) \quad \vec{H}_t \propto \cos\left(\frac{q\pi z}{d}\right)$$

de donde se concluye que el valor  $q = 0$  es también una solución válida. Por tanto, cada modo  $\text{TM}_{nlq}^z$  tiene una frecuencia de resonancia con la siguiente expresión:

$$f_{\text{TM}_{nlq}^z} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{p_{nl}}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2}$$

$$n = 2, 4, 6, \dots \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad \text{y} \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Teniendo en cuenta los posibles valores de los ceros  $p_{nl}$  y del subíndice  $q$ , se concluye que el modo  $\text{TM}_{nlq}^z$  con frecuencia de resonancia más baja es el  $\text{TM}_{210}^z$ , cuyo valor es:

$$f_{\text{TM}_{210}^z} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{p_{21}}{a}\right)^2} = \frac{c_0 p_{21}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{5,136 c_0}{2\pi a \sqrt{\epsilon_r}}$$

En cuanto a los modos  $\text{TE}_{nlq}^z$  de la cavidad, se procede de igual manera que en el caso anterior, pero partiendo ahora de la componente axial de los modos  $\text{TE}_{nl}^z$  deducida en el apartado a). Así pues, se tiene para  $H_z$ :

$$H_z = J_n(k_c r) \cos(n\phi) [H_0^+ e^{-j\beta z} + H_0^- e^{j\beta z}]$$

y para las componentes transversales de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ :

$$\vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z \propto [H_0^+ e^{-j\beta z} - H_0^- e^{j\beta z}]$$

$$\vec{E}_t = -j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \nabla_t \times H_z \hat{z} \propto [H_0^+ e^{-j\beta z} + H_0^- e^{j\beta z}]$$

Si ahora se fuerza la condición de conductor perfecto en  $z = 0$  y  $z = d$ , se deduce que en este caso  $H_0^- = -H_0^+$  y  $\beta = q\pi/d$ , dando lugar a las siguientes expresiones para los campos eléctrico y magnético de los modos  $\text{TE}_{nlq}^z$  de la cavidad:

$$H_z \propto \text{sen}\left(\frac{q\pi z}{d}\right) \quad \vec{H}_t \propto \cos\left(\frac{q\pi z}{d}\right) \quad \vec{E}_t \propto \text{sen}\left(\frac{q\pi z}{d}\right)$$

concluyendo ahora que el valor  $q = 0$  no puede ser una solución válida. Por tanto, cada modo  $\text{TE}_{nlq}^z$  tiene una frecuencia de resonancia con la siguiente expresión:

$$f_{\text{TE}_{nlq}^z} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{p'_{nl}}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2}$$

$$n = 0, 2, 4, \dots \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad \text{y} \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

Observando los posibles valores de los ceros  $p'_{nl}$  y del subíndice  $q$ , se deduce que el modo  $\text{TE}_{nlq}^z$  con frecuencia de resonancia más baja es el  $\text{TE}_{211}^z$ , cuyo valor es:

$$f_{\text{TE}_{211}^z} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{p'_{21}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{3,054}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$

Si se pretende que los citados modos  $\text{TM}_{210}^z$  y  $\text{TE}_{211}^z$  sean degenerados a  $f_0$  se debe cumplir que:

$$f_{\text{TM}_{210}^z} = f_{\text{TE}_{211}^z} = f_0 = \frac{5,136 c_0}{2\pi a \sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{3,054}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$

de donde se puede despejar fácilmente que:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{5,136 c_0}{2\pi f_0 \sqrt{\varepsilon_r}} \\ d &= \frac{\pi a}{\sqrt{(5,136)^2 - (3,054)^2}} = \frac{\pi a}{4,129} = 0,761a \end{aligned}}$$

d) El factor de calidad  $Q$  asociado a un modo resonante se define como:

$$Q = w_0 \frac{U}{P_L} = w_0 \frac{2U_e}{P_{Lc} + P_{Ld}} = w_0 \frac{2U_m}{P_{Lc} + P_{Ld}}$$

donde será necesario particularizar las expresiones de las energías medias almacenadas y potencias medias disipadas para el modo resonante  $\text{TM}_{210}^z$  que nos indican en el enunciado. Será necesario pues conocer las componentes de campo eléctrico y magnético de dicho modo. A partir de las expresiones deducidas en el apartado anterior, se concluye fácilmente que:

$$E_z = 2E_0^+ J_2(k_c r) \sin(2\phi)$$

$$E_r = E_\phi = 0$$

$$H_r = \frac{j\omega\varepsilon'}{k_c^2} \frac{2}{r} 2E_0^+ J_2(k_c r) \cos(2\phi)$$

$$H_\phi = -\frac{j\omega\varepsilon'}{k_c} 2E_0^+ J_2'(k_c r) \sin(2\phi)$$

donde en este caso  $k_c = p_{21}/a$ , y se ha hecho uso de que  $q = 0$ .

Teniendo en cuenta que las expresiones de  $U_e$  y de  $P_{Ld}$  involucran la misma integral de volumen del campo eléctrico, y considerando que dicho campo sólo tiene componente axial no nula, se tiene que:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon' \iiint_V |E_z|^2 dV = 2 \varepsilon' |E_0^+|^2 \int_{r=0}^a \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \int_{z=0}^d J_2^2(k_c r) \sin^2(2\phi) r dr d\phi dz$$

Si se tiene en cuenta la primera integral de funciones de Bessel de los datos del problema, así como que  $J_2(0) = 0$  y  $J_2(k_c a) = J_2(p_{21}) = 0$ , se tiene que:

$$\int_{r=0}^a r J_2^2(k_c r) dr = \frac{r^2}{2} J_2'^2(k_c r) \Big|_{r=0}^a + \frac{r^2}{2} J_2^2(k_c r) \Big|_{r=0}^a - \frac{2}{k_c^2} J_2^2(k_c r) \Big|_{r=0}^a = \frac{a^2}{2} J_2'^2(p_{21})$$

Considerando que las otras dos integrales que aparecen en la expresión de  $U$  son prácticamente inmediatas, se concluye fácilmente que:

$$U = \frac{1}{4} \varepsilon' \pi a^2 d |E_0^+|^2 J_2'^2(p_{21}) = 1,78 \cdot 10^{-17} |E_0^+|^2 J_2'^2(p_{21})$$

donde se ha hecho uso de la parte real de la permitividad del dieléctrico ( $\varepsilon' = 8 \varepsilon_0$ ) y de los valores de las dimensiones  $a$  y  $d$  de la cavidad.

En cuanto a la potencia media disipada en el material dieléctrico, se tiene que:

$$P_{Ld} = \frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon'' \iiint_V |E_z|^2 dV = \frac{1}{4} \varepsilon' \operatorname{tg} \delta \pi a^2 d w_0 |E_0^+|^2 J_2'^2(p_{21})$$

donde  $w_0$  es la pulsación asociada a la frecuencia de resonancia del modo considerado, que según el apartado anterior presenta el siguiente valor:

$$w_0 = w_{\text{TM}_{210}^z} = \frac{c_0 p_{21}}{a \sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 5,136}{8 \cdot 10^{-3} \sqrt{8}} = 6,81 \cdot 10^{10} \text{ rad/seg}$$

Sustituyendo valores en la expresión recién deducida para  $P_{Ld}$ , se obtiene finalmente el siguiente resultado:

$$P_{Ld} = 3,64 \cdot 10^{-10} |E_0^+|^2 J_2'^2(p_{21})$$

Con respecto al cálculo de la potencia media disipada en el material conductor, se debe tener en cuenta la existencia de pérdidas únicamente en las paredes situadas en  $z = 0$  y  $z = d$ . Así pues:

$$P_{Lc} = P_{Lc}(z = 0) + P_{Lc}(z = d) = 2 P_{Lc}(z = 0) = 2 \frac{1}{2} R_s \iint_S |\vec{J}_s|^2 dS$$

donde se ha tenido en cuenta que la corriente superficial en ambas paredes conductoras ( $z = 0, d$ ) presenta el mismo valor:

$$|\vec{J}_s|^2 = |\hat{z} \times \vec{H}(z = 0)|^2 = |H_r(z = 0)|^2 + |H_\phi(z = 0)|^2$$

Sustituyendo pues las expresiones de  $H_r$  y  $H_\phi$  del modo resonante  $\text{TM}_{210}^z$  deducidas previamente, se obtiene:

$$P_{Lc} = 4R_s |E_0^+|^2 \frac{\omega_0^2 \varepsilon'^2}{k_c^2} \int_{r=0}^a \frac{2^2}{k_c^2 r^2} J_2^2(k_c r) r dr \int_{\phi=0}^{\pi/2} \cos^2(2\phi) d\phi + 4R_s |E_0^+|^2 \frac{\omega_0^2 \varepsilon'^2}{k_c^2} \int_{r=0}^a J_2'^2(k_c r) r dr \int_{\phi=0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\phi) d\phi$$

Teniendo en cuenta la segunda integral de funciones de Bessel de los datos del problema, y realizando el cambio de variable  $x = k_c r$ , se puede deducir que:

$$\int_{r=0}^a \left[ J_2'^2(k_c r) + \frac{2^2}{k_c^2 r^2} J_2^2(k_c r) \right] r dr = \frac{1}{k_c^2} \frac{(p_{21})^2}{2} J_2'^2(p_{21})$$

De este modo,  $P_{Lc}$  se expresa finalmente del siguiente modo:

$$P_{Lc} = \frac{1}{2} R_s \frac{\omega_0^2 \varepsilon'^2}{k_c^4} \pi (p_{21})^2 |E_0^+|^2 J_2'^2(p_{21})$$

donde  $R_s$  es la resistencia superficial del conductor, que en el caso que nos ocupa presenta el siguiente valor:

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{6,81 \cdot 10^{10} 4 \pi \cdot 10^{-7}}{7,6 \cdot 10^7}} = 0,034 \Omega$$

Tras sustituir los datos que son conocidos en la anterior expresión de  $P_{Lc}$ , se obtiene para dicha potencia:

$$P_{Lc} = 1,93 \cdot 10^{-10} |E_0^+|^2 J_2'^2(p_{21})$$

Así pues, haciendo uso de los valores deducidos previamente para  $U$ ,  $P_{Lc}$  y  $P_{Ld}$ , se obtiene el valor del factor de calidad solicitado:

$$Q = 6,81 \cdot 10^{10} \frac{1,78 \cdot 10^{-17} |E_0^+|^2 J_2'^2(p_{21})}{(1,93 \cdot 10^{-10} + 3,64 \cdot 10^{-10}) |E_0^+|^2 J_2'^2(p_{21})} = 2176,27$$

12.3. PROBLEMA 3 (40 p)

Un diodo IMPATT a la frecuencia de 15 GHz presenta un circuito equivalente formado por una capacidad en paralelo con una resistencia negativa como la mostrada en la figura 1.

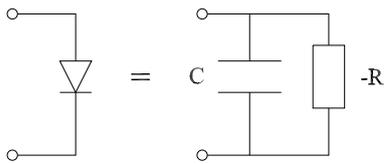


Figura 1: Diodo IMPATT: circuito equivalente

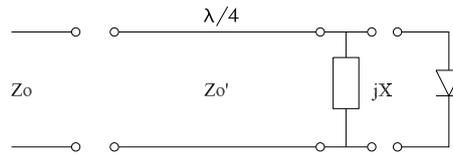


Figura 2: Red de adaptación y sintonía

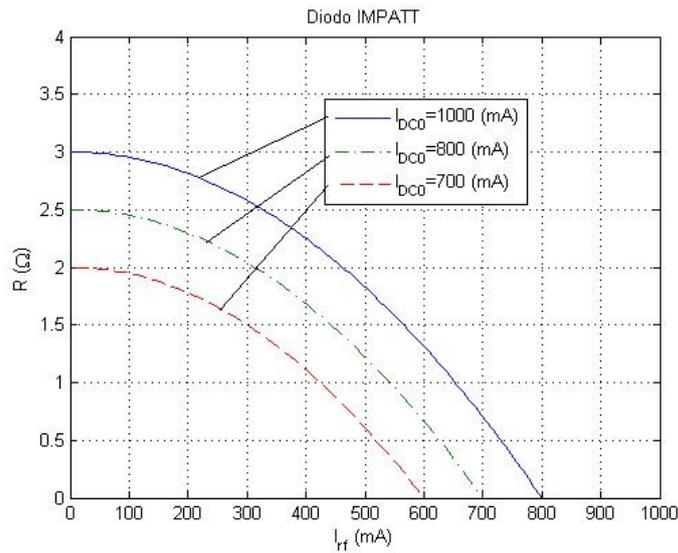


Figura 3: Resistencia negativa

Donde la capacidad es de  $C = 1 \text{ pF}$  y la resistencia negativa  $R$  depende de la corriente continua de polarización y de la amplitud de la corriente de RF que atraviese el diodo. Las gráficas de la figura 3 muestran estos valores de  $R$  para tres corrientes de polarización diferentes.

Si la dependencia de  $R$  con la corriente de RF,  $I_{rf}$ , se puede aproximar con la función  $R = a - bI_{rf}^2$

(10 p) a.- Calcular que potencia máxima se podría obtener como oscilador

para cada una de las tres polarizaciones e indicar con que polarizaciones se podría conseguir una potencia superior a 200 mW.

- (10 p) b.- Si se desea conectar a una carga de impedancia  $Z_0 = 50 \Omega$  calcular los valores de  $Z'_0$  y  $X$  de la red de adaptación y sintonía de la figura 2 necesarios para conseguir máxima transferencia de potencia (escógase una de las polarizaciones obtenidas en el apartado anterior).
- (10 p) c.- Si este mismo diodo IMPATT se utiliza para realizar un amplificador haciendo uso de un circulator ideal, manteniendo la configuración de la red de la figura 2, calcular de nuevo los valores de  $Z'_0$  y  $X$  para obtener una ganancia de transferencia de 12 dB, suponiendo que ahora el diodo trabaja en pequeña señal ( $I_{rf} \approx 0$ ).
- (10 p) d.- Haciendo uso de dos diodos idénticos con sus redes de adaptación calculadas en el apartado anterior calcular la ganancia de transferencia con la configuración de la figura 4 y el factor de reflexión a la entrada de un amplificador que hace uso de un híbrido de  $90^\circ$  ideal como se muestra en la figura 4.

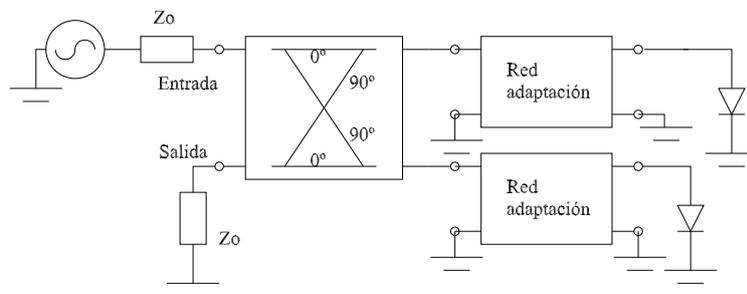


Figura 4: Amplificador con híbrido

a) La expresión de la potencia de salida viene dada por:

$$P_{out} = \frac{1}{2} R_L I_{rf}^2$$

Y dado que la condición de oscilación dice que  $Z_L + Z_D = 0$  resultará que deberá cumplirse que  $Z_L = -Z_D$ , ecuación compleja que deberá cumplirse tanto para su parte real como para su parte imaginaria:  $R_L = -R_D$  y  $X_L = -X_D$ . Y como en este caso  $R_D = -R$  resultará que la potencia vendrá dada por:

$$P_{out} = \frac{1}{2} R I_{rf}^2$$

Por otro lado se sabe que  $R = a - bI_{rf}^2$  por lo que sustituyendo la potencia quedará como

$$P_{out} = \frac{1}{2} (a - bI_{rf}^2) I_{rf}^2$$

Derivando respecto a  $I_{rf}$  e igualando a cero se encontrará el valor máximo de  $P_{out}$ .

$$\frac{\partial P_{out}}{\partial I_{rf}} = \frac{1}{2} (2aI_{rf} - 4bI_{rf}^3) = I_{rf}(a - 2bI_{rf}^2)$$

Igualando la cero y despejando  $I_{rf}$  resulta

$$I_{rf} = \sqrt{\frac{a}{2b}}$$

Es por tanto necesario conocer las constantes  $a$  y  $b$ . Para cada una de las polarizaciones habrá unos valores para estas constantes. De la gráfica 3 se pueden extraer estos valores. Para  $I_{rf} = 0$  el valor de  $R$  es  $a$  según la ecuación del enunciado. Observando la gráfica para las tres polarizaciones resultarán:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2,5 \\ a_3 &= 2 \end{aligned}$$

Para el cálculo de la constante  $b$  nos fijamos en el valor de  $I_{rf0}$  que hace  $R = 0$ , resultando que:

$$b = \frac{a}{I_{rf0}^2}$$

y para cada una de la polarizaciones se tiene que:

$$I_{rf01} = 800 \text{ mA} \Rightarrow b_1 = \frac{3}{0,8^2}$$

$$I_{rf02} = 700 \text{ mA} \Rightarrow b_2 = \frac{2,5}{0,7^2}$$

$$I_{rf03} = 600 \text{ mA} \Rightarrow b_3 = \frac{2}{0,6^2}$$

Y las potencias máximas resultarán:

$$P_{out1max} = \frac{1}{2} (a_1 - b_1 I_{rf}^2) I_{rf}^2 = \frac{1}{2} \left( a_1 - b_1 \frac{a_1}{2b_1} \right) \frac{a_1}{2b_1} = \frac{a_1^2}{8b_1} = \frac{a_1^2}{8 \frac{a_1}{0,8^2}} = \frac{a_1 0,8^2}{8} = 240 \text{ mW}$$

$$P_{out1max} = 240 \text{ mW}$$

$$P_{out2max} = \frac{a_2 0,7^2}{8} = 153,1 \text{ mW}$$

$$P_{out2max} = 153,1 \text{ mW}$$

$$P_{out3max} = \frac{a_3 0,6^2}{8} = 90 \text{ mW}$$

$$P_{out3max} = 90 \text{ mW}$$

Puesto que solo a una de las polarizaciones presenta un potencia de RF máxima superior a 200 mW será ésta la polarización escogida, es decir la polarización de 1000 mA.

Otra posibilidad para llegar a esta conclusión sería la de encontrar el valor de la corriente  $I_{rf}$  que permite una potencia de 200 mW. El procedimiento sería el siguiente:

$$P_{out} = \frac{1}{2}(a - bI_{rf}^2)I_{rf}^2$$

$$bI_{rf}^4 - aI_{rf}^2 + 2P_{out} = 0$$

Despejando  $I_{rf}^2$ :

$$I_{rf}^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b2P_{out}}}{2b}$$

Sustituyendo los coeficiente  $a$  y  $b$  de cada polarización se tendrían los valores indicados en la tabla 1

$I_{DC0}$ (mA)	$I_{rf1}^2$	$I_{rf2}^2$
1000	0,1894	0,4506
900	0,24-j0,13	0,24+0,13
800	0,18-j0,199	0,18+j0,199

Cuadro 1: Valores de  $I_{rf}$  para obtener una  $P_{out} = 200 \text{ mW}$

De esta tabla se observa que solo la polarización de 1000 mA nos da soluciones reales, lo que confirma la conclusión ya obtenida.

b) El elemento reactivo debe cancelar la capacidad del diodo. El valor de dicha reactancia deberá ser por tanto:

$$X = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = 10,61 \Omega$$

$$X = 10,61 \Omega$$

En cuanto al valor de la impedancia de la línea de  $\lambda/4$  deberá adaptar la resistencia  $R$  al valor de  $50 \Omega$ . El valor de la resistencia se deberá calcular como aquella que maximiza la potencia de salida. Según se vió en el primer apartado el valor de  $I_{rf}$  que maximiza la potencia venía dado por:

$$I_{rf} = \sqrt{\frac{a_1}{2b_1}} = \sqrt{\frac{a_1}{2 \cdot \frac{a_1}{0,8^2}}} = 0,5657 \text{ A} = 565,68 \text{ mA}$$

Y este valor de corriente supondrá una resistencia igual a:

$$R = a_1 - b_1 I_{rf}^2 = 1,5 \Omega$$

luego el valor de  $Z'_0$  será:

$$Z'_0 = \sqrt{1,5 \cdot 50} = 8,66 \Omega$$

$$\boxed{Z'_0 = 8,66 \Omega}$$

c) Como amplificador, trabajando en pequeña señal, lo que cambia es el punto de trabajo, que ya no será el de máxima potencia. El valor de la reactancia seguirá siendo el mismo y lo que cambiará será el valor de  $R$ . Para pequeña señal el valor de  $R$  será de  $3 \Omega$  según se desprende de la gráfica de la figura 3. El valor de  $X$  seguirá siendo el mismo. En cuanto al valor de  $Z'_0$  deberá ser tal que proporcione un factor de reflexión capaz de presentar una ganancia de  $12 \text{ dB}$ . La ganancia de transferencia viene dada por:

$$G_t = |\rho|^2 = \left| \frac{-Z_0'^2 - Z_0 R}{-Z_0'^2 + Z_0 R} \right|^2 = 10^{12/10} = 15,85$$

Teniendo presente que para garantizar la estabilidad la impedancia  $Z_0$  debe ser mayor que la resistencia negativa  $Z_0'^2/R$  resultará que:

$$\left| \frac{-Z_0'^2 - Z_0 R}{-Z_0'^2 + Z_0 R} \right| = \left| \frac{Z_0'^2 + Z_0 R}{Z_0'^2 - Z_0 R} \right| = \frac{Z_0'^2 + Z_0 R}{Z_0 R - Z_0'^2}$$

De forma que

$$\frac{Z_0'^2 + Z_0 R}{Z_0 R - Z_0'^2} = \sqrt{15,85} = 3,9811$$

$$Z_0'^2 + Z_0 R = 3,9811(Z_0 R - Z_0'^2)$$

$$Z_0'^2(1 + 3,9811) = Z_0 R(3,9811 - 1)$$

$$Z_0'^2(4, 9811) = Z_0 R(2, 9811)$$

$$Z_0'^2 = Z_0 R \frac{2, 9811}{4, 9811} = 50 \cdot 3 \cdot 0, 5985 = 89, 772$$

$$Z_0' = 9, 4748 \Omega$$

d) Numerando el híbrido como

- acceso 1: entrada
- acceso 2: salida
- acceso 3: diodo IMPATT 1
- acceso 4: diodo IMPATT 2

los parámetros de dispersión serán:

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & j & 1 \\ 1 & j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De forma que las ondas salientes se pueden expresar como

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3 + ja_4) \\ b_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ja_3 + a_4) \\ b_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + ja_2) \\ b_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ja_1 + a_2) \end{aligned}$$

Y teniendo presente que en los accesos 3 y 4 deberá cumplirse que:

$$\begin{aligned} a_3 &= \rho \cdot b_3 \\ a_4 &= \rho \cdot b_4 \end{aligned}$$

De forma que en la salida se tendrá que:

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(j\rho \cdot b_3 + \rho \cdot b_4) = \frac{1}{2}(j\rho \cdot (a_1 + ja_2) + \rho \cdot (ja_1 + a_2)) = \rho ja_1$$

La ganancia de transferencia será:

$$G_t = \left| \frac{b_2}{a_1} \right|^2 = |\rho|^2$$

$$\boxed{G_t = 12 \text{ dB}}$$

Y la reflexión en la entrada será:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho b_3 + j\rho b_4) = \frac{1}{2}\rho(a_1 + ja_2 - a_1 + ja_2) = \frac{1}{2}\rho 2ja_2$$

Y al estar el acceso 2 terminado  $a_2 = 0$ , por lo que el factor de reflexión a la entrada será:

$$\rho_{int} = \frac{b_1}{a_1} = 0$$

$$\boxed{\rho_{int} = 0}$$

# MICROONDAS

Examen junio 04

M. Baquero, F. Peñaranda y V. Boria

11 JUNIO 04

11.1 PROBLEMA 1 (40 p)

Dos amigos, uno español y otro inglés, discuten acerca de cómo construir una antena mediante una guía circular de manera casera. El primero propone el uso de una lata de aceitunas, con un radio  $a_1=7$  cm y el segundo una lata de Pringles, con un radio  $a_2=4$  cm.

Para decidir cuál utilizar, se plantean que la frecuencia de trabajo será  $f=2.45$  Ghz y que los modos a considerar serán únicamente los TE, de tal forma que sólo debe propagarse un modo TE a dicha frecuencia.



Figura 1.1

Teniendo en cuenta estas premisas, y puesto que la lata del español mide casi el doble, es muy probable que puedan propagarse varios modos, por lo que se considera también la posibilidad de partir la sección transversal de la guía con láminas conductoras para formar 2, 4 u 8 guías sectoriales, como se muestra en la figura 1.2 (casos a, b y c).

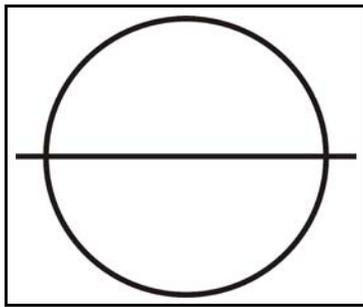


Figura 1.2a

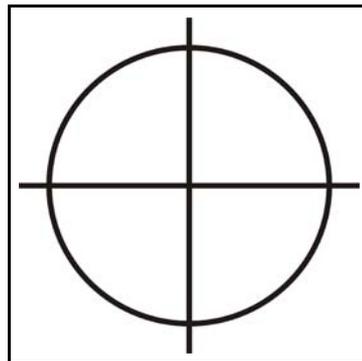


Figura 1.2b

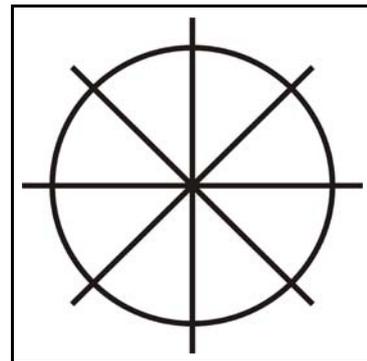


Figura 1.2c

A partir de estas premisas, se pide:

(10p) a) Calcule la expresión de todos los modos TE que pueden existir en una guía sectorial de ángulo  $\alpha$  y radio  $a$  (según la figura 1.3).

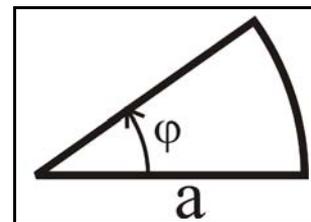


Figura 1.3

(10p) b) Indique cuáles son los modos fundamentales, así como las frecuencias de corte, de los dos primeros modos TE para cada una de las 5 posibles guías (la primera es la lata de Pringles vacía y las otras 4 son la lata de aceitunas vacía y dividida en varias subguías). Indique qué configuraciones cumplen los requerimientos deseados.

(10p) c) Indique también, de las configuraciones seleccionadas en el apartado anterior, cuál consigue mayor atenuación en el primer modo al corte.

(10p) d) Por último, si no fuera posible dividir la lata del español en varias subguías, se piensa en reducir el área de la guía, para aumentar la frecuencia de corte del primer modo TE, y que se parezca al comportamiento de la lata de Pringles. Para ello se introduce en su interior, y en el

centro, un tubo macizo metálico de radio variable. ¿Cuál debe ser el radio aproximado de este tubo para que se cumplan los requisitos planteados anteriormente?

Datos:

1) Los ceros de la función de Bessel de primera especie ( $J_v(x) \Big|_{x=p_{v_i}} = 0$ ) y de su derivada ( $J'_v(x) \Big|_{x=p'_{v_i}} = 0$ ) son:

v	P <sub>v1</sub>	P <sub>v2</sub>	P <sub>v3</sub>	P <sub>v4</sub>	P <sub>v5</sub>
0	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309
1	3.8320	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
2	5.1394	8.4176	11.6199	14.7960	17.9598
3	6.3802	9.7630	13.0157	16.2236	19.4095
4	7.5883	11.0704	14.3743	17.6166	20.8272
5	8.7715	12.3386	15.7002	18.9801	22.2178
6	9.9361	13.5893	17.0038	20.3208	23.5861
7	11.0864	14.8213	18.2876	21.6415	24.9349
8	12.2251	16.0378	19.5545	22.9452	26.2668

v	P' <sub>v1</sub>	P' <sub>v2</sub>	P' <sub>v3</sub>	P' <sub>v4</sub>	P' <sub>v5</sub>
0	3.8320	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
1	1.8412	5.3314	8.5363	11.7060	14.8636
2	3.0542	6.7062	9.9695	13.1704	16.3475
3	4.2012	8.0159	11.3460	14.5859	17.7887
4	5.3176	9.2845	12.6821	15.9641	19.1960
5	6.4156	10.5199	13.9872	17.3128	20.5755
6	7.5013	11.7349	15.2682	18.6374	21.9317
7	8.5778	12.9324	16.5294	19.9419	23.2681
8	9.6474	14.1155	17.7740	21.2291	24.5872

2) Los campos de la guía circular son:

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \frac{1}{K_c^2} \cdot (-j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \nabla_t \times H_z - \gamma \cdot \vec{\nabla}_t E_z) \\ \vec{H}_t = \frac{1}{K_c^2} \cdot (j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \nabla_t \times E_z - \gamma \cdot \vec{\nabla}_t H_z) \end{cases}$$

donde  $K_c^2 = k^2 + \gamma^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon + \gamma^2$

3) En coordenadas cilíndricas los operadores son:

$$\begin{cases} \nabla_t \times A_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \cdot \hat{r} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \cdot \hat{\varphi} \\ \vec{\nabla} A_z = \frac{\partial A_z}{\partial r} \cdot \hat{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \cdot \hat{\varphi} \end{cases}$$

a) Los modos TE parten de la resolución de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas de la componente axial de campo magnético:

$$H_z = A \cdot J_v(k_c \cdot r) \cdot \cos(v \cdot \varphi + \Theta_0)$$

donde el número de onda  $k_c$  está relacionado con la constante de propagación  $\gamma$  de la siguiente forma:

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = \omega^2 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r + \gamma^2$$

A partir de esta solución genérica calculamos el resto de componentes, antes de aplicar las condiciones de contorno. El campo magnético transversal es:

$$\vec{H}_t = \frac{-\gamma}{k_c^2} \cdot \vec{\nabla} H_z = \frac{-\gamma}{k_c^2} \cdot A \cdot \begin{cases} k_c \cdot J'_v(k_c \cdot r) \cdot \cos(v \cdot \varphi + \Theta_0) \cdot \hat{r} + \\ + \frac{-1}{r} \cdot v \cdot J_v(k_c \cdot r) \cdot \text{sen}(v \cdot \varphi + \Theta_0) \cdot \hat{\varphi} \end{cases}$$

Y el campo eléctrico transversal:

$$\vec{E}_t = Z_{TE} \cdot (\vec{H}_t \times \hat{z}) = Z_{TE} \cdot (H_\varphi \cdot \hat{r} + H_r \cdot \hat{\varphi})$$

donde la impedancia de modo  $Z_{TE}$  es:

$$Z_{TE} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}{\gamma}$$

Como queremos analizar la guía sectorial de radio  $a$  y apertura angular  $\varphi$ , las condiciones de contorno se aplican sobre 3 caras, de tal forma que el campo eléctrico tangencial se anule:

$$\begin{cases} E_\varphi|_{r=a} = 0 \Rightarrow J'_v(k_c \cdot a) = 0 \Rightarrow k_c = \frac{p'_{vl}}{a} \\ E_r|_{\varphi=0} = 0 \Rightarrow \text{sen}(\Theta_0) = 0 \Rightarrow \Theta_0 = 0 \\ E_r|_{\varphi=\alpha} = 0 \Rightarrow \text{sen}(v \cdot \alpha) = 0 \Rightarrow v = \frac{p \cdot \pi}{\alpha} \end{cases}$$

Por lo tanto, el número de onda  $k_c$  en la guía se calcula a partir de los ceros de las primeras derivadas de la función de Bessel de primera especie. Y el orden de esta función de Bessel es un número entero de  $\pi/\alpha$ .

La forma de nombrar estos modos puede ser de varias 2 formas. Por ejemplo modos  $TE_{\nu l}$ , donde  $\nu$  es el orden de la función de Bessel. Otra forma sería  $TE_{pl}$ , donde  $p$  indicaría el orden entero a partir del cual se calcula el orden de la función de Bessel. Cualquiera de las dos formas sería buena, teniendo en cuenta que en ambas el resultado es la misma.

Por último, y aunque no se pida en este apartado, vamos a calcular los modos que aparecen en una guía circular vacía, ya que serán útiles en el próximo apartado.

Si la guía está vacía, el orden de la función de Bessel de primera especie que es, en general, un complejo cualquiera de valor  $\nu$ , debe tomar únicamente valores enteros debido a la simetría circular de la estructura, de tal forma que  $\nu=n$ .

Y cuando aplicamos la condición de contorno sobre la pared circular, en  $r=a$ , tenemos:

$$\left\{ E_{\phi} \Big|_{r=a} = 0 \Rightarrow J'_n(k_c \cdot a) = 0 \Rightarrow k_c = \frac{p'_{nl}}{a} \right.$$

Estos modos serán, por lo tanto, los modos  $TE_{nl}$ , donde ahora sí que el valor  $n$  representa directamente el orden de la función de Bessel.

b) Para calcular los primeros modos que aparecen en cada uno de los 5 casos propuestos debemos acudir, en primer lugar, a la expresión general de la frecuencia de corte de los modos TE.

Sabemos que se define como la frecuencia a partir de la cual el campo se propaga. Es decir, cuando la constante de propagación pasa a ser imaginaria pura. Por lo tanto el caso límite es cuando la constante de propagación es nula, de tal forma que:

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 \Big|_{\gamma=0} = \omega_c^2 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

Es de destacar que la frecuencia de corte es directamente proporcional al número de onda de corte de la guía. Y de las expresiones anteriores comprobamos que este número de onda es, a su vez, directamente proporcional a los ceros de la primera derivada de la función de Bessel de primera especie de diferentes órdenes. Por lo tanto, ordenando estos ceros tendremos ordenados los modos TE de cada una de las guías propuestas.

Aplicando esta expresión y el criterio mencionado a cada uno de los casos propuestos llegamos a los siguientes valores (en la columna “Nº Orden” hemos ordenado las configuraciones, del 1 al 5, y en la columna “¿Cumple?” se indica si cumple o no la condición de que se propague un único modo TE a la frecuencia de trabajo  $f=2.45$  GHz):

		Modo:	$p'_{nl}$	$f_c$ (GHz)	Nº Orden	¿Cumple?
PRINGLES ( $a=4$ cm)	Vacía	1: $TE_{11}$	$p'_{11}=1.8412$	2.19	1	SÍ
		2: $TE_{21}$	$p'_{21}=3.0542$	3.65		

ACEITUNAS (a=7 cm)	Vacía	1: TE <sub>11</sub>	p' <sub>11</sub> =1.8412	1.26	2	NO
		2: TE <sub>21</sub>	p' <sub>21</sub> =3.0542	2.08		
	Dos partes (α=π; v=n)	1: TE <sub>11</sub>	p' <sub>11</sub> =1.8412	1.26	3	NO
		2: TE <sub>21</sub>	p' <sub>21</sub> =3.0542	2.08		
	Cuatro partes (α=π/2; v=2·p)	1: TE <sub>21</sub>	p' <sub>21</sub> =3.0542	2.08	4	SÍ
		2: TE <sub>01</sub>	p' <sub>01</sub> =3.8320	2.61		
	Ocho partes (α=π/4; v=4·p)	1: TE <sub>01</sub>	p' <sub>01</sub> =3.8320	2.61	5	NO
		2: TE <sub>41</sub>	p' <sub>41</sub> =5.3176	3.63		

c) Para calcular la atenuación de los modos al corte acudimos a la expresión que nos da la constante de propagación:

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = \omega^2 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r + \gamma^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}$$

Aplicando esta expresión a los modos anteriores, siempre que a la frecuencia f=2.45 Ghz estén al corte, obtenemos, para las dos configuraciones que cumplen los requisitos planteados:

		Modo:	f <sub>c</sub> (GHz)	γ	Nº Orden	¿Cumple?
PRINGLES (a=4 cm)	Vacía	2: TE <sub>21</sub>	3.65	56.54	1	SÍ
ACEITUNAS (a=7 cm)	Cuatro partes (α=π/2; v=2·p)	2: TE <sub>01</sub>	2.61	19.07	4	SÍ

d) La última configuración propuesta supone que la lata de aceitunas se convierte en un cable coaxial, cuyo modo fundamental es un modo TEM y no un modo TE como se plantea en el enunciado. Por lo tanto no cabe plantearse nada más en este apartado puesto que NO CUMPLE las especificaciones del enunciado.

11.2. PROBLEMA 2 (40 p)

Una determinada red de dos accesos admite el siguiente circuito equivalente de la figura 1:

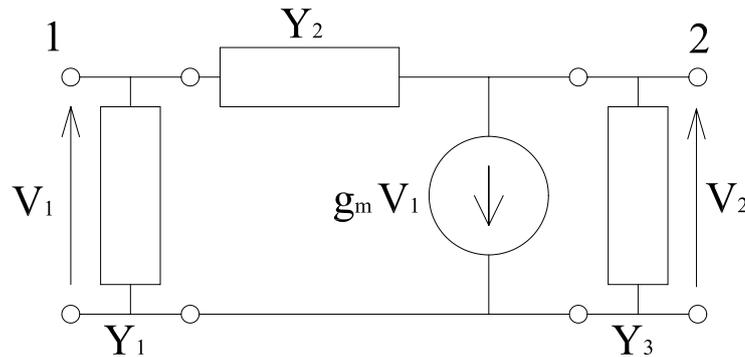


Figura 1: Circuito equivalente

(5 p) a.- Viendo la estructura de la red cuales de estas propiedades poseerá y cuales no y por qué: unitariedad, pasiva, reciprocidad y simétrica.

(10 p) b.- Para el caso general de una red de dos accesos encontrar las expresiones de cada uno de los parámetros  $Y$  en función de los parámetros de dispersión,  $S$ .

(10 p) c.- Para el caso particular del circuito de la figura 1 encontrar los parámetros de admitancia de la red en función de  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  y  $g_m$ , y decir que restricciones deberían tener los valores de los elementos de dicha red para que fuese una red recíproca y simétrica.

(5 p) d.- Calcular los valores de  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  y  $g_m$  para obtener los siguientes parámetros  $S$ :

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,35 \angle 160^\circ & 0,06 \angle 110^\circ \\ 3,00 \angle 75^\circ & 0,92 \angle 165^\circ \end{bmatrix}$$

(10 p) e.- Si quisieramos modelar con el circuito de la figura 1 un inversor con una constante de inversión de  $J = 10$  calcular cuales deberían ser los valores de  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  y  $g_m$ .

**Datos:**

Inversa de una matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$


---

a) La red en principio puede ser con pérdidas pues no restringe los valores de las admitancias  $Y_i$ , de forma que puede que posean parte real alguna de estas tres admitancias. Es decir no cumplirá unitariedad. Además al poseer una fuente de corriente controlada por tensión tampoco será pasiva.

Esta característica también forzará a que no tenga por qué cumplir unitariedad pues el balance de las potencias entrante y saliente no queda garantizado aun no habiendo elementos que disipen potencia. Respecto a la propiedad de reciprocidad tampoco lo cumplirá por su carácter activo.

Y es evidente que la red no es simétrica en general.

b) La matriz de admitancias me relaciona tensiones y corrientes de la siguiente forma:

$$[I] = [Y][V]$$

siendo  $[I]$  y  $[V]$  los valores de tensión y corriente normalizados en los accesos.

Por otro lado sabemos que estas tensiones y corrientes normalizadas la podemos poner en función de las ondas de tensión normalizadas  $a$  y  $b$ :

$$[V] = [a] + [b]$$

y

$$[I] = [a] - [b]$$

por lo que podremos poner que:

$$[V] + [I] = 2[a]$$

$$[V] - [I] = 2[b]$$

Y como sabemos que  $[b] = [S][a]$  podremos sustituir  $[a]$  y  $[b]$  en función de tensiones y corrientes. De forma que nos quedará que:

$$\frac{1}{2}([V] - [I]) = [S]\frac{1}{2}([V] + [I])$$

De ahí despejamos la relación entre  $[V]$  e  $[I]$  obteniendo:

$$-([1] + [S])[I] = ([S] - [1])[V]$$

quedando

$$[I] = ([1] + [S])^{-1}([1] - [S])[V]$$

Que nos permite decir que la matriz de admitancias vendrá dada por:

$$[Y] = ([1] + [S])^{-1}([1] - [S])$$

siendo  $[1]$  la matriz identidad.

c) En este apartado deberemos encontrar en primer lugar las expresiones de los parámetros de admitancia de la red de la figura 1. Para ello haremos uso de la definición de cada uno de estos parámetros.

**Parámetro  $Y_{11}$**

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

Deberemos cortocircuitar el acceso 2 y encontrar la relación tensión corriente en el acceso 1, figura 2.

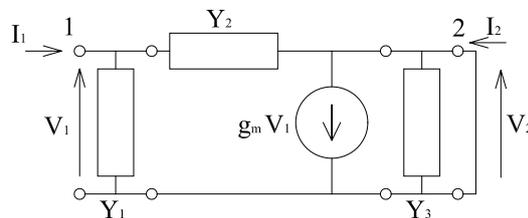


Figura 2: Medida parámetros  $Y_{11}$  y  $Y_{21}$

al quedar cortocircuitado el acceso 2 la admitancia que veremos desde el acceso 1 será directamente la suma  $Y_1$  y  $Y_2$ .

$$Y_{11} = Y_1 + Y_2$$

**Parámetro  $Y_{21}$**  La definición es ahora

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_1=0}$$

quedando la misma situación que en caso anterior, figura 2. En esta situación la corriente por la admitancia  $Y_2$  será directamente el producto de  $V_1$  por  $Y_2$ , que deberá ser igual a  $-I_2$  más la corriente que se va por la fuente de corriente controlada:

$$V_1 Y_2 = -I_2 + g_m V_1$$

y despejando  $I_2$  en función de  $V_1$  nos queda que

$$I_2 = (g_m - Y_2) V_1$$

por lo que el parámetro  $Y_{21}$  será:

$$Y_{21} = g_m - Y_2$$

**Parámetro  $Y_{12}$**  La definición en este caso será:

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

que nos lleva a la situación mostrada en la figura 3

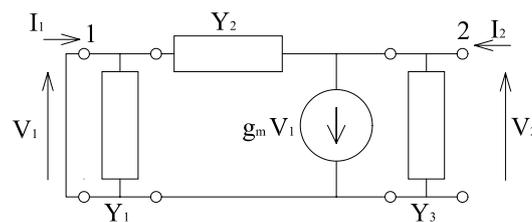


Figura 3: Medida parámetros  $Y_{12}$  y  $Y_{22}$

En este caso toda la tensión aplicada en el acceso 2 recae sobre la admitancia  $Y_2$  y la corriente que aparezca en esta admitancia será la misma que la que entra por el acceso 1 al estar éste cortocircuitado. De forma que tendremos

$$I_1 = -V_2 \cdot Y_2$$

quedando que  $Y_{12}$  será

$$Y_{12} = -Y_2$$

**Parámetro  $Y_{22}$**  Su definición es

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

que establece las mismas condiciones que en el caso anterior, figura 3. Al estar cortocircuitado el acceso uno las admitancias  $Y_2$  e  $Y_3$  quedan en paralelo siendo  $Y_{22}$  la suma de ambas:

$$Y_{22} = Y_2 + Y_3$$

De estas relaciones podríamos despejar de forma inmediata los valores de  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  y  $g_m$  en función de los parámetros de admitancia:

$Y_1 = Y_{11} + Y_{12}$
$Y_2 = -Y_{12}$
$Y_3 = Y_{22} + Y_{12}$
$g_m = Y_{21} - Y_{12}$

Cuando una red es recíproca debe cumplirse que:

$$[S]^t = [S] \qquad [Y]^t = [Y] \qquad [Z]^t = [Z]$$

lo que significa en términos de parámetros de admitancia que  $Y_{12} = Y_{21}$ , lo que nos lleva a que:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_{11} + Y_{12} \\ Y_2 &= -Y_{12} \\ Y_3 &= Y_{22} + Y_{12} \\ g_m &= 0 \end{aligned}$$

Si además se trata de una red simétrica resultará que  $Y_{11} = Y_{22}$  por lo que  $Y_1 = Y_3$  conclusión por otra parte predecible del aspecto del circuito equivalente.

d) Puesto que conocemos la relación de los parámetros  $S$  con los  $Y$  podemos calcular estos últimos a partir de los parámetros de dispersión que nos dan en el enunciado.

Para ello deberemos encontrar  $(1 + [S])^{-1}$  y  $(1 - [S])$ .

$$[1] + [S] = \begin{bmatrix} 1 + S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & 1 + S_{22} \end{bmatrix}$$

El determinante de esta matriz será:

$$\Delta = (1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}$$

De forma que la matriz inversa  $([1] + [S])^{-1}$  será:

$$([1] + [S])^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + S_{22} & -S_{12} \\ -S_{21} & 1 + S_{11} \end{bmatrix}$$

Así pues la matriz de admitancias será:

$$[Y] = ([1] + [S])^{-1}([1] - [S]) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + S_{22} & -S_{12} \\ -S_{21} & 1 + S_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - S_{11} & -S_{12} \\ -S_{21} & 1 - S_{22} \end{bmatrix}$$

$$[Y] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (1 + S_{22})(1 - S_{11}) + S_{21}S_{12} & -S_{12}(1 + S_{22}) - S_{12}(1 - S_{22}) \\ -S_{21}(1 - S_{11}) - S_{21}(1 + S_{11}) & S_{12}S_{21} + (1 + S_{11})(1 - S_{22}) \end{bmatrix}$$

$$[Y] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (1 + S_{22})(1 - S_{11}) + S_{21}S_{12} & -2S_{12} \\ -2S_{21} & S_{12}S_{21} + (1 + S_{11})(1 - S_{22}) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores de los parámetros  $S$  del enunciado encontraremos los siguientes valores de los parámetros  $Y$ :

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0,6198 + j0,7554 & -0,1391 - j0,3835 \\ -16,6962 - j11,7188 & 3,0214 - j2,3051 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,98_{\angle 50,63} & 0,41_{\angle -109,93} \\ 20,40_{\angle -144,93} & 3,80_{\angle -37,34} \end{bmatrix}$$

Así pues tendremos que los valores de  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  y  $g_m$  serán:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= Y_{11} + Y_{12} = 0,4807 + j0,3719 = 0,6078 \angle_{37,72} \\
 Y_2 &= -Y_{12} = 0,1391 + j0,3835 = 0,4080 \angle_{70,06} \\
 Y_3 &= Y_{22} + Y_{12} = 2,8823 - j2,6886 = 3,9416 \angle_{-43,01} \\
 g_m &= Y_{21} - Y_{12} = -16,5571 - j11,3353 = 20,0655 \angle_{-145,60}
 \end{aligned}$$

e) De un inversor sabemos que su matriz de admitancia debe tener el aspecto:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$J^2 = -Y_{12}^2$$

por lo que en nuestro caso supondrá:

$$100 = -Y_{12}^2$$

$$Y_{12} = j10$$

De la relación de los parámetros de admitancia con los valores de los elementos del circuito equivalente deducimos que:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= Y_{11} + Y_{12} = 0 + j10 = j10 \\
 Y_2 &= -Y_{12} = -j10 \\
 Y_3 &= Y_{22} + Y_{12} = 0 + j10 = j10 \\
 g_m &= Y_{21} - Y_{12} = 0
 \end{aligned}$$

**11.3. PROBLEMA 3 (40 p)**

Se desea diseñar un amplificador con un transistor que a  $3\text{ GHz}$  presenta los siguientes parámetros de dispersión referidos a  $Z_o = 50\ \Omega$ :

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,67 \angle 156^\circ & 0,0348 \angle -28^\circ \\ 2,56 \angle 75^\circ & 0,92 \angle 153^\circ \end{bmatrix}$$

Los círculos de estabilidad se muestran en la carta de Smith adjunta.

- (5 p) a.- Con dichos parámetros de dispersión calcular los factores de reflexión de fuente y carga que maximizan la ganancia de transferencia unilateral y respetan estabilidad. Calcular a su vez el valor de la ganancia de transferencia unilateral máxima.

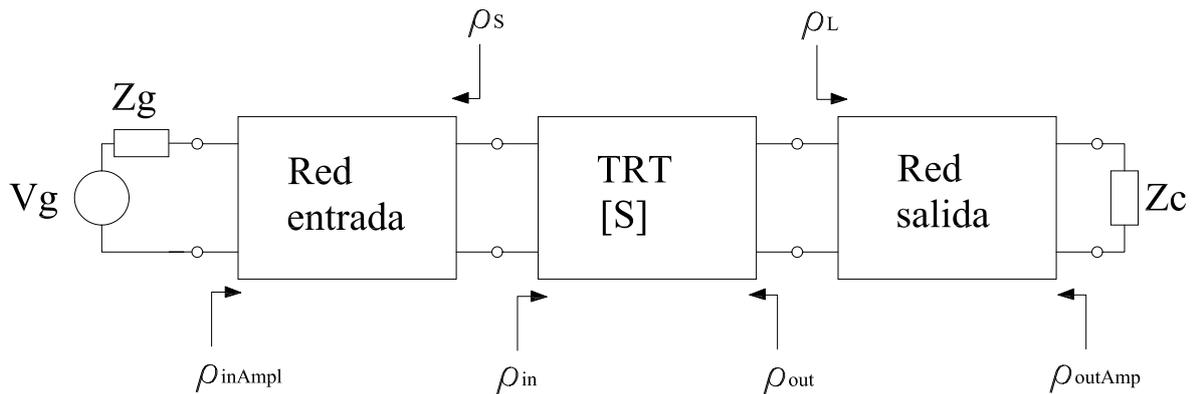


Figura 4: Amplificador

- (6 p) b.- Tomando como red de entrada la propuesta en la figura 5 encontrar los valores de  $Z_{oent}$  y de  $X_{ent}$ .
- (6 p) c.- Si la red de salida es la mostrada en la figura 5 encontrar los valores de  $Z_{osal}$  y de  $B_{sal}$ .
- (7 p) d.- Calcular para estos valores que maximizan ganancia de transferencia unilateral cuales serían los factores de reflexión  $\rho_{inAmp}$  y  $\rho_{outAmp}$  a la entrada y salida del amplificador sin la aproximación unilateral.

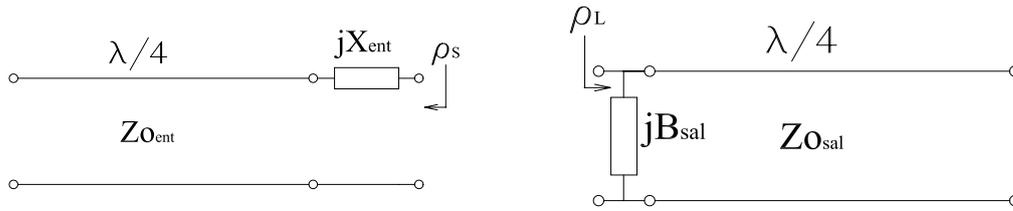


Figura 5: Redes de entrada y salida

(8 p) e.- Si el generador conectado a la entrada del amplificador presenta un  $Z_g = 50 \Omega$  y una  $V_{ca} = 10 V$  calcular las potencias disponible por el generador, entregada por el generador y entregada a la salida del amplificador (a  $Z_c$ ).

(8 p) f.- Si varía el valor de  $Z_g$ , con valores siempre reales y positivos, calcular su valor máximo que garantiza estabilidad manteniendo la misma red de entrada diseñada.

**Datos:**

Ganancia de transferencia:

$$G_T = \frac{|S_{21}|^2(1 - |\rho_S|^2)(1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - S_{11}\rho_S)(1 - S_{22}\rho_L) - S_{12}S_{21}\rho_S\rho_L|^2}$$

a) La expresión de la ganancia de transferencia unilateral la podemos extraer de la fórmula general presentada en los datos del enunciado, particularizándola para  $S_{12} = 0$ . Quedando que:

$$G_{Tu} = \frac{|S_{21}|^2(1 - |\rho_S|^2)(1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - S_{11}\rho_S)(1 - S_{22}\rho_L)|^2} = \frac{(1 - |\rho_S|^2)}{|(1 - S_{11}\rho_S)|^2} |S_{21}|^2 \frac{(1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - S_{22}\rho_L)|^2}$$

Expresión que será máxima cuando  $\rho_S = S_{22}^*$  y  $\rho_L = S_{11}^*$ , es decir

$\begin{aligned} \rho_S &= 0,672 \angle -156^\circ \\ \rho_L &= 0,92 \angle -153^\circ \end{aligned}$
---

Puesto que tanto  $|S_{11}| < 1$  como  $|S_{22}| < 1$  la zona de estabilidad será la que contiene el centro de la carta de Smith. Situando en la carta de Smith los valores de  $\rho_S$  y  $\rho_L$  calculados comprobamos que ambos caen en zona estable.

En cuando a la ganancia tendremos:

$$G_{1_{max}} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2} = 1,8234 = 2,6089 \text{ dB}$$

$$G_{2_{max}} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2} = 6,5104 = 8,1361 \text{ dB}$$

$$G_{Tu_{max}} = G_{1_{max}} \cdot |S_{21}|^2 \cdot G_{2_{max}} = 77,7998 = 18,9098 \text{ dB}$$

$$G_{Tu_{max}} = 18,9098 \text{ dB}$$

b) La impedancia que deberemos conseguir con la red de entrada será:

$$\bar{Z}_S = \frac{1 + \rho_S}{1 - \rho_S} = 0,2047 - j0,204$$

La parte real la conseguiremos con la línea de  $\lambda/4$  que deberá presentar una impedancia característica igual a:

$$Z_{o_{ent}} = Z_o \cdot \sqrt{0,2047}$$

Tomando valores normalizados y por tanto escogiendo  $Z_o = 1$  resultará:

$$\bar{Z}_{o_{ent}} = \sqrt{0,2047} = 0,4524$$

Desnormalizando respecto a  $Z_o = 50 \Omega$ :

$$Z_{o_{ent}} = 0,4524 \cdot 50 = 22,6208 \Omega$$

Para sintetizar la parte reactiva deberemos poner una reactancia en serie cuyo valor coincidirá con la parte reactiva de  $Z_S$ , es decir:

$$X_{ent} = -0,204 \cdot 50 = -10,2011 \Omega$$

c) Para red de salida haríamos algo similar resultando en este caso que:

$$\bar{Z}_L = \frac{1 + \rho_L}{1 - \rho_L} = 0,0441 - j0,2396$$

y

$$\bar{Y}_L = \frac{1}{\bar{Z}_L} = 0,7422 + j4,0365$$

Por lo que:

$$Y_{o_{sal}} = Y_o \cdot \sqrt{0,742} = \frac{1}{Z_o} \sqrt{0,742} = 0,0172 \text{ S}$$

$$Z_{o_{sal}} = \frac{1}{Y_{o_{sal}}} = 58,037 \Omega$$

Y en cuanto a la susceptancia tendremos que:

$$B_{sal} = \frac{4,0365}{Z_o} = 0,0807 \text{ S}$$

d) Calculando por un lado el factor de reflexión que tendremos a la entrada del transistor:

$$\rho_{in} = S_{11} + \frac{S_{21}S_{12}\rho_L}{1 - S_{22}\rho_L} = -0,761 - j0,2396 = 0,7978 \angle_{-162,5229^\circ}$$

$$\bar{Z}_{in} = \frac{1 + \rho_{in}}{1 - \rho_{in}} = 0,1151 - j0,1517$$

Desnormalizando

$$Z_{in} = (0,1151 - j0,1517)Z_o = 5,7 - j7,59 \Omega$$

De forma que antes de la reactancia serie tendremos una impedancia normalizada igual a:

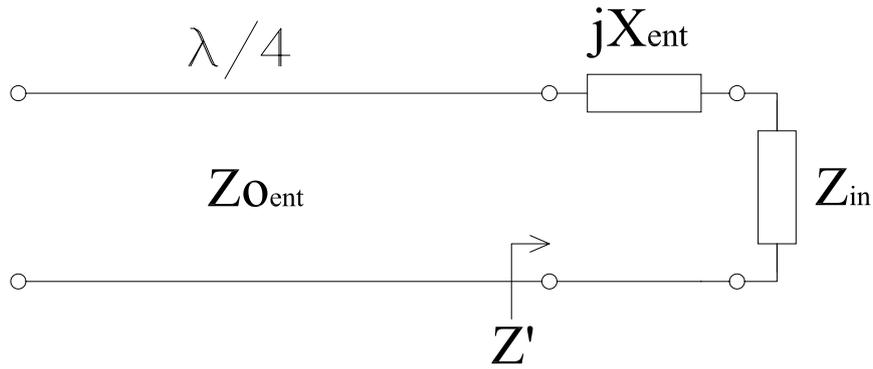


Figura 6: Impedancia entrada amplificador

$$Z' = jX_{ent} + Z_{in} = -j0,204 + 0,1151 - j0,1517 = 0,1151 - j0,3557$$

Que desnormalizando será:

$$Z' = 50(0,1151 - j0,3557) = 5,755 - j17,785 \Omega$$

Y aplicando ahora el inversor de la línea de  $\lambda/4$ :

$$Z_{inAmpl} = \frac{Z_{oent}^2}{Z'} = \frac{(22,6208)^2}{5,755 - j17,785} = 8,4276 + j26,0444 \Omega$$

Quedando que el factor de reflexión a la entrada del amplificador será:

$$\rho_{inAmpl} = \frac{Z_{inAmpl} - Z_o}{Z_{inAmpl} + Z_o} = -0,4278 + j0,6365 = 0,7669 \angle_{123,9084}$$

$$\rho_{inAmpl} = 0,7669 \angle_{123,9084^\circ}$$

Para el caso del factor de reflexión de salida repetimos los mismos pasos. En primer lugar calculamos la admitancia a la salida del transistor,  $Y_{out}$  calculando en primer lugar su factor de reflexión asociado,  $\rho_{out}$ :

$$\rho_{out} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\rho_S}{1 - S_{11}\rho_S} = -0,8553 + j0,3145 = 0,9112 \angle_{159,8^\circ}$$

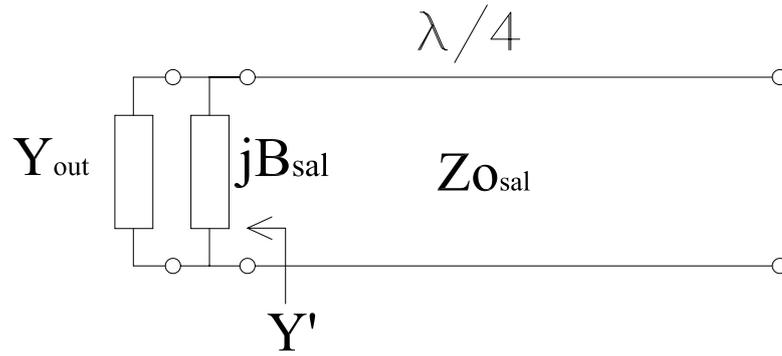


Figura 7: Impedancia salida amplificador

$$\bar{Y}_{out} = \frac{1 - \rho_{out}}{1 + \rho_{out}} = 1,4157 - j5,2484$$

La admitancia  $Y'$  que veremos al añadirle a  $Y_{out}$  la susceptancia  $B_{sal}$  será:

$$\bar{Y}' = \bar{Y}_{out} + j\bar{B}_{sal} = 1,4157 - j1,2119$$

Y aplicando ahora el inversor de  $\lambda/4$  tendremos que:

$$\bar{Y}_{outAmpl} = \frac{\bar{Y}'^2}{\bar{Y}'_{osal}} = 0,3026 + j0,259$$

Quedando que el factor de reflexión a la salida del amplificador será:

$$\rho_{outAmpl} = \frac{1 - \bar{Y}_{outAmpl}}{1 + \bar{Y}_{outAmpl}} = 0,477 - j0,2937 = 0,5602 \angle -31,62^\circ$$

$$\rho_{outAmpl} = 0,5602 \angle -31,62^\circ$$

e) En primer lugar calculemos la potencia disponible en el generador:

$$P_{avs} = \frac{1}{8} \frac{|V_{ca}|^2}{\Re[Z_g]} = 0,25 \text{ W}$$

Por otro lado tendremos que la potencia entregada al amplificador vendrá dada por:

$$P_{ent} = \frac{1}{2}|a_1|^2(1 - |\rho_{in.Ampl}|^2)$$

Sabiendo que  $a_1$  viene dada por:

$$a_1 = \frac{b_s}{1 - \rho_g \rho_{in.Ampl}}$$

que dado que  $Z_g = Z_o$  tendremos que  $\rho_g = 0$  por lo que  $a_1 = b_s$ . Y como  $b_s$  viene dada por:

$$b_s = \frac{V_{ca} \sqrt{Z_o}}{Z_o + Z_g}$$

resultará que la potencia de entrada en el amplificador la podremos poner como:

$$P_{ent} = \frac{|V_{ca}|^2}{8\sqrt{Z_o}}(1 - |\rho_{in.Ampl}|^2)$$

Sustituyendo valores quedará que:

$$P_{ent} = 0,103 \text{ W}$$

Para el cálculo de la potencia entregada a la salida del amplificador podemos hacer uso de la ganancia de transferencia ya calculada. Para el caso de ganancia unilateral tendremos:

$$P_{Lu} = G_{Tu} \cdot P_{avs} = 77,8 \cdot 0,25 = 19,45 \text{ W}$$

Si hiciésemos uso de la ganancia de transferencia sin la aproximación unilateral tendríamos que:

$$G_T = \frac{|S_{21}|^2(1 - |\rho_S|^2)(1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - S_{11}\rho_S)(1 - S_{22}\rho_L) - S_{12}S_{21}\rho_S\rho_L|^2} = 48,34$$

y por tanto la potencia entregada a la salida del amplificador sería:

$$P_L = G_T \cdot P_{avs} = 12,08 \text{ W}$$

resumiendo

$$\begin{aligned} P_{avs} &= 0,25 \text{ W} \\ P_{ent} &= 0,103 \text{ W} \\ P_{Lu} &= 19,45 \text{ W} \\ P_L &= 12,08 \text{ W} \end{aligned}$$

f) La impedancia de fuente con la red de entrada diseñada viene dada por:

$$Z_s = \frac{Z_{oent}^2}{Z_g} + jX_e = \frac{Z_{oent}^2}{Z_g} - 10,2 \Omega$$

Así pues cuando variemos  $Z_g$  nos moveremos por el círculo de reactancia constante  $-10,2/50 = -0,2$ . Sobre la carta de Smith adjunta localizamos que este círculo no intersecta al de estabilidad de entrada por lo que nunca encontraremos un valor de  $Z_s$  que nos de inestabilidad, por lo que  $Z_g$  podrá tener un valor máximo de infinito.

$$Z_g = \infty$$

# MICROONDAS

Examen febrero 04

M. Baquero, F. Peñaranda y V. Boria

## 10 FEBRERO 04

### 10.1 PROBLEMA 1 (40 p)

Se desea construir un divisor Wilkinson desbalanceado, de tal forma que la relación entre la potencia que sale por el puerto 3 respecto de la que sale por el puerto 2 sea:  $\frac{P_3}{P_2} = k^2$ , donde  $k \geq 1$ .

Para ello, el aspecto del divisor es el mostrado en la figura 1.1.

En dicha figura podemos ver que la impedancia de referencia de los 3 puertos es diferente entre sí ( $Z_{01}$ ,  $Z_{02}$  y  $Z_{03}$ ), y las dos líneas en  $\lambda/4$  también tienen impedancias características diferentes entre sí ( $Z_a$  y  $Z_b$ ).

También sabemos, además, que se cumple la siguiente relación

$$\text{entre } Z_{02} \text{ y } Z_{03}: \frac{Z_{02}}{Z_{03}} = \frac{Y_{03}}{Y_{02}} = k^2$$

A partir de estos datos, se pide:

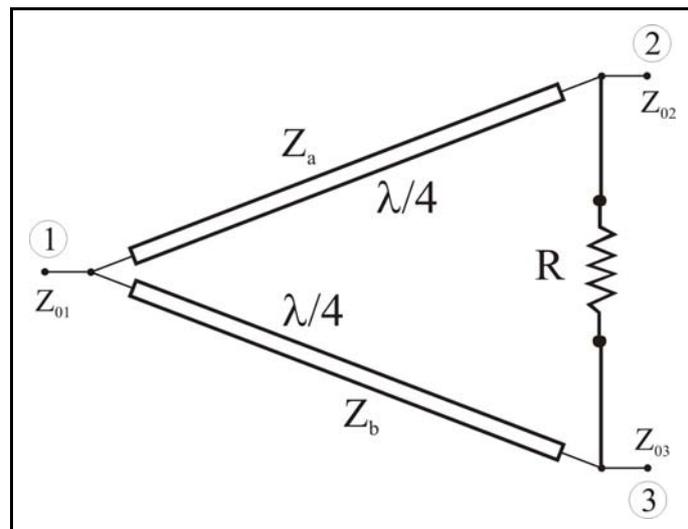


Figura 1.1.-Esquema del divisor Wilkinson desbalanceado

(15p) a) Calcule los parámetros  $S_{32}$  y  $S_{23}$ , y obtenga el valor de la resistencia  $R$  (o su admitancia  $Y=1/R$ ) en función del resto de admitancias del circuito para que ambos parámetros sean cero. Suponga, para este apartado, que  $S_{22}=0$ . Nota: puede aprovechar este apartado para plantear también los parámetros  $S_{12}$  y  $S_{22}$ , y así poder usar la resolución de un sistema  $3 \times 3$  que se da como dato.

(10p) b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, y los datos del enunciado (relación entre las potencias de salida de los puertos 2 y 3 y la relación entre las impedancias  $Z_{02}$  y  $Z_{03}$ ), calcule qué relación debe existir entre  $Y_{02}$ ,  $Y_{03}$ ,  $Y_a$  e  $Y_b$  para que se cumpla precisamente la relación

$$\frac{P_3}{P_2} = k^2. \text{ Considere, para esta relación, que } a_2=a_3=0 \text{ y, para que le resulte más fácil, calcule los}$$

parámetros  $S_{21}$  y  $S_{31}$  que necesitará para resolver este apartado a partir de las propiedades físicas y eléctricas que tiene el circuito, especialmente viendo el apartado anterior.

(10p) c) Calcule el valor de las admitancias  $Y_a$  e  $Y_b$  en función de las admitancias características de los puertos ( $Y_{01}$ ,  $Y_{02}$  e  $Y_{03}$ ) para que  $S_{11}=0$ .

(5p) d) Calcule los parámetros  $S_{21}$  y  $S_{31}$  en función de "k".

Datos:

1) Para resolver las ecuaciones que aparecen, lo más cómodo es acudir a un sistema de ecuaciones lineales en las tensiones de los puertos 1, 2 y 3 y plantearlo de forma matricial:  $\overline{\overline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ . En los casos que aparecerán en el problema, el aspecto del vector “b” es:  $\vec{b} = \alpha \cdot (1 \ 0 \ 0)^t$ . Por lo que la resolución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} & a_{13} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{33} & a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \\ a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33} & a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} & a_{13} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23} \\ a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31} & a_{12} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{32} & a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \\ a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33} \\ a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31} \end{pmatrix}; \Delta = \det(\overline{\overline{A}})$$

a) El primer apartado pide calcular los parámetros  $S_{32}$  y  $S_{23}$ . Por reciprocidad, ambos son iguales, por lo que bastará con calcular uno de los dos. Calcularemos  $S_{32}$ . En este caso, la red que tenemos que resolver sería la mostrada en la figura 1.2:

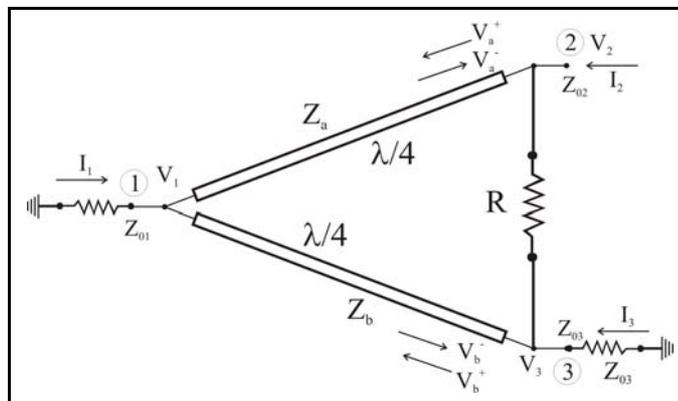


Figura 1.2.-Esquema de la red para calcular los parámetros  $S_{32}$

Podemos ver que se han terminado los puertos 1 y 3 con sus impedancias características, y se han definido sobre las líneas en  $\lambda/4$  unas ondas progresivas y regresivas con el origen en los puertos 2 y 3.

Sabemos que el parámetro  $S_{32}$  que buscamos los podemos expresar en función de las tensiones de la forma:

$$S_{32} = \frac{V_3}{V_2} \cdot \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{03}}} \cdot (1 + S_{22})$$

De esta forma, nos bastará con calcular las relaciones entre las tensiones  $V_3$  y  $V_2$  para tener el valor del parámetro que buscamos, ya que nos dicen en el enunciado que considere que  $S_{22}=0$ .

Por ello, podemos plantear, en general, las siguientes ecuaciones:

$V_2 = V_a^+ + V_a^-$	$I_2 = \frac{V_a^+ - V_a^-}{Z_a} + \frac{V_2 - V_3}{R}$	$V_1 = -Z_{01} \cdot I_1$
$V_3 = V_b^+ + V_b^-$	$I_3 = \frac{V_b^+ - V_b^-}{Z_b} + \frac{V_3 - V_2}{R}$	$V_3 = -Z_{03} \cdot I_3$
$V_1 = V_a^+ \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} + V_a^- \cdot e^{+j \cdot \beta \cdot z} \Big _{z=\frac{\lambda}{4}} =$ $= -j \cdot (V_a^+ - V_a^-) = -j \cdot (V_b^+ - V_b^-)$		$-I_1 = -j \cdot \frac{V_a^+ - V_a^-}{Z_a} - j \cdot \frac{V_b^+ - V_b^-}{Z_b}$

Y operando, de tal forma que eliminamos las ondas progresivas y regresivas, llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1 = j \cdot Y_a \cdot V_2 + j \cdot Y_b \cdot V_3 = -V_1 \cdot Y_{01} \\ I_2 = j \cdot Y_a \cdot V_1 + \frac{V_2 - V_3}{R} \\ I_3 = j \cdot Y_b \cdot V_1 + \frac{V_3 - V_2}{R} = -V_3 \cdot Y_{03} \end{cases}$$

Este sistema los podemos poner de forma matricial, de tal forma que queda como:

$$\begin{pmatrix} j \cdot Y_a & Y & -Y \\ Y_{01} & j \cdot Y_a & j \cdot Y_b \\ j \cdot Y_b & -Y & Y + Y_{03} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = I_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que un sistema que tiene el mismo aspecto formal que el sistema que se nos da como dato en el enunciado. Resuelto de forma matricial, tenemos:

$$\begin{cases} V_1 = -j \cdot \frac{Y \cdot (Y_a + Y_b) + Y_a \cdot Y_{03}}{\Delta_2} \cdot I_2 \\ V_2 = \frac{Y_{01} \cdot (Y + Y_{03}) + Y_b^2}{\Delta_2} \cdot I_2 \\ V_3 = \frac{Y \cdot Y_{01} - Y_a \cdot Y_b}{\Delta_2} \cdot I_2 \end{cases} \quad \text{donde } \Delta_2 = Y_{03} \cdot Y_a^2 + Y \cdot (Y_{01} \cdot Y_{03} + (Y_a + Y_b)^2)$$

Por lo tanto, el parámetro  $S_{32}$  será:

$$S_{32} = \frac{V_3}{V_2} \cdot \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{03}}} \cdot (1 + S_{22}) = \langle S_{22} = 0 \rangle = \frac{V_3}{V_2} \cdot \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{03}}} = \sqrt{\frac{Y_{03}}{Y_{02}}} \cdot \frac{Y \cdot Y_{01} - Y_a \cdot Y_b}{Y_b^2 + Y_{01} \cdot (Y + Y_{03})}$$

Como queremos anular este valor, se deberá cumplir la siguiente relación:

$$Y \cdot Y_{01} - Y_a \cdot Y_b = 0 \Rightarrow Y = \frac{Y_a \cdot Y_b}{Y_{01}}$$

b) En este segundo apartado debemos ver qué relación hay entre el cociente de potencias  $P_3$  y  $P_2$  con los parámetros  $S$ .

Sabemos que las potencias son:

$$\begin{cases} P_3 = \frac{1}{2} \cdot |b_3|^2 - \frac{1}{2} \cdot |a_3|^2 = \langle a_3 = 0 \rangle = \frac{1}{2} \cdot |S_{31}|^2 \cdot |a_1|^2 \\ P_2 = \frac{1}{2} \cdot |b_2|^2 - \frac{1}{2} \cdot |a_2|^2 = \langle a_2 = 0 \rangle = \frac{1}{2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot |a_1|^2 \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente relación de potencias:

$$\frac{P_3}{P_2} = \left| \frac{S_{31}}{S_{21}} \right|^2 = k^2$$

Por lo tanto debemos calcular los parámetros  $S_{31}$  y  $S_{21}$ . Puesto que tenemos una red recíproca, el parámetro  $S_{21}$  será igual al  $S_{12}$ , y este lo podemos calcular a partir de los datos del apartado anterior. Y así, tenemos:

$$\begin{aligned} S_{21} = S_{12} &= \frac{V_1}{V_2} \cdot \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \cdot (1 + S_{22}) = \langle S_{22} = 0 \rangle = \frac{V_3}{V_2} \cdot \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{03}}} = \\ &= -j \cdot \sqrt{\frac{Y_{01}}{Y_{02}}} \cdot \frac{Y \cdot (Y_a + Y_b) + Y_a \cdot Y_{03}}{Y_b^2 + Y_{01} \cdot (Y + Y_{03})} \end{aligned}$$

Por otra parte, dada la simetría del circuito el parámetro  $S_{13}$ , que es igual, por reciprocidad al parámetro  $S_{31}$  que es que nos interesa, será formalmente igual que el parámetro  $S_{12}$  calculado, pero permutando entre sí los siguientes subíndices:

donde ponga	debe poner
2	3
3	2
a	b
b	a

Para ver esta relación basta con fijarse en la figura 1.3 que es la red que hay que analizar para calcular los parámetros  $S_{13}$ . Nótese que es totalmente dual de la figura 1.2, y a partir de ellas se puede ver la relación de permutación de subíndices anterior.

Por lo tanto, tenemos:

$$S_{31} = S_{13} = -j \cdot \sqrt{\frac{Y_{01}}{Y_{03}}} \cdot \frac{Y \cdot (Y_b + Y_a) + Y_b \cdot Y_{02}}{Y_a^2 + Y_{01} \cdot (Y + Y_{02})}$$

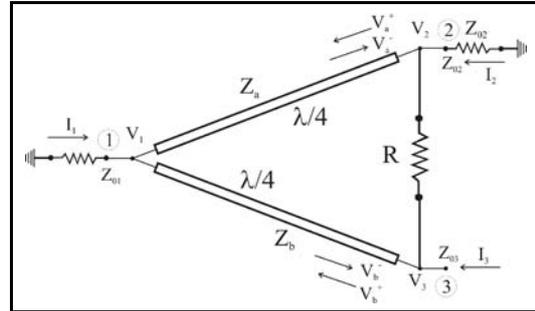


Figura 1.3.-Esquema de la red para calcular los parámetros  $S_{13}$

Si ahora utilizamos los dos parámetros  $S_{31}$  y  $S_{21}$  para calcular la relación entre las potencias tenemos:

$$\frac{P_3}{P_2} = \left| \frac{S_{31}}{S_{21}} \right|^2 = k^2$$

↓

$$\left| \frac{S_{31}}{S_{21}} \right| = k = \sqrt{\frac{Y_{02}}{Y_{03}} \cdot \frac{Y \cdot (Y_a + Y_b) + Y_b \cdot Y_{02}}{Y \cdot (Y_a + Y_b) + Y_b \cdot Y_{03}} \cdot \frac{Y_b^2 + Y_{01} \cdot (Y + Y_{03})}{Y_a^2 + Y_{01} \cdot (Y + Y_{02})}}$$

↓

$$= \left\langle Y = \frac{Y_a \cdot Y_b}{Y_{01}} \right\rangle = \frac{Y_b}{Y_a} \cdot \sqrt{\frac{Y_{02}}{Y_{03}}} = \frac{Y_b}{Y_a} \cdot \frac{1}{k}$$

Luego tenemos la siguiente relación:

$$k^2 = \frac{Y_b}{Y_a} = \frac{Y_{03}}{Y_{02}}$$

c) Para este tercer apartado la red que tenemos que resolver sería la mostrada en la figura 1.4:

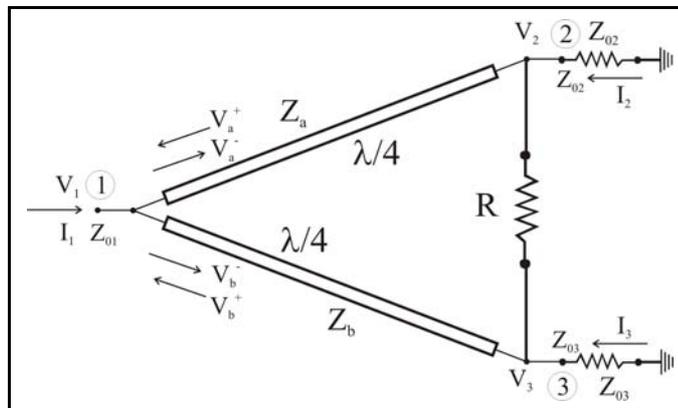


Figura 1.4.-Esquema de la red para calcular los parámetros  $S_{11}$

Podemos ver que se han terminado los puertos 2 y 3 con sus impedancias características, y se han definido sobre las líneas en  $\lambda/4$  unas ondas progresivas y regresivas con el origen, en las dos líneas, en el puerto 1.

Sabemos que el parámetro  $S_{11}$  que buscamos los podemos expresar en función de las tensiones de la forma:

$$S_{11} = \frac{\frac{V_1}{I_1} - Z_{01}}{\frac{V_1}{I_1} + Z_{01}}$$

Es decir, necesitamos la relación entre la tensión y la corriente en el puerto 1 (impedancia de entrada). Para resolverlo, plantearemos un juego de ecuaciones similar al del apartado 1:

$V_2 = -j \cdot (V_a^+ - V_a^-)$	$V_1 = V_a^+ + V_a^- = V_b^+ + V_b^-$	$V_2 = -Z_{02} \cdot I_2$
$V_3 = -j \cdot (V_b^+ - V_b^-)$	$I_1 = \frac{V_a^+ - V_a^-}{Z_a} + \frac{V_b^+ - V_b^-}{Z_b}$	$V_3 = -Z_{03} \cdot I_3$
$I_2 - j \cdot \frac{V_a^+ - V_a^-}{Z_a} = \frac{V_2 - V_3}{R}$		$I_3 - j \cdot \frac{V_b^+ - V_b^-}{Z_b} = \frac{V_3 - V_2}{R}$

Y operando, de tal forma que eliminamos las ondas progresivas y regresivas, llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1 = j \cdot Y_a \cdot V_2 + j \cdot Y_b \cdot V_3 \\ 0 = j \cdot Y_a \cdot V_1 + V_2 \cdot Y_{02} + \frac{V_2 - V_3}{R} \\ 0 = j \cdot Y_b \cdot V_1 + V_3 \cdot Y_{03} + \frac{V_3 - V_2}{R} \end{cases}$$

Este sistema lo podemos poner de forma matricial, de tal forma que queda como:

$$\begin{pmatrix} 0 & j \cdot Y_a & j \cdot Y_b \\ j \cdot Y_a & Y + Y_{02} & -Y \\ j \cdot Y_b & -Y & Y + Y_{03} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = I_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que un sistema que tiene el mismo aspecto formal que el sistema que se nos da como dato en el enunciado. Resuelto de forma matricial, tenemos:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{Y \cdot (Y_{02} + Y_{03}) + Y_{02} \cdot Y_{03}}{\Delta_1} \cdot I_1 \\ V_2 = -j \cdot \frac{Y \cdot (Y_b + Y_a) + Y_a \cdot Y_{03}}{\Delta_1} \cdot I_1 \\ V_3 = -j \cdot \frac{Y \cdot (Y_b + Y_a) + Y_b \cdot Y_{02}}{\Delta_1} \cdot I_1 \end{cases} \text{ donde } \Delta_1 = \begin{cases} (Y_{03} + Y) \cdot Y_a^2 + \\ + 2 \cdot Y \cdot Y_a \cdot Y_b + \\ (Y_{02} + Y) \cdot Y_b^2 \end{cases}$$

Como queremos anular el parámetro  $S_{11}$ , debemos hacer que:

$$S_{11} = \frac{\frac{V_1}{I_1} - Z_{01}}{\frac{V_1}{I_1} + Z_{01}} = 0 \Rightarrow \frac{V_1}{I_1} = Z_{01} = \frac{1}{Y_{01}}$$

Operando a partir de las relaciones y ecuaciones anteriores, llegamos a:

$$\begin{cases} Y_b^2 = Y_{01} \cdot \frac{Y_{03}^2}{Y_{02} + Y_{03}} = Y_{01} \cdot Y_{02} \cdot \frac{k^4}{1 + k^2} \\ Y_a^2 = Y_{01} \cdot \frac{Y_{02}^2}{Y_{02} + Y_{03}} = Y_{01} \cdot Y_{02} \cdot \frac{1}{1 + k^2} \end{cases}$$

d) Por último, para calcular los parámetros  $S_{21}$  y  $S_{31}$  bastará con ver el resultado del apartado anterior que nos da las tensiones  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  en función de la corriente  $I_1$ . Por lo tanto tendremos para  $S_{21}$  (este parámetro se puede obtener también a partir del resultado del apartado b):

$$\begin{aligned} S_{21} &= \frac{V_2}{V_1} \cdot \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \cdot (1 + S_{11}) = \langle S_{11} = 0 \rangle = \frac{V_2}{V_1} \cdot \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = \\ &= S_{12} = -j \cdot \sqrt{\frac{Y_{01}}{Y_{02}}} \cdot \frac{Y \cdot (Y_a + Y_b) + Y_a \cdot Y_{03}}{Y_b^2 + Y_{01} \cdot (Y + Y_{03})} = \frac{-j}{\sqrt{1 + k^2}} \end{aligned}$$

Y para el parámetro  $S_{31}$ :

$$\begin{aligned}
 S_{31} &= \frac{V_3}{V_1} \cdot \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{03}}} \cdot (1 + S_{11}) = \langle S_{11} = 0 \rangle = \frac{V_3}{V_1} \cdot \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{03}}} = \\
 &= S_{13} = -j \cdot \sqrt{\frac{Y_{03}}{Y_{01}}} \cdot \frac{Y \cdot (Y_a + Y_b) + Y_b \cdot Y_{02}}{Y_{02} \cdot Y_{03} + Y \cdot (Y_{02} + Y_{03})} = \frac{-j \cdot k}{\sqrt{1 + k^2}}
 \end{aligned}$$

10.2. PROBLEMA 2 (40 p)

Se pretende estudiar una cavidad cilíndrica de paredes conductoras (ver figura 1) y longitud  $d$ , construida a partir de la guía de sección transversal triangular isósceles (lado  $a$ ) mostrada en la figura 2.

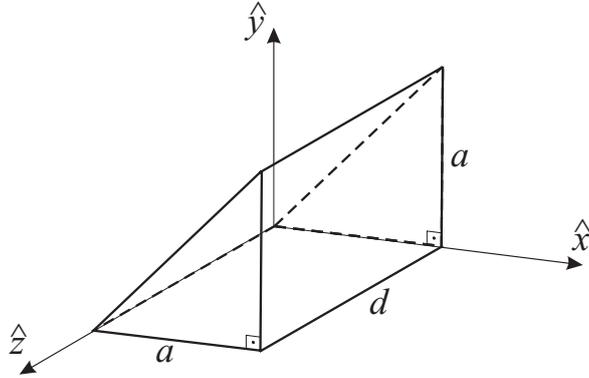


Figura 1: Cavidad cilíndrica

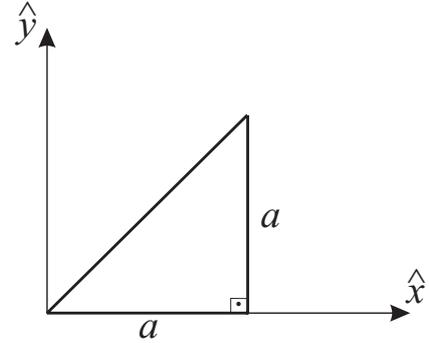


Figura 2: Guía triangular

Se sabe que las componentes axiales de los modos  $TM_{mn}^z$  y  $TE_{mn}^z$  de la citada guía triangular (figura 2) tienen las siguientes expresiones en función de las coordenadas transversales  $x$  e  $y$ :

$$E_z(x, y) = E_0 \left[ \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \quad H_z(x, y) = 0$$

$$H_z(x, y) = H_0 \left[ \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \quad E_z(x, y) = 0$$

con  $m$  y  $n$  números enteros positivos o de valor 0. Por su parte, la expresión del número de onda de corte de dichos modos es la siguiente:

$$k_{c_{mn}} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

A la vista de las expresiones anteriores, responder a las siguientes cuestiones:

(8 p) a.- Determinar los posibles valores que pueden tomar los subíndices  $m$  y  $n$  de los modos  $TM_{mn}^z$  y  $TE_{mn}^z$ . Para ello, considere las siguientes cuestiones:

¿Pueden existir modos  $TM_{mn}^z$  con  $m = n$ ? ¿Y modos  $TE_{mn}^z$  con  $m = n$ ?  
 ¿Por qué?

¿Pueden existir modos  $TM_{mn}^z$  con  $m = 0$  y/o  $n = 0$ ? ¿Y modos  $TE_{mn}^z$  con  $m = 0$  y/o  $n = 0$ ? ¿Por qué?

¿Se pueden considerar degenerados los modos  $TM_{mn}^z$  y  $TM_{nm}^z$ ? ¿Y los modos  $TE_{mn}^z$  y  $TE_{nm}^z$ ? ¿Por qué? ¿Existen modos degenerados en la guía triangular bajo estudio? Indica un ejemplo.

- (5 p) b.- A partir del resultado anterior, indicar el modo con frecuencia de corte más baja de los modos  $\text{TM}_{mn}^z$  y el de frecuencia de corte más baja de los modos  $\text{TE}_{mn}^z$ . ¿Cuál es el modo fundamental de la guía triangular y su frecuencia de corte?
- (9 p) c.- Comprobar que las expresiones de las componentes axiales  $E_z$  y  $H_z$  de los modos  $\text{TM}_{mn}^z$  y  $\text{TE}_{mn}^z$  satisfacen las condiciones de contorno apropiadas en la guía triangular.
- (8 p) d.- Deducir las expresiones de las componentes axiales  $E_z$  y  $H_z$  de los modos  $\text{TM}_{mnp}^z$  y  $\text{TE}_{mnp}^z$  de la cavidad triangular. Indicar los valores que puede tomar en cada caso el subíndice modal  $p$  y justificar la respuesta.
- (10 p) e.- Encontrar la relación que debe existir entre las dimensiones  $a$  y  $d$  de la cavidad triangular para que el modo con frecuencia de resonancia más baja sea el  $\text{TE}_{101}^z$ . Deducir las expresiones de todas las componentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  correspondientes a dicho modo (escribir dichas expresiones en función de las dimensiones geométricas de la cavidad).

Datos:

- Solución de las Ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{E}_t = -\frac{1}{k_c^2} [\gamma \nabla_t E_z + j \omega \mu \nabla_t \times H_z \hat{z}]$$

$$\vec{H}_t = -\frac{1}{k_c^2} [\gamma \nabla_t H_z - j \omega \varepsilon \nabla_t \times E_z \hat{z}]$$

a) Si  $m = n$ , la expresión de  $E_z$  de los modos  $\text{TM}_{mn}^z$  sería la siguiente:

$$E_z(x, y) = E_0 \left[ \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi y}{a} \right) - \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi y}{a} \right) \right] = 0$$

y por tanto se anularían también el resto de componentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ . Así pues:

No pueden existir modos $\text{TM}_{mn}^z$ con $m = n$
--

Si  $m = n$ , la expresión de  $H_z$  de los modos  $\text{TE}_{mn}^z$  sería la siguiente:

$$H_z(x, y) = H_0 \left[ \cos \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{a} \right) + \cos \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{a} \right) \right] =$$

$$= 2 H_0 \cos \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{a} \right)$$

y por tanto, partiendo de esta expresión y haciendo uso de la solución de las Ecuaciones de Maxwell (ver datos del enunciado) se podrían deducir el resto de componentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  asociadas a estos modos. Así pues:

Sí pueden existir modos  $TE_{mn}^z$  con  $m = n$

Si  $m$  y/o  $n$  son iguales a 0, a la vista de la expresión propuesta para la componente axial  $E_z$  (que consta únicamente de funciones tipo sen), dicha componente se anulará, y por tanto también se anularán el resto de componentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ . Así pues:

No pueden existir modos  $TM_{mn}^z$  con  $m = 0$  y/o  $n = 0$

Por su parte, como en la expresión de  $H_z$  para los modos  $TE_{mn}^z$  sólo aparecen funciones tipo cos, dicha componente tendrá una dependencia con las variables  $x$  e  $y$  si  $m = 0$  o  $n = 0$ , y por tanto existirán el resto de componentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  asociadas a estos modos. Si  $m = 0$  y  $n = 0$ ,  $H_z$  será constante (no dependerá de las variables  $x$  e  $y$ ) y por tanto el resto de componentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  no existirán. Así pues:

Sí pueden existir modos  $TE_{mn}^z$  con  $m = 0$  o  $n = 0$ , pero no cuando  $m = n = 0$

Empleando la expresión propuesta para  $E_z$ , se deduce la siguiente relación entre las componentes axiales de los modos  $TM_{mn}^z$  y  $TM_{nm}^z$ :

$$E_{zTM_{mn}^z}(x, y) = -E_{zTM_{nm}^z}(x, y)$$

de la que se concluye que ambos modos tendrán los mismos patrones de campo eléctrico y magnético. Para que dos modos se consideren degenerados, se ha de cumplir que tengan la misma frecuencia de corte (en este caso es fácil de comprobar que  $k_{cTM_{mn}^z} = k_{cTM_{nm}^z}$ ) y patrones de campo eléctrico y magnético diferentes (no es éste el caso). Por tanto, se puede afirmar que:

Los modos  $TM_{mn}^z$  y  $TM_{nm}^z$  no son degenerados

En el caso de los modos  $TE_{mn}^z$  y  $TE_{nm}^z$ , se concluye que:

$$H_{zTE_{mn}^z}(x, y) = H_{zTE_{nm}^z}(x, y)$$

por lo que siguiendo a un razonamiento similar al caso anterior, se puede afirmar finalmente que:

Los modos  $TE_{mn}^z$  y  $TE_{nm}^z$  no son degenerados

Atendiendo a la definición de modos degenerados, se puede afirmar que:

Los modos  $TM_{mn}^z$  y  $TE_{mn}^z$  sí son degenerados

En base a las respuestas proporcionadas a las cuestiones anteriores, se puede afirmar que los subíndices  $m$  y  $n$  de los modos  $\text{TM}_{mn}^z$  pueden tomar los siguientes valores:

$$\boxed{\text{Modos } \text{TM}_{mn}^z : m, n = 1, 2, 3, \dots \text{ con } m > n}$$

mientras que en el caso de los modos  $\text{TE}_{mn}^z$  se tiene que:

$$\boxed{\text{Modos } \text{TE}_{mn}^z : m, n = 0, 1, 2, \dots \text{ con } m \geq n \text{ pero } m = n \neq 0}$$

b) A partir de la expresión proporcionada en el enunciado del problema para el número de onda de corte de los modos  $\text{TM}_{mn}^z$  y  $\text{TE}_{mn}^z$ , así como de las respuestas del apartado anterior, se concluye que el modo con frecuencia de corte más baja de los modos  $\text{TM}_{mn}^z$  es el siguiente:

$$\boxed{\text{Modo } \text{TM}_{21}^z \text{ con } f_{c\text{TM}_{21}^z} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r'}} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}$$

mientras que en el caso de los modos  $\text{TE}_{mn}^z$ , el de frecuencia de corte más baja es el siguiente:

$$\boxed{\text{Modo } \text{TE}_{10}^z \text{ con } f_{c\text{TE}_{10}^z} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r'}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}$$

Por tanto, se concluye que:

$$\boxed{\text{El modo fundamental de la guía triangular es el modo } \text{TE}_{10}^z}$$

cuya frecuencia de corte tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{f_{c\text{TE}_{10}^z} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\epsilon_r'}}$$

c) La condición que deben satisfacer los modos  $\text{TM}_{mn}^z$  en el contorno metálico de la guía triangular ( $C$ ) es:

$$E_z|_C = 0$$

Los tres lados de la guía triangular se definen por las coordenadas  $x = a$  e  $0 \leq y \leq a$ ,  $y = 0$  e  $0 \leq x \leq a$ ,  $y = x$  con  $0 \leq x \leq a$ . Si se evalúa en dichas coordenadas la componente  $E_z$  de los modos  $\text{TM}_{mn}^z$ , se comprueba el cumplimiento de la citada condición de contorno de dichos modos:

$$\begin{aligned}
 E_z(x = a, y) &= E_0 \left[ \text{sen}(m\pi) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \text{sen}(n\pi) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] = 0 \\
 E_z(x, y = 0) &= E_0 \left[ \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}(0) - \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{sen}(0) \right] = 0 \\
 E_z(x, y = x) &= E_0 \left[ \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) - \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] = 0
 \end{aligned}$$

La condición que deben satisfacer los modos  $\text{TE}_{mn}^z$  en el contorno metálico de la guía triangular ( $C$ ) es:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_C = 0$$

donde  $n$  representa una coordenada transversal en la dirección del vector normal a cada uno de los lados del triángulo (ver dichos vectores representados en la figura 3).

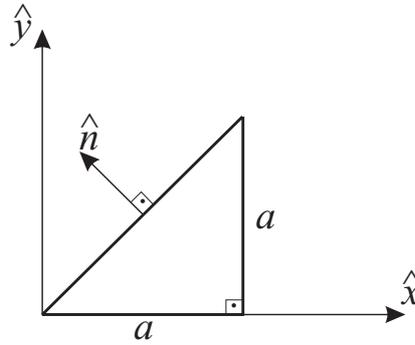


Figura 3: Vector normal a cada lado del triángulo

Tal y como se observa en la figura 3, en el lado de la guía triangular definido por las coordenadas  $x = a$  e  $0 \leq y \leq a$  la coordenada transversal  $n$  coincide con la coordenada  $x$ , y por tanto se comprueba del siguiente modo el cumplimiento de la citada condición de contorno:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = -H_0 \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right) \text{sen}(m\pi) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \left(\frac{n\pi}{a}\right) \text{sen}(n\pi) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] = 0$$

En el lado de la sección triangular de la guía definido por las coordenadas  $y = 0$  e  $0 \leq x \leq a$ , la coordenada transversal  $n$  coincide con la coordenada  $-y$  (ver figura 3), comprobándose del siguiente modo la condición de contorno de los modos  $\text{TE}_{mn}^z$ :

$$\left. -\frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} = H_0 \left[ \left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}(0) - \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{sen}(0) \right] = 0$$

La coordenada transversal  $n$  en el lado del triángulo  $y = x$  con  $0 \leq x \leq a$  se representa gráficamente en la figura 3. Para encontrar la derivada de la componente axial  $H_z$  con respecto a dicha coordenada, se puede hacer uso del vector

gradiente de dicha componente axial:

$$\nabla_t H_z = \frac{\partial H_z}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \hat{y} = \frac{\partial H_z}{\partial t} \hat{t} + \frac{\partial H_z}{\partial n} \hat{n}$$

y realizar posteriormente el siguiente producto escalar:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_C = \nabla_t H_z|_C \cdot \hat{n}$$

donde  $\hat{n}$  se expresa en este caso (ver figura 3) en función de los vectores unitarios  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  como sigue:

$$\hat{n} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{x} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{y} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{y})$$

Realizando todas estas operaciones, finalmente se comprueba como sigue la condición de contorno de los de los modos  $TE_{mn}^z$  en este tercer lado de la guía triangular bajo consideración:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_{y=x} &= \left( \hat{x} \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{y=x} + \hat{y} \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=x} \right) \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{y}) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} H_0 \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \left( \frac{n\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} H_0 \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \left( \frac{m\pi}{a} \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

d) Para deducir la expresión de la componente axial  $E_z$  de los modos  $TM_{mnp}^z$  de la cavidad triangular bajo estudio, se debe combinar adecuadamente un modo de la guía triangular propagándose en la dirección  $+\hat{z}$  con otro que se propaga en la dirección  $-\hat{z}$ :

$$E_z = \left[ \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{j\beta z}]$$

Haciendo uso de la solución de las Ecuaciones de Maxwell proporcionadas en los datos del enunciado, el resto de componentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  de los modos  $TM_{mnp}^z$  se obtendrán del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z \propto [E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{j\beta z}] \\ \vec{H}_t &= j \frac{\omega \epsilon}{k_c^2} \nabla_t \times E_z \hat{z} \propto [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{j\beta z}] \end{aligned}$$

La relación entre las constantes  $E_0^+$  y  $E_0^-$  presentes en las expresiones anteriores, así como el valor de  $\beta$ , se deduce de forzar la condición de conductor perfecto en las paredes de la cavidad  $z = 0, d$ :

$$\vec{E}_t \Big|_{z=0, d} = 0$$

Forzando dichas condiciones de contorno se obtiene que:

$$\begin{aligned}\vec{E}_t(z=0) = 0 &\Rightarrow E_0^+ - E_0^- = 0 \Rightarrow E_0^- = E_0^+ \\ \vec{E}_t(z=d) = 0 &\Rightarrow \text{sen}(\beta d) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{p\pi}{d}\end{aligned}$$

donde  $p$  será un número entero positivo, del que resta por determinar si empieza en 0 o en 1. Para ello, sustituyendo la relación entre  $E_0^-$  y  $E_0^+$  en las expresiones anteriores de los campos eléctrico y magnético de los modos  $\text{TM}_{mnp}^z$  de la cavidad, se obtiene que:

$$\begin{aligned}E_z &\propto \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \\ \vec{E}_t &\propto \text{sen}\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \\ \vec{H}_t &\propto \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\end{aligned}$$

Si en las expresiones anteriores se toma  $p = 0$ , se observa que se tiene una solución modal con componentes de campo eléctrico ( $E_z$ ) y magnético ( $\vec{H}_t$ ) no nulas, concluyendo que los modos  $\text{TM}_{mn0}^z$  son una solución válida.

Por lo tanto, las componentes axiales  $E_z$  y  $H_z$  de los modos  $\text{TM}_{mnp}^z$  de la cavidad triangular tendrán el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned}E_z(x, y, z) &= 2 E_0^+ \left[ \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \\ \text{y } H_z(x, y, z) &= 0 \quad \text{con } p = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

En el caso de los modos  $\text{TE}_{mnp}^z$  de la cavidad triangular se procederá de forma similar, pero deduciendo en este caso la expresión de la componente axial  $H_z$ . Combinando un modo  $\text{TE}_{mn}^z$  de la guía triangular propagándose en la dirección  $+\hat{z}$  con otro que se propaga en la dirección  $-\hat{z}$ , se tiene que:

$$H_z = \left[ \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] [H_0^+ e^{-j\beta z} + H_0^- e^{j\beta z}]$$

Haciendo uso nuevamente de la solución de las Ecuaciones de Maxwell proporcionadas en los datos del enunciado, el resto de componentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  de los modos  $\text{TE}_{mnp}^z$  se obtendrán del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\vec{H}_t &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z \propto [H_0^+ e^{-j\beta z} - H_0^- e^{j\beta z}] \\ \vec{E}_t &= -j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \nabla_t \times H_z \hat{z} \propto [H_0^+ e^{-j\beta z} + H_0^- e^{j\beta z}]\end{aligned}$$

La relación entre las constantes  $H_0^+$  y  $H_0^-$  presentes en las expresiones anteriores, así como el valor de  $\beta$ , se deduce nuevamente al forzar la condición de conductor perfecto en las paredes de la cavidad  $z = 0, d$ :

$$\vec{E}_t \Big|_{z=0, d} = 0$$

Forzando dichas condiciones de contorno se obtiene pues que:

$$\vec{E}_t(z = 0) = 0 \Rightarrow H_0^+ + H_0^- = 0 \Rightarrow H_0^- = -H_0^+$$

$$\vec{E}_t(z = d) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\beta d) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{p\pi}{d}$$

donde  $p$  será otra vez un número entero positivo, del que resta por determinar si empieza en 0 o en 1. Para ello, sustituyendo la relación entre  $H_0^-$  y  $H_0^+$  en las expresiones anteriores de los campos eléctrico y magnético de los modos  $\text{TE}_{mnp}^z$  de la cavidad, se obtiene que:

$$H_z \propto \text{sen}\left(\frac{p\pi z}{d}\right)$$

$$\vec{H}_t \propto \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)$$

$$\vec{E}_t \propto \text{sen}\left(\frac{p\pi z}{d}\right)$$

Si en las expresiones anteriores se toma  $p = 0$ , se observa que se tiene una solución modal con sólo componentes transversales de campo magnético ( $\vec{H}_t$ ) no nulas, concluyendo que los modos  $\text{TE}_{mn0}^z$  no son una solución válida.

Por lo tanto, las componentes axiales  $H_z$  y  $E_z$  de los modos  $\text{TE}_{mnp}^z$  de la cavidad triangular tendrán el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) &= -j2H_0^+ \left[ \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \text{sen}\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \\ &\text{y } E_z(x, y, z) = 0 \quad \text{con } p = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

e) De acuerdo con las respuestas a los apartados b) y d), la frecuencia de resonancia del modo  $\text{TE}_{101}^z$  será la más baja de todos los posibles modos  $\text{TE}_{mnp}^z$ , y vendrá determinada por la siguiente expresión:

$$f_{\text{TE}_{101}^z} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$

De la familia de modos  $\text{TM}_{mnp}^z$ , según las respuestas a los apartados b) y d), el de frecuencia de resonancia menor será el modo  $\text{TM}_{120}^z$ , la cual queda expresada

del siguiente modo:

$$f_{\text{TM}_{120}^z} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r'}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}$$

Si se pretende que el modo con frecuencia de resonancia menor sea el  $\text{TE}_{101}^z$ , se debe forzar el cumplimiento de la siguiente desigualdad:

$$f_{\text{TE}_{101}^z} < f_{\text{TM}_{120}^z} \Rightarrow \frac{\pi}{d} < \frac{2\pi}{a}$$

de donde se concluye que la relación entre las dimensiones  $a$  y  $d$  de la cavidad triangular para que el modo  $\text{TE}_{101}^z$  tenga la frecuencia de resonancia más baja debe ser la siguiente:

$$\boxed{d > \frac{a}{2} \quad \text{ó} \quad a < 2d}$$

Sustituyendo en la expresión deducida en el apartado anterior para  $H_z$  los subíndices modales  $m = 1$ ,  $n = 0$  y  $p = 1$ , se deducen las siguientes expresiones para todas las componentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  correspondientes a dicho primer modo (las cuales se han dejado escritas en función de las dimensiones geométricas de la cavidad):

$$\begin{aligned} H_z &= -j2H_0^+ \left[ \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right] \text{sen}\left(\frac{\pi z}{d}\right) \quad \text{y} \quad E_z = 0 \\ H_x &= j2H_0^+ \frac{a}{d} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right) \\ H_y &= j2H_0^+ \frac{a}{d} \text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right) \\ E_x &= 2H_0^+ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_r'}} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} \text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi z}{d}\right) \\ E_y &= -2H_0^+ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_r'}} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi z}{d}\right) \end{aligned}$$

### 10.3. PROBLEMA 3 (40 p)

Se desea diseñar un amplificador a  $f_1 = 10 \text{ GHz}$  haciendo uso de un transistor que en pequeña señal presenta los siguientes parámetros S:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,662 \angle -46^\circ & 0,196 \angle -25,6^\circ \\ 1,25 \angle -26,8^\circ & 0,483 \angle -42^\circ \end{bmatrix}$$

Con estos valores los círculos de estabilidad de entrada y salida son los mostrados en la figura 1(en la carta de Smith adjunta podrán observarse con mayor precisión).

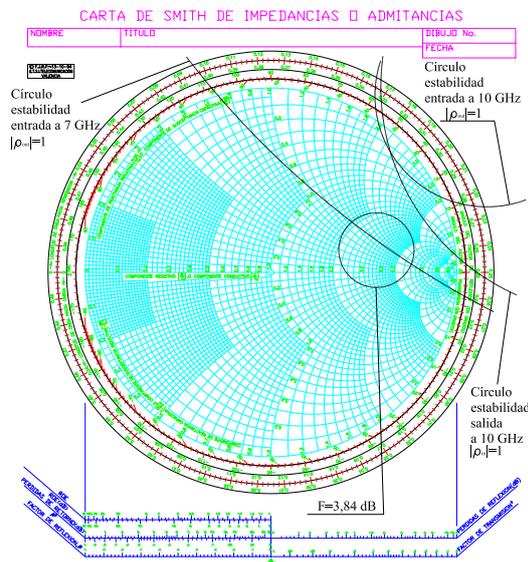


Figura 1: Círculos de estabilidad y ruido

Observando el comportamiento de este transistor a otras frecuencias se descubre que la situación más desfavorable desde el punto de vista de estabilidad se produce a la frecuencia de  $f_2 = 7 \text{ GHz}$  donde presenta los siguientes parámetros de dispersión:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,662 \angle 2^\circ & 0,19 \angle -10,6^\circ \\ 1,25 \angle 9,2^\circ & 0,87 \angle 87^\circ \end{bmatrix}$$

para los que tendríamos un círculo de estabilidad de entrada como el recogido también en la figura 1.

(5 p) a.- Indicar sobre la carta de Smith adjunta las zonas de inestabilidad de  $\rho_s$  para las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ .

(10 p) b.- Si se desea obtener una ganancia de transferencia unilateral de  $G_{TU} = 4,54 \text{ dB}$  a  $f_1$  y se escoge una  $\rho_L$  que maximice  $G_2$ , encontrar el valor de  $G_1$  necesario y dibujar sobre la carta de Smith adjunta el círculo de ganancia constante  $G_1$  correspondiente.

(12 p) c.- Si el factor de ruido deseado es de  $F = 3,84 \text{ dB}$  a  $f_1$  (el círculo correspondiente también se aporta en la figura 1) encontrar los valores  $\rho_S$  y  $\rho_L$  necesarios, cuidando que se respeten las condiciones de estabilidad y asumiendo que a  $f_2$  lo único que cambian son los parámetros de dispersión del transistor pero no así los factores de reflexión  $\rho_S$  y  $\rho_L$ .

Con este mismo transistor se desea ahora diseñar un oscilador a  $f_2 = 7 \text{ GHz}$  y se ha escogido unas redes de entrada y salida como las mostradas en la figura 2.

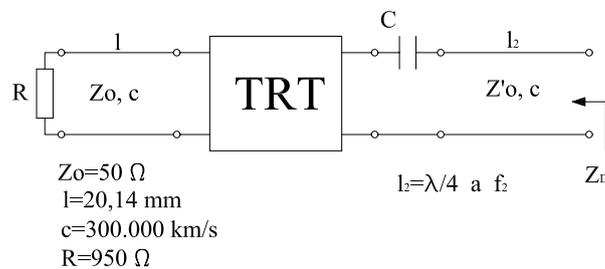


Figura 2: Oscilador

Sabiendo que con dichas redes se pretende conseguir una impedancia de salida en pequeña señal igual a  $Z_D = -3Z_o$ , con  $Z_o = 50 \Omega$ ,

(13 p) d.- calcular los valores del condensador  $C$  y de la impedancia  $Z'_o$  para que esto ocurra.

**Datos:**

Ganancia de transferencia:

$$G_T = \frac{|S_{21}|^2(1 - |\rho_S|^2)(1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - S_{11}\rho_S)(1 - S_{22}\rho_L) - S_{12}S_{21}\rho_S\rho_L|^2}$$

Círculos de ganancia constante:

$$C_1 = \frac{G_1 S_{11}^*}{1 + G_1 |S_{11}|^2} \qquad C_2 = \frac{G_2 S_{22}^*}{1 + G_2 |S_{22}|^2}$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 - G_1(1 - |S_{11}|^2)}}{1 + G_1 |S_{11}|^2} \qquad r_2 = \frac{\sqrt{1 - G_2(1 - |S_{22}|^2)}}{1 + G_2 |S_{22}|^2}$$

a) Tanto para  $f_1$  como para  $f_2$  el parámetro  $S_{22}$  tiene módulo menor que la unidad por lo que el centro de la carta de Smith,  $\rho_S = 0$ , será estable, y con él todos los puntos que quedan en la misma zona que contiene el origen. De esta forma para el caso de la frecuencia  $f_1$  tendríamos que la zona inestable sería la mostrada en la figura 3 mientras que para la frecuencia  $f_2$  sería la sombreada en la figura 4.

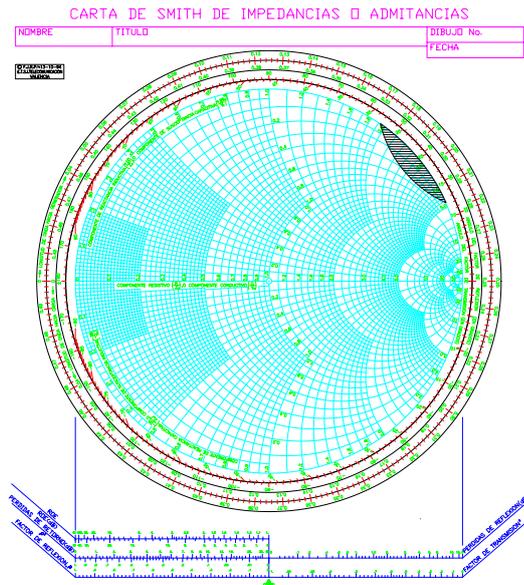


Figura 3: Inestabilidad a  $f_1$

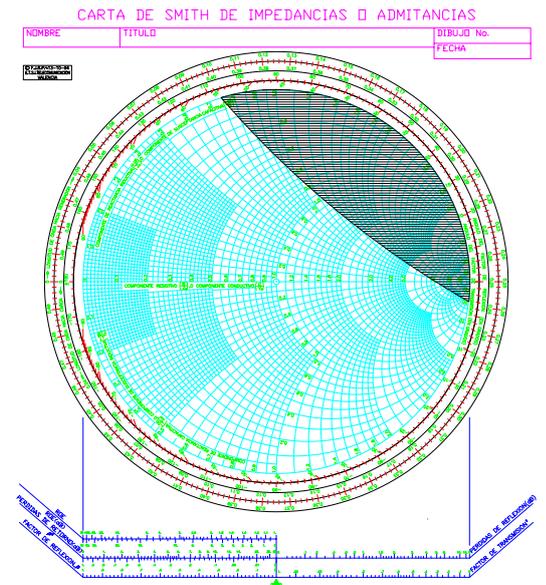


Figura 4: Inestabilidad a  $f_2$

b) La ganancia de transferencia unilateral sabemos que viene dada por:

$$G_{TU} = G_1 |S_{21}|^2 G_2$$

y por otra parte el valor de  $G_2$  máxima se producirá cuando  $\rho_L = S_{22}^*$ , que supondrá un valor de  $G_{2max}$  igual a :

$$G_{2max} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2} = 1,3043 = 1,1537 \text{ dB}$$

De forma que  $G_1$  deberá valer en dB:

$$G_1(\text{dB}) = G_{TU}(\text{dB}) - 20 \log |S_{21}| - G_2(\text{dB}) = 4,54 - 1,9382 - 1,1537 = 1,448 \text{ dB}$$

En lineal será  $G_1 = 1,396$  por lo que el centro y el radio del círculo de ganancia constante  $G_1$  será:

$$C_1 = \frac{G_1 S_{11}^*}{1 + G_1 |S_{11}|^2} = 0,5744 \angle 46^\circ$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 - G_1(1 - |S_{11}|^2)}}{1 + G_1 |S_{11}|^2} = 0,2864$$

cuyo representación en la carta de Smith será la mostrada en la figura 5

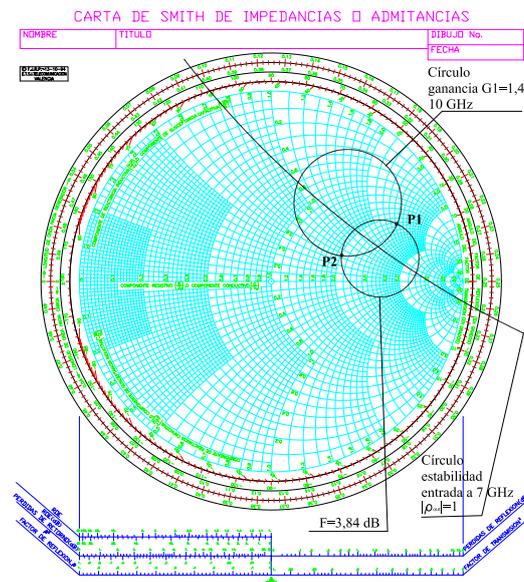


Figura 5: Círculo ganancia constante  $G_1$

c) El factor de reflexión  $\rho_S$  seguirá estando en el círculo de ganancia constante  $G_1$  que se intersecta con el círculo de ruido constante en dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , figura 5.

De estos dos puntos  $P_1$  queda dentro de la zona inestable a la frecuencia  $f_2$  por lo que solo será válido el punto  $P_2$  cuyo valor será:

$$\rho_s = 0,39 \angle 20^\circ$$

En cuanto al valor de  $\rho_L$  lo escogeremos de forma maximice la ganancia que como vimos en el apartado anterior deberá valer  $\rho_L = S_{22}^* = 0,483 \angle 42^\circ$ .

d) En primer lugar calculemos el valor del factor de reflexión de fuente  $\rho_s$  puesto que conocemos la red de entrada:

$$\rho_s = \frac{950 - 50}{950 + 50} e^{-j2\beta l} = 0,9 e^{-j4\pi l/\lambda}$$

A la frecuencia de 7 GHz la longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^9} = 0,04285 \text{ m} = 42,857 \text{ mm}$$

por lo que

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{20,143}{42,857} = 0,47$$

quedando

$$\rho_s = 0,9 \angle_{21,6}$$

Con este factor de reflexión tendremos un factor de reflexión a la salida igual a:

$$\rho_{out} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\rho_s}{1 - S_{11}\rho_s} = 1,222 \angle_{74,62^\circ}$$

que como cabía esperar presenta un factor de reflexión mayor que la unidad por lo tanto la impedancia tendrá una parte real negativa. En concreto la impedancia de salida será:

$$Z_{out} = Z_o \frac{1 + \rho_s}{1 - \rho_s} = -13,3725 + j63,8617 \Omega$$

Con la red de adaptación de la salida tendremos que convertir esta  $Z_{out}$  en un valor de  $-3Z_o$ , por lo que en primer lugar el condensador será el encargado de cancelar la parte reactiva de  $Z_{out}$ :

$$\frac{1}{\omega C} = 63,8617 \Omega$$

quedando que el valor del condensador será:

$$C = \frac{1}{\omega 63,8617} = 0,356 \text{ pF}$$

Mientras que el valor de la impedancia de la línea de  $\lambda/4$  será:

$$Z'_o = \sqrt{13,336 \cdot 3 \cdot Z_o} = 44,787 \Omega$$

# MICROONDAS

Examen junio 03

M. Baquero, F. Peñaranda y V. Boria

9 JUNIO 03

9.1 PROBLEMA 1 (30 p)

Se desea construir un circuito resonante con un coaxial y una guía circular. El esquema sería el que se muestra en la figura 1.1.

El tramo de coaxial es de longitud  $l_c$ , siendo los radios interior y exterior de los conductores  $a$  y  $b$ , respectivamente. El dieléctrico interior del tramo coaxial es teflón, de constante dieléctrica  $\epsilon_{rc}=2.05$ . El tramo de guía circular es de longitud  $l_g$ , siendo su radio  $R=b$ , y de dieléctrico aire.

La frecuencia de trabajo y, por tanto, también la de resonancia, es  $f=2.45 \text{ GHz}$ .

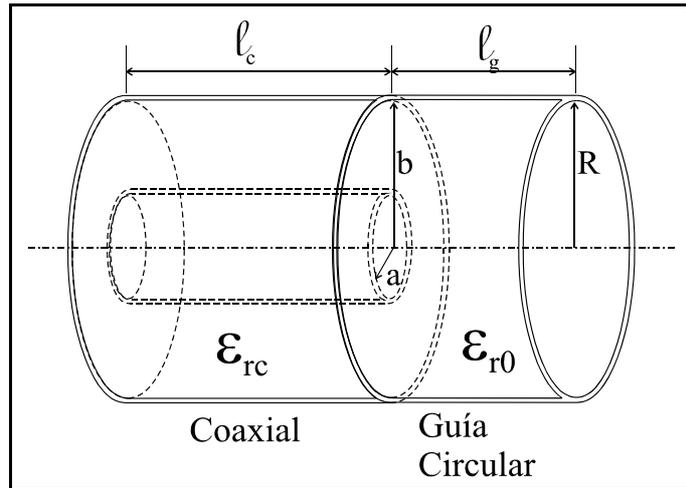


Figura 1.1.-Esquema del resonador

Se pide:

(15p) a) Si consideramos que por el tramo coaxial se propaga únicamente el modo TEM, determine qué modo de frecuencia más baja se creará fundamentalmente en la guía circular y cuál es el radio  $R$  (igual al exterior  $b$  del coaxial) de dicha guía para que haya adaptación.

Nota: para resolver este apartado considere, en primer lugar, qué componentes de campo hay en el coaxial -note la invarianza en  $\phi$  del modo TEM-, luego plante los modos TM y TE de la guía circular y determine que modo es el más apropiado para cumplir las condiciones de contorno en la superficie de separación de las dos guías y, por último, considerando el modo de frecuencia de corte más baja, plantee una continuidad de impedancias de modo.

(5p) b) Si queremos que la impedancia característica del coaxial de  $Z_0=50 \Omega$ , determine el valor del radio interior  $a$  del coaxial.

El resonador se construye colocando sendas paredes eléctricas en el principio del coaxial y al final de la guía circular. La longitud del tramo de guía es:  $l_g=10 \text{ cm}$ .

Bajo estas condiciones, calcule:

(10p) c) la longitud del tramo de línea coaxial  $l_c$  para que el circuito resuene a la frecuencia indicada  $f=2.45 \text{ GHz}$

Datos:

1) Los campos de la guía coaxial son:

$$\Phi = V_0 \cdot \frac{\text{Ln}\left(\frac{r}{a}\right)}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{V_0}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{1}{r} \cdot \hat{r} \\ \vec{H} = \frac{\hat{z} \times \vec{E}}{\eta} = -\frac{V_0}{\eta \cdot \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{1}{r} \cdot \hat{\phi}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{rc}}} \end{cases}$$

y las ondas de tensión y corriente progresivas:

$$\begin{cases} V = \int_{r=a}^{r=b} E_r \cdot dr = V_0 \\ I = \int_{\phi=0}^{\phi=2\cdot\pi} H_{\phi}(r=a) \cdot a \cdot d\phi = -V_0 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\eta \cdot \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \end{cases}$$

2) Los ceros de la función de Bessel de primera especie ( $J_v(x)|_{x=p_{vl}} = 0$ ) y de su derivada

( $J'_v(x)|_{x=p'_{vl}} = 0$ ) son:

v	$p_{v1}$	$p_{v2}$	$p_{v3}$	$p_{v4}$	$p_{v5}$
0	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309
1	3.8320	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
2	5.1394	8.4176	11.6199	14.7960	17.9598
3	6.3802	9.7630	13.0157	16.2236	19.4095
4	7.5883	11.0704	14.3743	17.6166	20.8272

v	$p'_{v1}$	$p'_{v2}$	$p'_{v3}$	$p'_{v4}$	$p'_{v5}$
0	3.8320	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
1	1.8412	5.3314	8.5363	11.7060	14.8636
2	3.0542	6.7062	9.9695	13.1704	16.3475
3	4.2012	8.0159	11.3460	14.5859	17.7887
4	5.3176	9.2845	12.6821	15.9641	19.1960

3) Los campos de la guía circular son:

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \frac{1}{K_c^2} \cdot (-j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \nabla_t \times H_z - \gamma \cdot \vec{\nabla}_t E_z) \\ \vec{H}_t = \frac{1}{K_c^2} \cdot (j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \nabla_t \times E_z - \gamma \cdot \vec{\nabla}_t H_z) \end{cases}$$

donde  $K_c^2 = k^2 + \gamma^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon + \gamma^2$

4) En coordenadas cilíndricas los operadores son:

$$\begin{cases} \nabla_t \times A_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \cdot \hat{r} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \cdot \hat{\varphi} \\ \vec{\nabla} A_z = \frac{\partial A_z}{\partial r} \cdot \hat{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \cdot \hat{\varphi} \end{cases}$$

a) Inicialmente plantearemos las soluciones de campo TM y TE, siguiendo la sugerencia del enunciado.

Para los modos TM, tenemos:

$$E_z = A \cdot J_v(k_c \cdot r) \cdot \begin{cases} \text{sen}(v \cdot \varphi) \\ \text{cos}(v \cdot \varphi) \end{cases}$$

donde se cumple, por las condiciones de contorno de pared eléctrica en las paredes de la guía, que

$$k_c = \frac{P_{vl}}{R}$$

Como sabemos que los campos deben ser invariantes en la variable  $\varphi$ , se debe cumplir que  $v=0$ , quedando:

$$E_z = A \cdot J_0(k_c \cdot r)$$

El resto de componentes son:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \frac{-\gamma}{k_c} \cdot A \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot \hat{r} = E_r \cdot \hat{r} \\ \vec{H}_t &= \frac{E_r}{Z_{TM}} \cdot \hat{\varphi} \quad ; \quad Z_{TM} = \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \end{aligned}$$

Y para los modos TE tenemos:

$$H_z = A \cdot J_v(k_c \cdot r) \cdot \begin{cases} \text{sen}(v \cdot \varphi) \\ \text{cos}(v \cdot \varphi) \end{cases}$$

donde se cumple, por las condiciones de contorno de pared eléctrica en las paredes de la guía, que

$$k_c = \frac{P_{vl}}{R}$$

Como antes, sabemos que los campos deben ser invariantes en la variable  $\varphi$ , se debe cumplir que  $v=0$ , quedando:

$$H_z = A \cdot J_0(k_c \cdot r)$$

Y el resto de componentes son:

$$\vec{H}_t = \frac{-\gamma}{k_c} \cdot A \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot \hat{r} = H_r \cdot \hat{r}$$

$$\vec{E}_t = -Z_{TE} \cdot H_r \cdot \hat{\phi} \quad ; \quad Z_{TE} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\gamma}$$

A la vista de los campos de los modos TM y TE, comprobamos que los modos TM tienen únicamente componente de campo eléctrico en la dirección  $r$  y de campo magnético únicamente en la dirección  $\phi$ , al igual que el modo TEM del cable coaxial. Sin embargo con los modos TE sucede justo lo contrario. Por lo tanto los modos que se van a excitar en la guía circular son los TM. En concreto serán los  $TM_{0l}$ , ya que no hay variación en  $\varphi$ . Y el modo de frecuencia de corte más baja de este conjunto será el  $TM_{01}$ , ya que  $p_{01}=2.4048$ .

Para calcular el radio de la guía bastará, pues, con igualar las impedancias de modo. Para el modo TEM la impedancia de modo es:

$$Z_{TEM} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{rc}}}$$

Y para el modo TM es:

$$Z_{TM} = \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \epsilon} = \frac{\sqrt{k_c^2 - k^2}}{j \cdot \omega \cdot \epsilon} = \frac{\sqrt{\left(\frac{P_{01}}{R}\right)^2 - \omega^2 \cdot \mu_0 \cdot \epsilon_0}}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0}$$

Igualando las dos impedancias tenemos:

$$R = \frac{P_{01}}{\omega \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{rc}}\right)}} = 6.55 \text{ cm}$$

b) Si deseamos tener un coaxial de impedancia característica  $Z_0=50 \Omega$ , bastará con ver la expresión de las ondas de tensión del coaxial y obtener de ellas la impedancia característica de la línea:

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{\eta \cdot \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)}{2 \cdot \pi} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{rc}}} \cdot \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Sustituyendo los valores conocidos, y puesto que  $R=b$ , tenemos:

$$a = b \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot \frac{Z_0}{\eta}} = 1.98 \text{ cm}$$

c) Por último, si consideramos que tenemos un resonador, podemos ver el problema como el siguiente circuito equivalente:

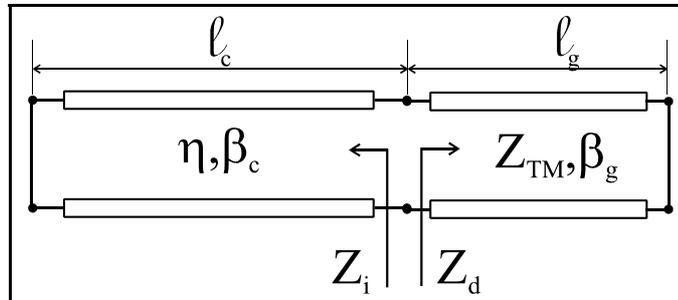


Figura 1.2-Circuito equivalente del resonador

Sabemos que para que esto resuene se debe cumplir que:

$$Z_i + Z_d = 0$$

donde cada una de las impedancias es:

$$\begin{cases} Z_i = j \cdot \eta \cdot \operatorname{tg}(\beta_c \cdot l_c) \\ Z_d = j \cdot Z_{TM} \cdot \operatorname{tg}(\beta_g \cdot l_g) \end{cases}$$

Puesto que las impedancias son iguales -así se ha calculado el apartado **a**, siendo su valor  $\eta = Z_{TM} = 263.3 \ \Omega$ -, se deberá cumplir que las fases sean iguales:

$$\beta_c \cdot l_c = \beta_g \cdot l_g$$

donde las constantes de propagación, en cada modo son:

$$\begin{cases} \beta_c = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{rc}} = 73.47 \ m^{-1} \\ \beta_g = \sqrt{k^2 - k_c^2} = 35.83 \ m^{-1} \end{cases}$$

por lo que la longitud del coaxial deberá ser:

$$l_c = l_g \cdot \frac{\beta_g}{\beta_c} = 4.88 \ cm$$

## 9.2. PROBLEMA 2 (35 p)

Se pretende caracterizar, mediante la matriz de parámetros  $S$ , las dos estructuras en tecnología impresa basadas en líneas acopladas simétricas que se muestran en la figura 1. En dicha figura se ha representado únicamente las tiras conductoras de ambas estructuras.

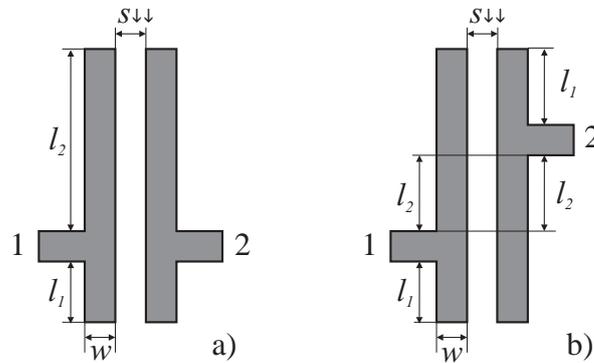


Figura 1: Estructuras de 2 accesos basadas en líneas acopladas simétricas

Asumiendo que los accesos 1 y 2 de ambas estructuras presentan una impedancia característica unidad ( $Z_0 = 1$ ), se pide responder a las siguientes cuestiones:

(12 p) a.- Encontrar los parámetros  $S$  de la estructura mostrada en la figura 1a. Expresar los resultados en función de las impedancias características par ( $Z_0^e$ ) e impar ( $Z_0^o$ ) y de las permitividades relativas efectivas  $\varepsilon_{ref}^e$  y  $\varepsilon_{ref}^o$ , parámetros típicos de las líneas acopladas simétricas, y de las longitudes físicas  $l_1$  y  $l_2$ .

(4 p) b1.- Para obtener los parámetros  $S$  de la estructura mostrada en la figura 1b, ¿se puede **aplicar directamente** las **propiedades de simetría sobre dicha estructura**? ¿Por qué?

(8 p) b2.- A partir de la respuesta proporcionada en el apartado anterior, **explique un procedimiento** para obtener la matriz de parámetros  $S$  de la red de 2 accesos de la figura 1b empleando propiedades de simetría.

**Ayuda:** Puede hacer uso, si lo estima oportuno, de una estructura auxiliar con un mayor número de accesos que la mostrada en la figura 1b.

**No debe realizar ningún cálculo ni obtener ninguna expresión. Sólo explicar el procedimiento de forma detallada.**

(11 p) b3.- Suponiendo conocidos los parámetros  $S$  de la estructura auxiliar considerada en el apartado anterior, que puede denominar como  $S_{ij}^{(a)}$ , deduzca unas expresiones en función de dichos parámetros para los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  de la red de 2 accesos de la figura 1b.

a) La estructura mostrada en la figura 1a es una red de 2 accesos formada por un par de líneas simétricas acopladas, cuyos dos accesos se sitúan a su vez de forma simétrica respecto del plano de simetría (PS) mostrado en la figura 2.

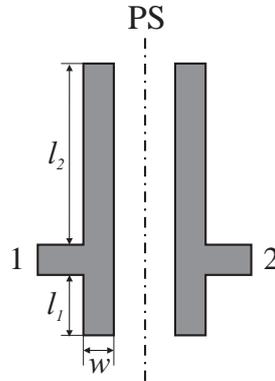


Figura 2: Plano de Simetría (PS) del primer par de líneas simétricas acopladas

Así pues, los parámetros  $S$  buscados se pueden resolver aplicando la propiedad de simetría de una red con un número par de accesos, según la cual se tiene que:

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho^e + \rho^o & \rho^e - \rho^o \\ \rho^e - \rho^o & \rho^e + \rho^o \end{pmatrix}$$

donde  $\rho^e$  y  $\rho^o$  son, respectivamente, los factores de reflexión de la estructura mostrada en la figura 2 sustituyendo el PS por una pared magnética (PM), y luego por una pared eléctrica (PE). Tal y como se explicó en teoría al analizar líneas simétricas acopladas, las estructuras de 1 acceso a considerar para resolver ambas situaciones son las que se muestran en las figuras 3a y 3b.

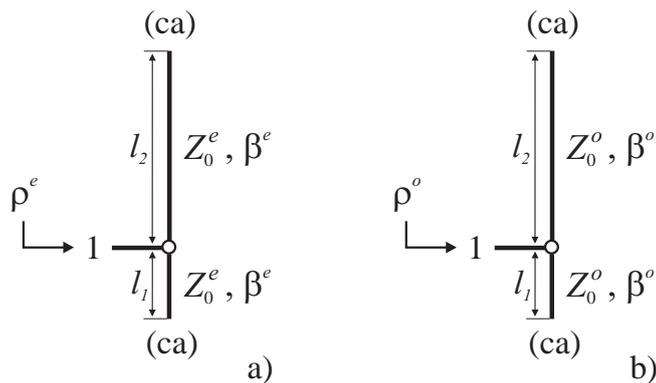


Figura 3: Red de 1 acceso al sustituir PS por PM en a), y PS por PE en b)

Obsérvese que en las dos estructuras consideradas en la figura 3, las dos líneas de transmisión se terminan en circuito abierto (ca), pues ésta es la terminación real del par de líneas simétricas acopladas (ver figura 2). La existencia de PM o

de PE en el PS de la red de dos accesos sólo determina en este caso que las impedancias características y constantes de propagación de las líneas de transmisión a considerar sean, respectivamente,  $Z_0^e$ ,  $\beta^e$  y  $Z_0^o$ ,  $\beta^o$  (ver figuras 3a y 3b).

Las constantes de propagación bajo excitación par ( $\beta^e$ ) e impar ( $\beta^o$ ) se expresan, respectivamente, en función de las permitividades relativas efectivas  $\varepsilon_{ref}^e$  y  $\varepsilon_{ref}^o$  del siguiente modo:

$$\beta^e = \frac{\omega}{v_p^e} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\varepsilon_{ref}^e} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_{ref}^e}$$

$$\beta^o = \frac{\omega}{v_p^o} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\varepsilon_{ref}^o} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_{ref}^o}$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el vacío ( $\lambda_0 = c_0/f$ ).

Para obtener los parámetros  $S$  buscados, será necesario deducir en primer lugar las expresiones de los factores de reflexión  $\rho^e$  y  $\rho^o$  mostrados en la figura 3. Como puede observarse en dicha figura, se tienen redes de 1 acceso constituidas por dos stubs en circuito abierto de longitudes  $l_1$  y  $l_2$  conectados en paralelo. Así pues, las admitancias que se ven en el acceso 1 de las dos redes de la figura 3 tienen, respectivamente, las siguientes expresiones:

$$Y_{IN}^e = j Y_0^e [\tan(\beta^e l_1) + \tan(\beta^e l_2)]$$

$$Y_{IN}^o = j Y_0^o [\tan(\beta^o l_1) + \tan(\beta^o l_2)]$$

Y por tanto, los factores de reflexión  $\rho^e$  y  $\rho^o$  se expresan como sigue:

$$\rho^e = \frac{1 - Y_{IN}^e}{1 + Y_{IN}^e} = \frac{1 - j Y_0^e [\tan(\beta^e l_1) + \tan(\beta^e l_2)]}{1 + j Y_0^e [\tan(\beta^e l_1) + \tan(\beta^e l_2)]}$$

$$\rho^o = \frac{1 - Y_{IN}^o}{1 + Y_{IN}^o} = \frac{1 - j Y_0^o [\tan(\beta^o l_1) + \tan(\beta^o l_2)]}{1 + j Y_0^o [\tan(\beta^o l_1) + \tan(\beta^o l_2)]}$$

Haciendo uso de estos factores de reflexión  $\rho^e$  y  $\rho^o$ , y realizando simples operaciones, se deducen las siguientes expresiones para los parámetros  $S$  buscados:

$$\boxed{\begin{aligned} S_{11} = S_{22} &= \frac{1}{2} (\rho^e + \rho^o) = \frac{A(Y_0^e, \beta^e, Y_0^o, \beta^o, l_1, l_2)}{C(Y_0^e, \beta^e, Y_0^o, \beta^o, l_1, l_2)} \\ S_{21} = S_{12} &= \frac{1}{2} (\rho^e - \rho^o) = j \frac{B(Y_0^e, \beta^e, Y_0^o, \beta^o, l_1, l_2)}{C(Y_0^e, \beta^e, Y_0^o, \beta^o, l_1, l_2)} \end{aligned}}$$

donde los términos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se definen tal y como se indica a continuación.

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + Y_0^e Y_0^o [\tan(\beta^e l_1) + \tan(\beta^e l_2)] [\tan(\beta^o l_1) + \tan(\beta^o l_2)] \\
 B &= Y_0^o [\tan(\beta^o l_1) + \tan(\beta^o l_2)] - Y_0^e [\tan(\beta^e l_1) + \tan(\beta^e l_2)] \\
 C &= 1 - Y_0^e Y_0^o [\tan(\beta^e l_1) + \tan(\beta^e l_2)] [\tan(\beta^o l_1) + \tan(\beta^o l_2)] + \\
 &\quad + j Y_0^e [\tan(\beta^e l_1) + \tan(\beta^e l_2)] + j Y_0^o [\tan(\beta^o l_1) + \tan(\beta^o l_2)]
 \end{aligned}$$

b1) La estructura mostrada en la figura 1b consta nuevamente de un par de líneas simétricas acopladas, las cuales presentan simetría física respecto del plano PS mostrado en la figura 4a. Sin embargo, tal y como se observa en dicha figura, los accesos 1 y 2 de esta segunda red no están situados de forma simétrica respecto del citado plano PS, por lo que para obtener los parámetros  $S$  de dicha red no se puede aplicar directamente la propiedad de simetría.

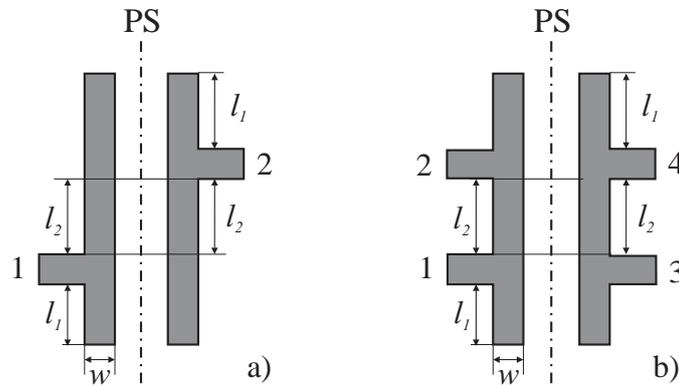


Figura 4: Plano de Simetría (PS) del segundo par de líneas simétricas acopladas en a), y estructura auxiliar para aplicar propiedades de simetría en b)

b2) Para calcular los parámetros  $S$  de la estructura mostrada en la figura 1b empleando la propiedad de simetría, es necesario considerar una estructura auxiliar como la de la figura 4b. Dicha estructura auxiliar tiene la misma geometría que la red bajo análisis, pero consta de 4 accesos para garantizar que éstos sean también simétricos respecto del plano PS (ver figura 4b). Obsérvese que dichos accesos se han numerado de forma adecuada para aplicar la propiedad de simetría en la resolución de la estructura auxiliar.

Así pues, la matriz de parámetros  $S$  de la estructura auxiliar propuesta se puede deducir aplicando la propiedad de simetría de una red con un número par de accesos (en este caso 4), según la cual se tiene que:

$$S^{(a)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^e + S^o & S^e - S^o \\ S^e - S^o & S^e + S^o \end{pmatrix}$$

donde  $S^e$  y  $S^o$  son, respectivamente, las matrices de parámetros  $S$  que relacionan los accesos 1 y 2 de la estructura auxiliar (ver figura 4b) tras sustituir el plano PS por una pared magnética (PM) y por una pared eléctrica (PE). El aspecto de estas redes de dos accesos se muestra en la figura 5.

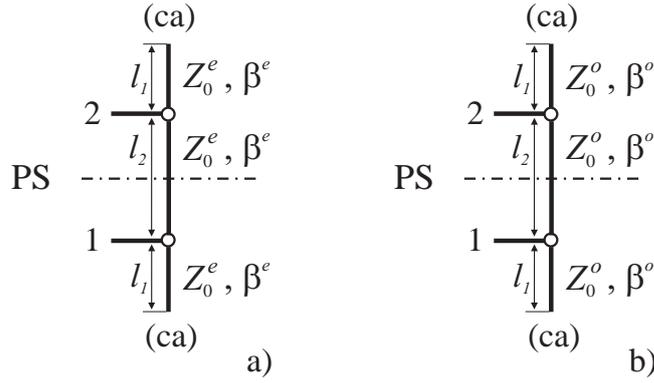


Figura 5: Red de 2 accesos tras sustituir PS por PM en a), y PS por PE en b)

Como puede observarse en las figuras 5a y 5b, las dos redes a considerar para obtener las matrices  $S^e$  y  $S^o$  son a su vez simétricas respecto de los planos PS mostrados en dichas figuras. Por tanto, se puede aplicar de nuevo la citada propiedad de simetría en el cálculo de dichas matrices, dando lugar a las siguientes expresiones:

$$S^e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho^{ee} + \rho^{eo} & \rho^{ee} - \rho^{eo} \\ \rho^{ee} - \rho^{eo} & \rho^{ee} + \rho^{eo} \end{pmatrix} \quad S^o = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho^{oe} + \rho^{oo} & \rho^{oe} - \rho^{oo} \\ \rho^{oe} - \rho^{oo} & \rho^{oe} + \rho^{oo} \end{pmatrix}$$

donde  $\rho^{ee}$  y  $\rho^{eo}$  representan en este caso los factores de reflexión en el puerto 1 de la red de la figura 5a cuando el PS de dicha red se sustituye, respectivamente, por una PM y por una PE, mientras que  $\rho^{oe}$  y  $\rho^{oo}$  tienen un significado análogo en el caso de la red de la figura 5b.

Teniendo en cuenta el aspecto que presentan las matrices  $S^e$  y  $S^o$ , así como la forma en que deben combinarse para obtener la matriz de parámetros  $S$  de la estructura auxiliar construida, se concluye que dicha matriz ( $S^{(a)}$ ) podrá escribirse finalmente del siguiente modo:

$$S^{(a)} = \begin{pmatrix} S_{11}^a & S_{12}^a & S_{13}^a & S_{23}^a \\ S_{12}^a & S_{11}^a & S_{23}^a & S_{13}^a \\ S_{13}^a & S_{23}^a & S_{11}^a & S_{12}^a \\ S_{23}^a & S_{13}^a & S_{12}^a & S_{11}^a \end{pmatrix}$$

comprobándose que esta matriz sólo consta de cuatro elementos (parámetros  $S$ ) diferentes.

Una vez obtenida la matriz  $S^{(a)}$  de la estructura auxiliar, se debe proceder finalmente al cálculo de la matriz de parámetros  $S$  de la red de 2 accesos mostrada en la figura 1b, que es lo que se pide en el enunciado de este apartado.

Para ello, se debe terminar en circuito abierto los accesos 2 y 3 de la estructura auxiliar mostrada en la figura 4b, pues de esta forma se recupera la red de 2

accesos que se pide resolver. Estas condiciones de terminación suponen considerar que las ondas de tensión entrantes y salientes en dichos accesos son iguales:

$$a_2 = b_2 \quad a_3 = b_3$$

Haciendo uso de estas relaciones entre las ondas de tensión en los accesos 2 y 3 de la estructura auxiliar, así como de la matriz  $S^{(a)}$  de dicha estructura, se pueden deducir las expresiones de los elementos de la matriz de parámetros  $S$  buscada. Para ello, se debe resolver las siguientes relaciones entre las ondas incidentes y reflejadas en los accesos 1 y 4 de la estructura auxiliar:

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_4=0} \quad S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_4} \right|_{a_1=0} \quad S_{21} = \left. \frac{b_4}{a_1} \right|_{a_4=0} \quad S_{22} = \left. \frac{b_4}{a_4} \right|_{a_1=0}$$

Obsérvese que el acceso 4 de la estructura auxiliar considerada se corresponde con el acceso 2 de la red a resolver en este apartado (ver figura 4).

Las expresiones concretas de los parámetros  $S$  de la red propuesta en función de los elementos de la matriz  $S^{(a)}$  se detallan en el siguiente apartado.

c) Para expresar los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  de la red de 2 accesos de la figura 1b en función de los elementos de la matriz  $S^{(a)}$ , se seguirá el procedimiento recién descrito en el apartado anterior.

La matriz  $S^{(a)}$  de la estructura auxiliar considerada relaciona las ondas de tensión normalizadas en los accesos de dicha estructura. Teniendo en cuenta además que los accesos 2 y 3 de dicha estructura deben terminarse en circuito abierto, se tendrá que:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^a & S_{12}^a & S_{13}^a & S_{23}^a \\ S_{12}^a & S_{11}^a & S_{23}^a & S_{13}^a \\ S_{13}^a & S_{23}^a & S_{11}^a & S_{12}^a \\ S_{23}^a & S_{13}^a & S_{12}^a & S_{11}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

De esta relación matricial, se puede plantear el siguiente sistema de 4 ecuaciones:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}^a a_1 + S_{12}^a b_2 + S_{13}^a b_3 + S_{23}^a a_4 \\ b_2 &= S_{12}^a a_1 + S_{11}^a b_2 + S_{23}^a b_3 + S_{13}^a a_4 \\ b_3 &= S_{13}^a a_1 + S_{23}^a b_2 + S_{11}^a b_3 + S_{12}^a a_4 \\ b_4 &= S_{23}^a a_1 + S_{13}^a b_2 + S_{12}^a b_3 + S_{11}^a a_4 \end{aligned}$$

del que se tiene intención de encontrar una relación entre las ondas  $b_1$  y  $a_1$  ( $S_{11}$ ) y entre las ondas  $b_4$  y  $a_1$  ( $S_{21}$ ). Para ello, en la primera y cuarta ecuación del sistema,  $b_2$  y  $b_3$  deben expresarse en función de  $a_1$  y  $a_4$ .

Con el objetivo de expresar  $b_2$  y  $b_3$  en función de  $a_1$  y  $a_4$ , se debe hacer uso de la segunda y tercera ecuación del anterior sistema, que agrupando términos presentan el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} (1 - S_{11}^a) b_2 - S_{23}^a b_3 &= S_{12}^a a_1 + S_{13}^a a_4 \\ -S_{23}^a b_2 + (1 - S_{11}^a) b_3 &= S_{13}^a a_1 + S_{12}^a a_4 \end{aligned}$$

De este último par de ecuaciones, se despeja fácilmente las siguientes expresiones para  $b_2$  y  $b_3$  en función de  $a_1$  y  $a_4$ :

$$\begin{aligned} b_2 &= [(1 - S_{11}^a)^2 - (S_{23}^a)^2]^{-1} (S_{23}^a S_{13}^a + S_{12}^a - S_{12}^a S_{11}^a) a_1 + \\ &\quad + [(1 - S_{11}^a)^2 - (S_{23}^a)^2]^{-1} (S_{23}^a S_{12}^a + S_{13}^a - S_{13}^a S_{11}^a) a_4 \\ b_3 &= [(1 - S_{11}^a)^2 - (S_{23}^a)^2]^{-1} (S_{23}^a S_{12}^a + S_{13}^a - S_{13}^a S_{11}^a) a_1 + \\ &\quad + [(1 - S_{11}^a)^2 - (S_{23}^a)^2]^{-1} (S_{23}^a S_{13}^a + S_{12}^a - S_{12}^a S_{11}^a) a_4 \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora estas expresiones para  $b_2$  y  $b_3$  en la primera y cuarta ecuación del sistema de 4 ecuaciones planteado previamente, se concluye que los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  solicitados se expresan en función de los elementos de la matriz  $S^{(a)}$  como sigue:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{11}^a + [(1 - S_{11}^a)^2 - (S_{23}^a)^2]^{-1} [2 S_{12}^a S_{13}^a S_{23}^a + (1 - S_{11}^a) \{(S_{12}^a)^2 + (S_{13}^a)^2\}] \\ S_{21} &= S_{23}^a + [(1 - S_{11}^a)^2 - (S_{23}^a)^2]^{-1} [S_{23}^a \{(S_{12}^a)^2 + (S_{13}^a)^2\} + 2 S_{12}^a S_{13}^a (1 - S_{11}^a)] \end{aligned}$$

Aunque el apartado no pregunta por las expresiones de los parámetros  $S_{12}$  y  $S_{22}$  de la red bajo análisis, dichos parámetros se pueden relacionar con los deducidos anteriormente a partir de las propiedades de la matriz de parámetros  $S$  de la red. Observando la figura 1b se comprueba que la red es recíproca (pues es pasiva, lineal y con dieléctrico isótropo), y que es simétrica (se ve la misma estructura desde el acceso 1 que desde el acceso 2), y por tanto se puede afirmar que:

$$S_{12} = S_{21} \qquad S_{22} = S_{11}$$

9.3. PROBLEMA 3 (35 p)

Un transistor presenta a  $f = 10 \text{ GHz}$  los siguientes parámetros de dispersión en gran señal referidos a  $Z_o = 50 \Omega$ :

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,35_{160^\circ} & 0,06_{110^\circ} \\ 3_{75^\circ} & 0,92_{165^\circ} \end{bmatrix}$$

- (5 p) a.- Indicar sobre la carta de Smith las zonas de inestabilidad en la entrada y en la salida (la carta deberá ser entregada con el examen).
- (10 p) b.- Con este transistor se pretende realizar un oscilador a  $f = 10 \text{ GHz}$  cargando la entrada con una red como la mostrada en la figura 1. Sabiendo que  $|X_s| = 100 \Omega$  indicar una valor de  $Z_s$  que nos lleve a tener  $|\rho_{out}| > 1$  e indicar el valor de  $Z_{out}$  obtenido.
- (10 p) c.- Calcular en primer lugar la impedancia  $Z_L$  que cumpla la condición de oscilación y proponer una red de sintonía que sintetice dicha impedancia a partir de  $Z_o$ .
- (10 p) d.- Suponiendo que con este dispositivo y una determinada red de sintonía se han obtenido las líneas de dispositivo y carga de la figura 2, indicar en que puntos se cumpliría la condición de oscilación y su carácter de oscilación estable o inestable.

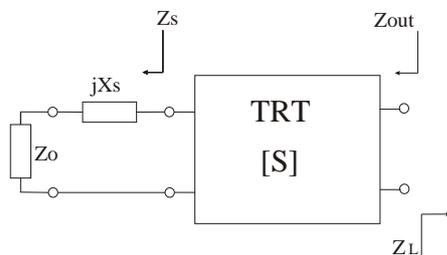


Figura 1: Red de entrada

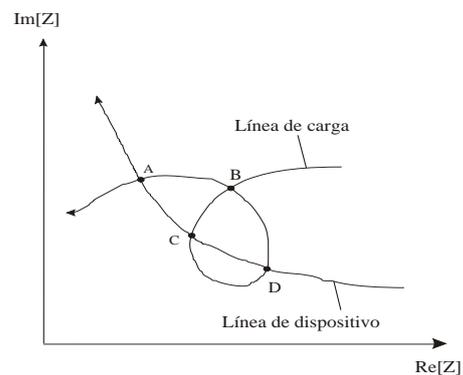


Figura 2: Líneas de carga y dispositivo

Datos:

Círculo de estabilidad de entrada:

Círculo de estabilidad de salida:

$$\begin{cases} C_S = \frac{(S_{11} - \Delta \cdot S_{22}^*)^*}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} & \text{centro,} \\ R_S = \left| \frac{S_{12} \cdot S_{21}}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} \right| & \text{radio.} \end{cases} \quad \begin{cases} C_L = \frac{(S_{22} - \Delta \cdot S_{11}^*)^*}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} & \text{centro,} \\ R_L = \left| \frac{S_{12} \cdot S_{21}}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} \right| & \text{radio.} \end{cases}$$

con  $\Delta = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}$ .

a) En primer lugar sustituiremos los valores de los parámetros de dispersión en las expresiones del centro y el radio de los círculos de estabilidad para su cálculo.

El determinante  $\Delta$  de la matriz de dispersión será:

$$\begin{aligned} \Delta &= S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} = 0,35 \cdot 0,92_{325^\circ} - 0,06 \cdot 3_{185^\circ} \\ &= (0,322 \cos 325 - 0,18 \cos 185) + j(0,322 \sin 325 - 0,18 \sin 185) \\ &= 0,4431 - j0,169 = 0,4742_{-20,87} \end{aligned}$$

Por lo que podremos poner el centro del círculo de estabilidad de entrada como:

$$C_S = \frac{(S_{11} - \Delta \cdot S_{22}^*)^*}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} = \frac{(0,35_{160} - 0,4742_{-20,87} \cdot 0,92_{-165})^*}{0,35^2 - 0,4742^2} = \frac{0,1292_{-35,54}}{0,1022_{180}} = 1,26_{144,5^\circ}$$

Y el radio será:

$$R_S = \left| \frac{S_{12} \cdot S_{21}}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} \right| = \left| \frac{0,06_{110} \cdot 3_{75}}{0,35^2 - 0,4742^2} \right| = 1,758$$

En cuanto al centro y al radio de círculo de estabilidad de salida serán:

$$C_L = \frac{(S_{22} - \Delta \cdot S_{11}^*)^*}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} = \frac{(0,92_{165} - 0,4742_{-20,87} \cdot 0,35_{-160})^*}{0,92^2 - 0,4742^2} = \frac{0,7601_{-161,9}}{0,6215} = 1,22_{-161,9^\circ}$$

$$R_L = \left| \frac{S_{12} \cdot S_{21}}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} \right| = \left| \frac{0,06_{110} \cdot 3_{75}}{0,92^2 - 0,4742^2} \right| = 0,2896$$

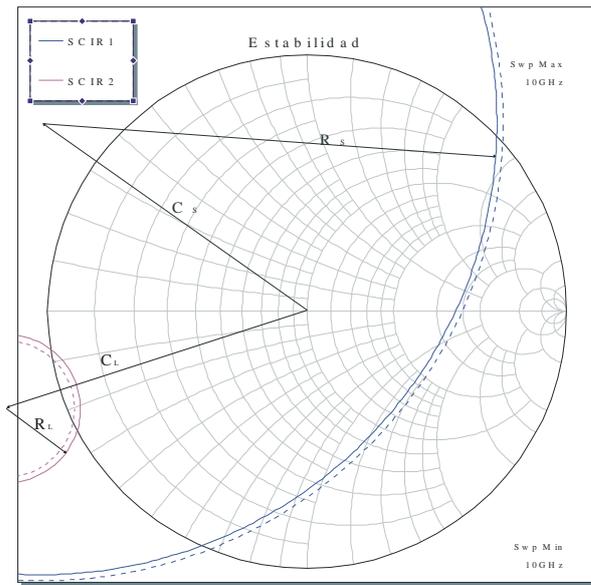


Figura 3: Círculos de estabilidad

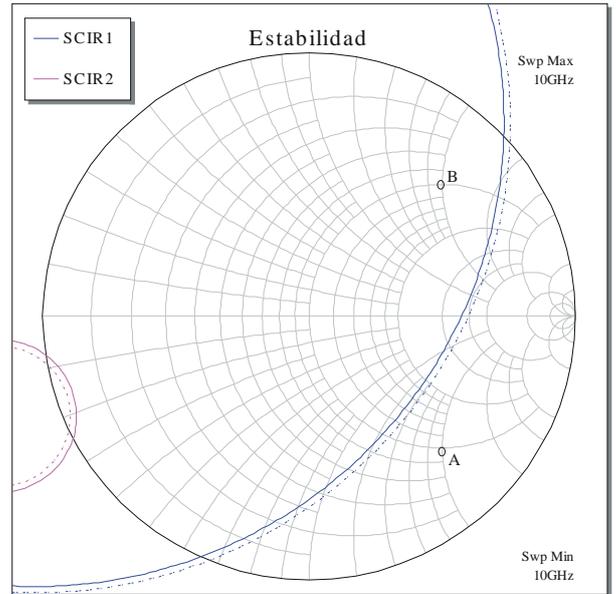


Figura 4: Posibles valores de  $Z_S$

Si dibujamos ahora estos círculos en la carta de Smith tendremos los mostrados en la figura 3.

Tanto para el círculo de entrada como para el de salida el origen de carta de Smith será estable puesto que  $|S_{11}| < 1$  y  $|S_{22}| < 1$ . En la figura 3 la circunferencia discontinua establece la zona inestable a la entrada y a la salida, que resultará en el caso de círculo de salida, plano  $\rho_L$ , estar en el interior del mismo, y en el caso del círculo de entrada, plano  $\rho_S$ , fuera del mismo.

b) Teniendo presente que el valor de  $X_S$  normalizado será:

$$|\bar{X}_S| = \frac{|X_S|}{Z_o} = 2$$

y dado que la parte real de  $\bar{Z}_S$  debe ser 1 por la red propuesta en la figura 1, tendremos tan solo dos posibles valores, puntos A y B de la figura 4. El punto B estaría en zona estable, por lo que no valdría para la realización del oscilador, será por tanto el punto A el escogido, quedando un impedancia de fuente igual a:

$$\bar{Z}_S = 1 - j2$$

Con esta  $Z_S$  calcularemos el factor de reflexión de fuente para posteriormente calcular el factor de reflexión a la salida,  $\rho_{out}$ .

$$\rho_S = \frac{\bar{Z}_S - 1}{\bar{Z}_S + 1} = \frac{1 - j2 - 1}{1 - j2 + 1} = \frac{-j}{1 - j} = 0,707_{-45^\circ}$$

El factor de reflexión de salida vendrá dado por:

$$\rho_{out} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\rho_S}{1 - S_{11}\rho_S} = 1,0302_{163,53^\circ}$$

Valor de  $\rho_{out}$  que efectivamente presenta un valor en módulo mayor que la unidad. Por tanto una impedancia de salida será igual a:

$$\bar{Z}_{out} = \frac{1 + \rho_{out}}{1 - \rho_{out}} = 0,1455_{96^\circ} = -0,0152 + j0,1447$$

Desnormalizando dicha impedancia quedará que:

$$Z_{out} = Z_o \bar{Z}_{out} = -0,76 + j7,235 \Omega$$

Impedancia que efectivamente presenta una parte real negativa como cabía de esperar.

c) La condición de oscilación en el plano de salida del transistor quedará como:

$$Z_{out} + Z_L = 0$$

Es decir que  $Z_L$  valdrá:

$$Z_L = R_L + jX_L = -Z_{out} = 0,76 - j7,235 \Omega$$

Una posible red de sintonía que a partir de  $Z_o = 50 \Omega$  permita obtener esta  $Z_L$  sería la formada por una línea de  $\lambda/4$  de  $Z'_o$  que transformase en primer lugar los  $50 \Omega$  a  $0,76 \Omega$  y posteriormente un condensador serie que sintetice el valor de  $-7,235 \Omega$ , figura 5. Los valores de  $Z'_o$  y  $C$  valdrían:

$$Z'_o = \sqrt{Z_o R_L} = \sqrt{500,76} = 6,16 \Omega$$

$$C = \frac{1}{\omega X_L} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 7,235} = 2,2 \text{ nF}$$

d) El cruce entre las líneas de carga y dispositivo darán los posibles valores de oscilación, es decir aquellos en los que se cumplirá  $Z_L + Z_D = 0$ . De la figura 2 deducimos como posibles puntos de oscilación los puntos A, C y D. Para ver la condición de oscilación estable en cada punto observaremos el ángulo  $\phi$  formado entre las dos líneas definido desde el tramo creciente de la línea de dispositivo hacia el tramo creciente de la línea de carga en sentido horario. En el caso que este ángulo sea mayor que cero y menor que  $180^\circ$  estaremos ante una oscilación estable y en caso contrario será inestable. Observando este ángulo en los tres puntos de oscilación se observa que tan solo el punto D presenta una oscilación estable, siendo los puntos A y C dos puntos de oscilación inestable, figura 6.

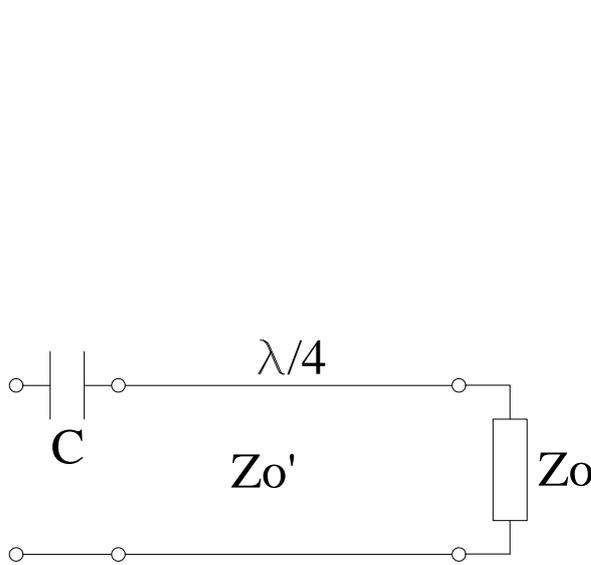


Figura 5: Red de sintonía salida

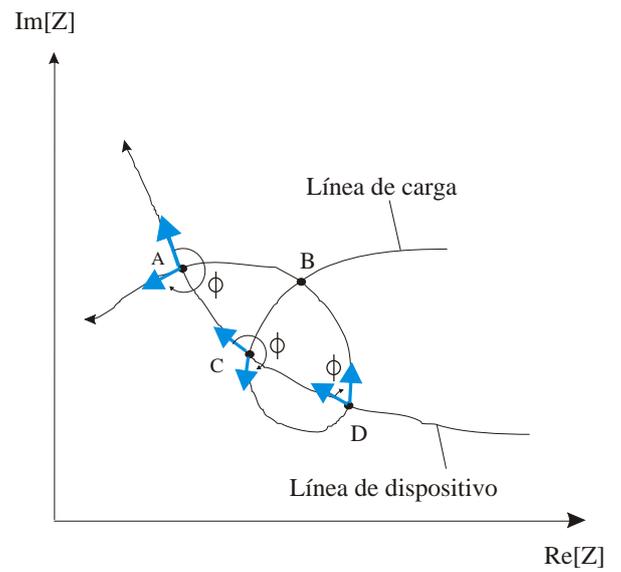


Figura 6: Condiciones de oscilación estable

# **MICROONDAS**

**Examen febrero 03**

**M. Baquero, F. Peñaranda y V. Boria**

## 8 FEBRERO 03

### 8.1 PROBLEMA 1 (35 p)

Una red de cuatro accesos está formada por cuatro reactancias, presentando doble simetría como se muestra en la figura 1.

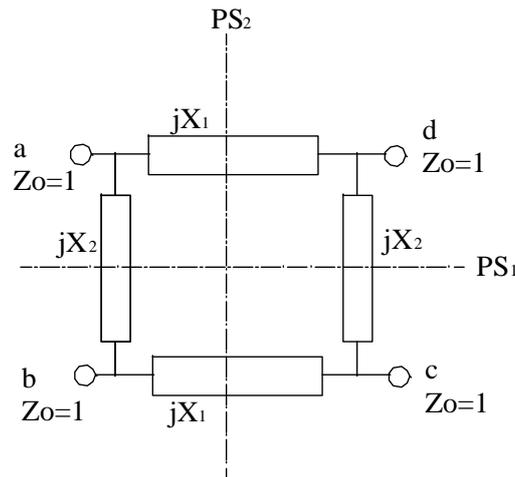


Figura 1: Red 4 accesos

- (5 p) a.- Encontrar una numeración adecuada de los accesos a, b, c y d para aplicar simetrías.
- (10 p) b.- Encontrar la expresión del parámetro  $S_{aa}$ .
- (10 p) c.- Para el caso particular de  $X_2 = -X_1$  encontrar las expresiones de los parámetros  $S_{aa}$ ,  $S_{ba}$ ,  $S_{ca}$  y  $S_{da}$ .
- (10 p) d.- Para el caso particular del apartado anterior tratamos de diseñar un acoplador direccional con unas pérdidas de retorno ( $L_R$ ) de 25 dB, ¿cuánto valdrían en dB's los parámetros acoplamiento ( $C$ ), pérdidas de inserción ( $L_I$ ) y directividad ( $D$ )? ¿Sería un buen acoplador direccional? ¿Por qué?.

---

a) Para poder aplicar las propiedades de simetría sobre el plano  $PS_1$  numeramos de 1 a 2 los accesos superiores y de 3 a 4 los inferiores. Quedando que:

$$a \rightarrow 1 ; b \rightarrow 3 ; c \rightarrow 4 ; d \rightarrow 2$$

Esta numeración no es la única, pudiéndose haber escogido otras que también respetasen el criterio que nos permite hacer uso de las expresiones de simetría.

b) Si aplicamos doble simetría tendríamos cuatro redes de un acceso cada una de ellas caracterizada por un coeficiente de reflexión. La figura 2 resume las cuatro redes que aparecen.

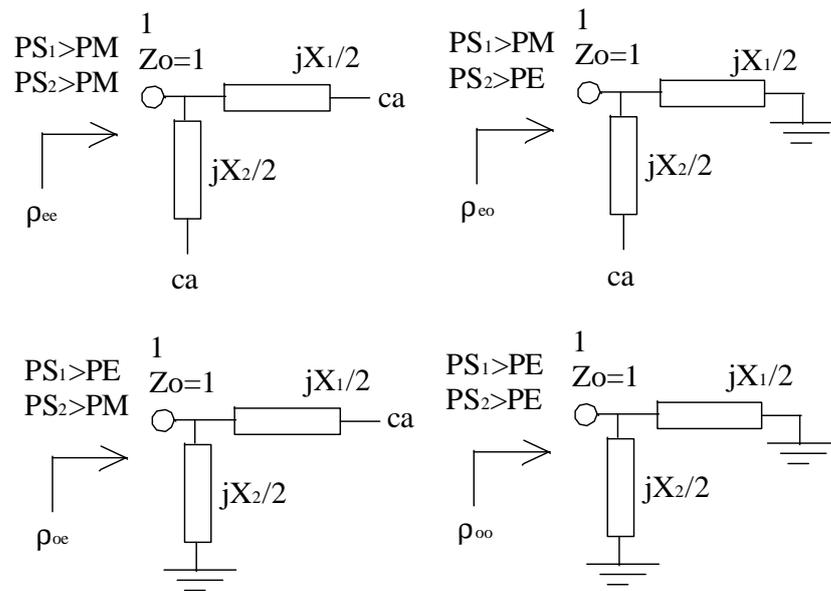


Figura 2: Redes doble simetría

Sobre estas redes resultará fácil el cálculo de los coeficientes de reflexión:

$$\begin{aligned} \rho^{ee} &= 1 \\ \rho^{eo} &= \frac{jX_1/2 - 1}{jX_1/2 + 1} = \frac{jX_1 - 2}{jX_1 + 2} \\ \rho^{oe} &= \frac{jX_2 - 2}{jX_2 + 2} \\ \rho^{oo} &= \frac{1 - (-j2/X_1 - j2/X_2)}{1 + (-j2/X_1 - j2/X_2)} = \frac{X_1 X_2 + j2(X_1 + X_2)}{X_1 X_2 - j2(X_1 + X_2)} \end{aligned}$$

Con estos coeficientes podremos calcular  $S_{11}^e$  y  $S_{11}^o$  (correspondientes a las redes de dos accesos después de hacer  $PS_1 \rightarrow PM$  y  $PS_1 \rightarrow PE$ ) como

$$S_{11}^e = \frac{1}{2}(\rho^{ee} + \rho^{eo})$$

$$S_{11}^o = \frac{1}{2}(\rho^{oe} + \rho^{oo})$$

con los cuales podremos calcular  $S_{11}$  como

$$S_{11} = \frac{1}{2}(S_{11}^e + S_{11}^o) = \frac{1}{4}(\rho^{ee} + \rho^{eo} + \rho^{oe} + \rho^{oo})$$

Sustituyendo obtendríamos

$$S_{11} = \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{jX_1 - 2}{jX_1 + 2} + \frac{jX_2 - 2}{jX_2 + 2} + \frac{X_1X_2 + j2(X_1 + X_2)}{X_1X_2 - j2(X_1 + X_2)} \right]$$

$$S_{11} = \frac{1}{4} \left[ \frac{(jX_1 + 2)(jX_2 + 2)[X_1X_2 - j2(X_1 + X_2)] + (jX_1 - 2)(jX_2 + 2)[X_1X_2 - j2(X_1 + X_2)]}{(jX_1 + 2)(jX_2 + 2)[X_1X_2 - j2(X_1 + X_2)]} \right. \\ \left. + \frac{(jX_1 + 2)(jX_2 - 2)[X_1X_2 - j2(X_1 + X_2)] + (jX_1 + 2)(jX_2 + 2)[X_1X_2 + j2(X_1 + X_2)]}{(jX_1 + 2)(jX_2 + 2)[X_1X_2 - j2(X_1 + X_2)]} \right]$$

$$S_{11} = \frac{1}{4} \left[ \frac{-4X_1^2X_2^2 + j8[X_1X_2(X_1 + X_2) + 2(X_1 + X_2)]}{-X_1^2X_2^2 + 12X_1X_2 + 4X_1^2 + 4X_2^2 + j4[X_1X_2(X_1 + X_2) - 2(X_1 + X_2)]} \right]$$

Obteniéndose el siguiente parámetro  $S_{11}$ :

$$S_{11} = \frac{2X_1^2X_2 + 2X_1X_2^2 + 4X_1 + 4X_2 + jX_1^2X_2^2}{4X_1^2X_2^2 + 4X_1X_2^2 - 8X_1 - 8X_2 + j[X_1^2X_2^2 - 12X_1X_2 - 4X_1^2 - 4X_2^2]}$$

c) Para el caso particular de  $X_2 = -X_1$  los factores de reflexión de las cuatro redes de un acceso que nos aparecían cuando aplicábamos doble simetría quedarán como:

$$\rho^{ee} = 1$$

$$\rho^{eo} = \frac{jX_1 - 2}{jX_1 + 2}$$

$$\rho^{oe} = \frac{-jX_1 - 2}{-jX_1 + 2} = \frac{jX_1 + 2}{jX_1 - 2}$$

$$\rho^{oo} = \frac{-X_1^2 + j2(X_1 - X_1)}{-X_1^2 - j2(X_1 - X_1)} = 1$$

Con los que podremos calcular los parámetros  $S$  de la red original.

$$S_{11} = \frac{1}{4}(\rho^{ee} + \rho^{eo} + \rho^{oe} + \rho^{oo}) = \frac{1}{4} \left[ \frac{-2X_1^2 - 8 + (jX_1 - 2)^2 + (jX_1 + 2)^2}{-X_1^2 - 4} \right]$$

$$S_{11} = \frac{X_1^2}{X_1^2 + 4}$$

$$S_{21} = \frac{1}{4}(\rho^{ee} - \rho^{eo} + \rho^{oe} - \rho^{oo}) = \frac{1}{4} \left[ \frac{-(jX_1 - 2)^2 + (jX_1 + 2)^2}{-X_1^2 - 4} \right]$$

$$S_{21} = -j \frac{2X_1}{X_1^2 + 4}$$

$$S_{31} = \frac{1}{4}(\rho^{ee} + \rho^{eo} - \rho^{oe} - \rho^{oo}) = \frac{1}{4} \left[ \frac{(jX_1 - 2)^2 - (jX_1 + 2)^2}{-X_1^2 - 4} \right]$$

$$S_{31} = j \frac{2X_1}{X_1^2 + 4}$$

$$S_{41} = \frac{1}{4}(\rho^{ee} - \rho^{eo} - \rho^{oe} + \rho^{oo}) = \frac{1}{4} \left[ \frac{-2X_1^2 - 8 - (jX_1 - 2)^2 - (jX_1 + 2)^2}{-X_1^2 - 4} \right]$$

$$S_{41} = \frac{4}{X_1^2 + 4}$$

d) Las pérdidas de retorno en  $dBs$  vienen dadas por:

$$L_R = -20 \log |S_{11}|$$

Por lo que podremos poner que el módulo de  $S_{11}$  viene dado por

$$|S_{11}| = 10^{-L_R/20} = 10^{-25/20} = 0,0562$$

Haciendo uso de la expresión de  $S_{11}$  obtenida en el apartado anterior podremos despejar el valor de  $X_1$

$$|S_{11}| = \frac{X_1^2}{X_1^2 + 4}$$

$$|S_{11}|X_1^2 + 4|S_{11}| = X_1^2$$

$$X_1^2 = \frac{-4|S_{11}|}{|S_{11}| - 1} = 0,2383$$

$$X_1 = 0,4882$$

Con este valor ya podremos calcular el resto de los parámetros que nos piden:

$$C = -20 \log |S_{21}| = -20 \log \frac{2|X_1|}{X_1^2 + 4}$$

$$\boxed{C = 12,75 \text{ dB}}$$

$$L_I = -20 \log |S_{41}| = -20 \log \frac{4}{X_1^2 + 4}$$

$$\boxed{L_I = 0,5027 \text{ dB}}$$

Si hemos tomado como acceso acoplado el 2 y principal el 4 el desacoplado deberá ser el 3, por lo que la directividad la definiríamos como:

$$D = 20 \log \frac{|S_{21}|}{|S_{31}|} = 20 \log 1$$

$$\boxed{D = 0 \text{ dB}}$$

Es decir estaríamos ante un mal acoplador direccional, por no presentar ninguna directividad, o mejor dicho no podríamos considerarlo como acoplador direccional.

## 8.2 PROBLEMA 2 (35 p)

Se pretende analizar una antena impresa de parche rectangular, cuya geometría se muestra en la figura 1 (donde  $L = 3$  cm,  $W = 2$  cm,  $h = 1$  mm y  $\varepsilon_r = 7,72$ ). Para ello, esta antena se modela como una cavidad rectangular delimitada por 4 paredes magnéticas (planos  $x = 0$ ,  $x = L$ ,  $y = 0$  e  $y = W$  en fig. 1) y 2 paredes eléctricas (planos  $z = 0$  y  $z = h$  en figura 1), cuyos modos resonantes causan el fenómeno de radiación. Se pide responder a las siguientes cuestiones:

(12 p) a1.- Demostrar que las componentes axiales de los modos  $\text{TM}_{mnp}^z$  de la cavidad (considerar el eje  $\hat{z}$  de la figura 1 como dirección de propagación para construir los citados modos) tienen las siguientes expresiones:

$$E_z(x, y, z) = E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{h}\right) \quad H_z(x, y, z) = 0$$

Comprobar a su vez que estos modos ( $\text{TM}_{mnp}^z$ ) admiten la solución  $p = 0$ , y que en dicho caso se tienen las frecuencias de resonancia más bajas.

(8 p) a2.- ¿Cuál será pues la frecuencia de operación más baja a la que podrá operar esta antena? A dicha frecuencia de trabajo, obtener las expresiones de los campos electromagnéticos ( $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ ) en el interior de la cavidad, e indicar dónde se tendrá un valor máximo de campo eléctrico.

La antena bajo análisis se alimenta mediante un cable coaxial, cuyo conductor interno (de diámetro  $2a = 3$  mm) perfora el dieléctrico y se conecta al plano metálico superior (tal y como se indica en la figura 2). Esta conexión se realiza en un extremo de la antena ( $x = 0$ ,  $y = W/2$  y  $z = h$ ), y excita al modo fundamental (aquél con frecuencia de resonancia más baja) de la cavidad con un nivel de campo eléctrico máximo de  $25 \cdot 10^3$  V/m (que produce un nivel de potencia radiada por la antena de 600 mW). Se pide:

(8 p) b.- Determinar la eficiencia óhmica de la antena  $\eta_d$  (ver Datos). Suponer que hay pérdidas en los dos planos metálicos de Cobre ( $\sigma_{\text{Cu}} = 5,9 \cdot 10^7$  S/m) y que el substrato dieléctrico no tiene pérdidas ( $\text{tg}\delta = 0$ ).

(7 p) c.- Si se considera el efecto perturbador del conductor interno del cable coaxial (asumiendo que  $2a \ll L$  y  $2a \ll W$ ), ¿qué parámetro de funcionamiento de la antena se verá afectado y en qué sentido? ¿De qué manera podría compensarse dicho efecto durante la etapa de diseño de la antena? **Razone la respuesta. No es necesario proporcionar respuestas numéricas.**

Datos:

- Solución de las Ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{E}_t = -\frac{1}{k_c^2} [\gamma \nabla_t E_z + j \omega \mu \nabla_t \times H_z \hat{z}] \quad \vec{H}_t = -\frac{1}{k_c^2} [\gamma \nabla_t H_z - j \omega \varepsilon \nabla_t \times E_z \hat{z}]$$

- Eficiencia óhmica de una antena:

$$\eta_d = \frac{P_t}{P_t + P_d} \quad P_t: \text{Potencia radiada} \quad P_d: \text{Potencia disipada}$$

- Potencia media disipada en la superficie  $S$  de un conductor (con pérdidas):

$$P_{Lc} = \frac{1}{2} R_s \iint_S |\vec{J}_s|^2 dS \quad R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2 \sigma}} \quad \vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} \Big|_S$$

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \quad \varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

- Potencia media disipada en un volumen dieléctrico (con pérdidas)  $V$ :

$$P_{Ld} = \frac{1}{2} \omega \varepsilon'' \iiint_V |\vec{E}|^2 dV$$

- Variación relativa de la frecuencia de resonancia de una cavidad cuando hay una pequeña perturbación ( $\delta V$ ) en la forma:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\iiint_{\delta V} (\mu |\vec{H}|^2 - \varepsilon |\vec{E}|^2) dV}{\iiint_V (\mu |\vec{H}|^2 + \varepsilon |\vec{E}|^2) dV}$$

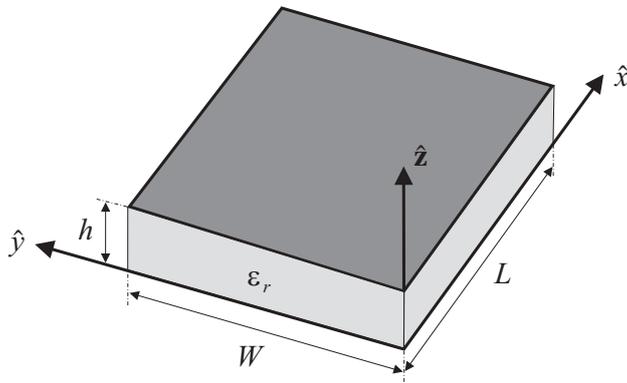


Figure 1: Figura 1: Antena impresa

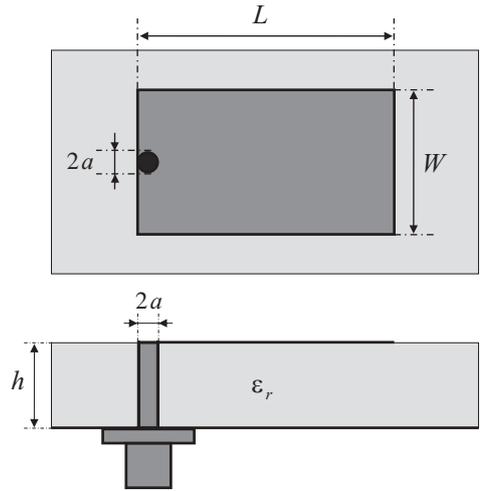


Figure 2: Figura 2: Excitación coaxial

a1) Para construir los modos  $TM_{mnp}^z$  de una cavidad, se debe comenzar escribiendo los modos  $TM^z$  de una guía de ondas. Como el enunciado indica que se escoja el eje  $\hat{z}$  como dirección de propagación, la guía de ondas que deberá considerarse es una guía rectangular, de dimensiones  $L$  (anchura) y  $W$  (altura), delimitada por cuatro paredes magnéticas (ver figura 3).

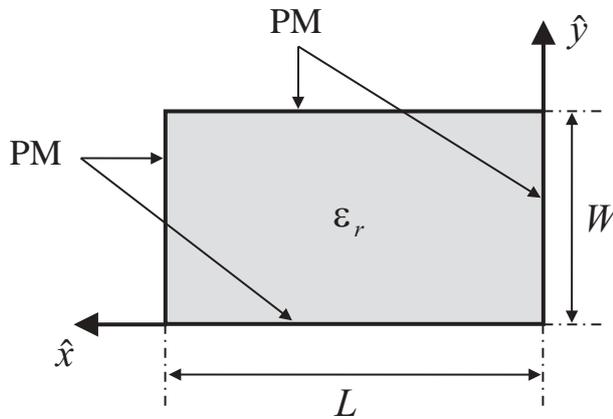


Figure 3: Geometría de la guía rectangular a considerar

La familia de modos  $TM^z$  de una guía rectangular como la que se muestra en la figura 3 presenta las siguientes componentes axiales:

$$H_z = 0 \quad (\text{al tratarse de modos } TM^z)$$

$$E_z = [A \cos(k_x x) + B \text{sen}(k_x x)] [C \cos(k_y y) + D \text{sen}(k_y y)]$$

donde los números de onda de corte transversales de dichos modos ( $k_c$ ) se definen del siguiente modo:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Para deducir los valores de las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , así como de los números de onda de corte  $k_x$  y  $k_y$ , presentes en las expresiones anteriores, se impondrá la condición de pared magnética en las paredes de la guía  $x = 0, L$  e  $y = 0, W$ . Dicha condición supone que:

$$\vec{H}_t \Big|_{x=0,L} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{x=0,L} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{H}_t \Big|_{y=0,W} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{y=0,W} = 0$$

Imponiendo las anteriores condiciones se deduce fácilmente que:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{x=0} = B k_x [C \cos(k_y y) + D \operatorname{sen}(k_y y)] = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{x=L} = [-A k_x \operatorname{sen}(k_x L)] [C \cos(k_y y) + D \operatorname{sen}(k_y y)] = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{L}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{y=0} = [A \cos(k_x x)] D k_y = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{y=W} = [A \cos(k_x x)] [-C k_y \operatorname{sen}(k_y W)] = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{W}$$

donde los subíndices modales  $m$  y  $n$  pueden tomar los valores enteros  $m = 0, 1, 2, \dots$  y  $n = 0, 1, 2, \dots$ , y no se admite la solución  $m = n = 0$ .

Resumiendo, las componentes axiales de los modos  $\text{TM}_{mn}^z$  de la guía de ondas rectangular considerada son:

$E_z = E_0^+ \cos(k_x x) \cos(k_y y) \quad \text{y} \quad H_z = 0$ <p>con <math>m = 0, 1, 2, \dots</math> y <math>n = 0, 1, 2, \dots</math> pero <math>m = n \neq 0</math></p>
--

Seguidamente se construirán los modos  $\text{TM}^z$  de la cavidad resonante considerada. Para ello, se deben combinar de forma adecuada las expresiones de los modos incidente y reflejado de la guía rectangular que se terminan de deducir. De este modo, y haciendo uso de los datos del enunciado, se tiene que:

$$E_z = \left[ \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \right] [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{j\beta z}] \quad \text{y} \quad H_z = 0$$

$$E_x = j \frac{\beta m \pi}{k_c^2 L} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \right] [E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{j\beta z}]$$

$$E_y = j \frac{\beta n \pi}{k_c^2 W} \left[ \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \right] [E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{j\beta z}]$$

$$H_x = -j \frac{\omega \varepsilon n \pi}{k_c^2 W} \left[ \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \right] [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{j\beta z}]$$

$$H_y = j \frac{\omega \varepsilon m \pi}{k_c^2 L} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \right] [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{j\beta z}]$$

La relación entre las constantes  $E_0^+$  y  $E_0^-$  presentes en las expresiones anteriores, así como el valor de  $\beta$ , se deduce de forzar ahora la condición de pared eléctrica en las paredes de la guía  $z = 0, h$ :

$$E_x, E_y|_{z=0,h} = 0$$

Aplicando dichas condiciones se obtiene que:

$$E_x(z=0) = E_y(z=0) = 0 \Rightarrow E_0^+ - E_0^- = 0 \Rightarrow E_0^- = E_0^+$$

$$E_x(z=h) = E_y(z=h) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\beta h) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{p\pi}{h}$$

donde  $p$  será un número entero, del que resta por determinar si empieza en 0 o en 1. Para ello, sustituyendo la relación entre  $E_0^-$  y  $E_0^+$  en las expresiones de los campos eléctrico y magnético de los modos de la cavidad, se obtiene que:

$$E_z \propto \cos\left(\frac{p\pi z}{h}\right)$$

$$E_x, E_y \propto \text{sen}\left(\frac{p\pi z}{h}\right)$$

$$H_x, H_y \propto \cos\left(\frac{p\pi z}{h}\right)$$

Si en las expresiones anteriores se toma  $p = 0$ , se observa que se tiene una solución modal con componentes de campo eléctrico ( $E_z$ ) y magnético ( $H_x$  y  $H_y$ ) no nulas, concluyendo que los modos  $\text{TM}_{mn0}^z$  son una solución válida.

Así pues, se ha demostrado que los modos  $\text{TM}_{mnp}^z$  de la cavidad que modela la antena impresa bajo análisis tienen las siguientes componentes axiales:

$$E_z = E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{h}\right) \quad \text{y} \quad H_z = 0$$

con  $E_0 = 2E_0^+$   $m = 0, 1, 2, \dots$   $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $p = 0, 1, 2, \dots$  pero  $m = n \neq 0$

a2) La frecuencia de operación más baja de la antena corresponderá a la frecuencia de resonancia menor de los modos de la cavidad considerada. En el caso de los modos  $\text{TM}_{mnp}^z$  resueltos anteriormente, se sabe de la definición de  $\beta$  que:

$$\beta = \left(\frac{p\pi}{h}\right) = \sqrt{k^2 - k_{c_{mn}}^2} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 - k_{c_{mn}}^2}$$

y por tanto la frecuencia de resonancia de dichos modos  $\text{TM}_{mnp}^z$  es:

$$f_{\text{TM}_{mnp}^z} = \frac{c_0}{2\pi \sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2}$$

En la expresión recién deducida para la frecuencia de resonancia de los modos  $\text{TM}_{mnp}^z$ , los subíndices modales  $m$ ,  $n$  y  $p$  pueden tomar los valores enteros deducidos en el apartado anterior (es decir,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $p = 0, 1, 2, \dots$  pero con  $m = n \neq 0$ ).

Teniendo en cuenta las dimensiones de la antena impresa que proporciona el enunciado del problema ( $L = 3 \text{ cm}$ ,  $W = 2 \text{ cm}$  y  $h = 1 \text{ mm}$ ), se concluye de la expresión anterior para la frecuencia de resonancia de los modos  $\text{TM}_{mnp}^z$  que ésta será menor cuando  $p = 0$ . En cuanto al valor de los otros subíndices modales ( $m$  y  $n$ ), como la dimensión  $L$  de la antena es mayor que  $W$ , la menor frecuencia de resonancia de la familia modal  $\text{TM}_{mnp}^z$  se tendrá para  $m = 1$  y  $n = 0$ .

Cabría preguntarse si existe algún modo  $\text{TE}_{mnp}^z$  con una frecuencia de corte menor que la del citado modo  $\text{TM}_{100}^z$ . En el caso de los modos  $\text{TE}_{mnp}^z$ , siguiendo un proceso similar al empleado en el apartado anterior, se concluye que dicha familia de modos presenta la siguiente expresión para sus componentes axiales:

$$H_z = H_0 \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{W} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi z}{h} \right) \quad \text{y} \quad E_z = 0$$

con  $H_0 = 2 H_0^+$   $m = 1, 2, \dots$   $n = 1, 2, \dots$  y  $p = 1, 2, \dots$

Se concluye pues que, como  $p > 0$  para los modos  $\text{TE}_{mnp}^z$ , la frecuencia de corte más baja de todos los modos de esta cavidad es la asociada al modo  $\text{TM}_{100}^z$ :

$$f_{\text{ant}} = f_{\text{TM}_{100}^z} = \frac{c_0}{2L\sqrt{\epsilon_r}}$$

Sustituyendo valores numéricos en la expresión anterior, se obtiene que la frecuencia de operación mas baja de la antena bajo estudio es:

$$f_{\text{ant}} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-2} \sqrt{7,72}} = 1,7995 \cdot 10^9 \text{ Hz} \simeq 1.800 \text{ MHz}$$

A esta frecuencia de trabajo, en el interior de la cavidad se tendrán unas expresiones de los campos electromagnéticos ( $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ ) que serán las correspondientes al modo  $\text{TM}_{100}^z$ . Así pues, particularizando las expresiones generales del apartado anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad \text{y} \quad H_z = 0 \\ E_x &= E_y = 0 \\ H_x &= 0 \quad \text{y} \quad H_y = j \frac{E_0 \omega_{\text{ant}} \epsilon}{k_c} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) = j \frac{E_0 \sqrt{\epsilon_r}}{\eta_0} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \end{aligned}$$

donde  $\eta_0$  es la impedancia característica del vacío ( $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120 \pi$ ).

b) Para calcular la eficiencia óhmica de la antena, según la expresión proporcionada en los datos del problema, se debe calcular la potencia disipada por la antena, que en este caso (modelo de cavidad) se atribuye a las pérdidas debidas al material conductor y dieléctrico de la antena.

En concreto, como la antena opera a la frecuencia de resonancia del modo fundamental, se deberá calcular la potencia media disipada por pérdidas en el conductor y en el dieléctrico asociadas al modo fundamental de la cavidad resonante. Así pues, se tendrá que:

$$P_d = P_{Lc} + P_{Ld}$$

donde  $P_{Lc}$  y  $P_{Ld}$  se calculan, según los datos del enunciado, utilizando las siguientes expresiones:

$$P_{Lc} = \frac{1}{2} R_s \iint_S |\vec{J}_s|^2 dS$$

$$P_{Ld} = \frac{1}{2} \omega \varepsilon'' \iiint_V |\vec{E}|^2 dV$$

En cuanto al cálculo de la potencia media disipada en el material conductor de la antena ( $P_{Lc}$ ), se debe tener en cuenta que existirán pérdidas en los dos planos conductores de la cavidad resonante ( $z = 0$  y  $z = h$ ). Así pues:

$$P_{Lc} = P_{Lc1} + P_{Lc2} = \frac{1}{2} R_s \iint_{S_{c1}} |\vec{J}_{sc1}|^2 dS + \frac{1}{2} R_s \iint_{S_{c2}} |\vec{J}_{sc2}|^2 dS$$

donde  $\vec{J}_{sc1}$  y  $\vec{J}_{sc2}$  representan, respectivamente, las corrientes superficiales en los planos  $z = 0$  y  $z = h$  de la antena. Recordando las componentes del campo magnético del modo fundamental  $\text{TM}_{100}^z$  deducidas en el apartado anterior, se obtiene en este caso que:

$$\vec{J}_{sc1} = \vec{J}_{sc2} = \hat{z} \times \vec{H}(z = 0) = -j \frac{E_0 \sqrt{\varepsilon_r}}{\eta_0} \text{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \hat{x}$$

y por tanto, la potencia disipada por pérdidas en el material conductor de la antena se obtendrá del siguiente modo:

$$P_{Lc} = P_{Lc1} + P_{Lc2} = \frac{R_s E_0^2 \varepsilon_r}{\eta_0^2} \int_{x=0}^L \int_{y=0}^W \text{sen}^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx dy = \frac{R_s E_0^2 \varepsilon_r L W}{2 \eta_0^2}$$

Para evaluar esta última expresión, resulta necesario determinar el valor de la resistencia superficial ( $R_s$ ) del material conductor de la antena (Cobre), y la amplitud del campo eléctrico en el interior de la cavidad ( $E_0$ )

De acuerdo con la expresión mostrada en los datos del enunciado, la citada resistencia superficial presenta el siguiente valor para el caso que nos ocupa:

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f_{\text{ant}} \mu_0}{\sigma_{\text{Cu}}}} = \sqrt{\frac{4 \pi^2 1,8 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7}}{5,9 \cdot 10^7}} = 0,01097 \Omega$$

Según el enunciado del problema, el modo fundamental de la cavidad se excita en  $x = 0$ ,  $y = W/2$  y  $z = h$  con un nivel de campo eléctrico máximo de  $25 \cdot 10^3$  V/m. Si se particulariza la expresión del campo eléctrico asociado al modo fundamental  $TM_{100}^z$  deducida en el apartado anterior, se obtiene que:

$$E_z(x = 0) = E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Big|_{x=0} = E_0 = 25 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

Empleando los valores recién deducidos de la resistencia superficial del material conductor y de la amplitud del campo eléctrico en la cavidad resonante, se obtiene finalmente que la potencia disipada por pérdidas en el conductor es igual a:

$$P_{Lc} = \frac{0,01097 (25 \cdot 10^3)^2 46,32 \cdot 10^{-4}}{2 (120 \pi)^2} = 0,1118 \text{ W} = 111,8 \text{ mW}$$

En cuanto al cálculo de la potencia media disipada en el material dieléctrico de la antena ( $P_{Ld}$ ), como el enunciado del problema dice que el sustrato dieléctrico no presenta pérdidas ( $\text{tg}\delta = 0$ ), se tiene que:

$$P_{Ld} = \frac{1}{2} \omega \varepsilon' \text{tg}\delta \iiint_V |\vec{E}|^2 dV = 0$$

y por tanto, la potencia disipada por la antena será  $P_d = P_{Lc} + P_{Ld} = 111,8 \text{ mW}$

Como el enunciado del problema indica que con el nivel de campo eléctrico máximo de  $25 \cdot 10^3$  V/m la antena radia una potencia de 600 mW, la eficiencia óhmica de la antena solicitada presenta el siguiente valor:

$$\eta_d = \frac{P_t}{P_t + P_d} = \frac{600}{600 + 111,8} = 0,843 = 84,3\%$$

c) El conductor interno del cable coaxial supone una ligera perturbación en la forma de la cavidad. Asumiendo, tal y como dice el enunciado, que  $2a \ll L$  y  $2a \ll W$ , se puede usar la teoría perturbacional para predecir el efecto que supone la presencia de dicho elemento metálico en las frecuencias de resonancia de los modos de una cavidad resonante. Por tanto, el parámetro de funcionamiento de la antena que se verá más afectado será el de la frecuencia de operación.

En cuanto al sentido de la perturbación de dicho parámetro, para determinarlo se hará uso de la expresión proporcionada en el enunciado para predecir la variación de la frecuencia de resonancia de los modos de una cavidad ante una pequeña perturbación en su forma. Según dicha expresión, se tiene que:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\iiint_{\delta V} (\mu |\vec{H}|^2 - \varepsilon |\vec{E}|^2) dV}{\iiint_V (\mu |\vec{H}|^2 + \varepsilon |\vec{E}|^2) dV} = -\frac{\varepsilon \iiint_{\delta V} |\vec{E}|^2 dV}{2 \varepsilon \iiint_V |\vec{E}|^2 dV}$$

En la expresión anterior, se observa que debe conocerse el valor del campo eléctrico  $\vec{E}$  en el volumen de la perturbación ( $\delta V$ ). Sustituyendo la posición de dicha perturbación ( $x = 0$  e  $y = W/2$ ) en las expresiones del modo fundamental  $\text{TM}_{100}^z$  deducidas en el apartado a2, el campo eléctrico requerido presentará las siguientes componentes:

$$E_x = 0 \quad E_y = 0 \quad \text{y} \quad E_z = E_0$$

De este modo, la teoría perturbacional predice que la frecuencia de resonancia de cualquier modo de la cavidad se desvía, respecto de su valor nominal en ausencia del conductor interno del coaxial, del siguiente modo:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\delta V}{V}$$

lo cual indica que la nueva frecuencia de operación de la antena, considerando el efecto perturbador del cable coaxial que la alimenta, disminuirá respecto del valor nominal deducido en el apartado a2.

Las dimensiones iniciales de la antena ( $L$ ,  $W$  y  $h$ ) se escogen para que la frecuencia de resonancia nominal del modo fundamental de la cavidad sea igual a la frecuencia de operación de la antena deseada. Ahora bien, como se termina de comprobar, la presencia del conductor interno del coaxial provoca una ligera disminución de la frecuencia real de operación de la antena.

Para paliar este efecto perturbador, una solución simple consistiría en escoger las dimensiones de la antena de modo que la frecuencia de resonancia del modo fundamental de la cavidad fuese ligeramente superior al valor deseado de la frecuencia de operación de la antena, y que la presencia del conductor interno del cable coaxial consiguiese compensar dicho aumento de modo que la antena operase finalmente a la frecuencia deseada. En el caso concreto que nos ocupa, se debería disminuir ligeramente (en el valor que predijera la teoría perturbacional) el valor de la longitud  $L$  de la antena impresa.

**8.3 PROBLEMA 3 (30 p)**

Se desea construir un amplificador con un transistor cuyos parámetros S, referidos a  $Z_0=50 \Omega$ , son:

$$S = \begin{pmatrix} -1.026 & 0.015 \\ 4.8102 & -1.096 \cdot j \end{pmatrix}$$

Respecto de los parámetros de ruido, el factor de ruido mínimo  $F_{\min}=3 \text{ dB}$ , siendo el coeficiente de reflexión óptimo  $\Gamma_{opt} = -0.7 - 0.1 \cdot j$  y la resistencia interna de ruido  $\bar{R}_n = 0.15$ .

El esquema del amplificador a construir es el típico, con dos redes de adaptación, una a la entrada y otra a la salida, según se muestra en la figura 3.1.

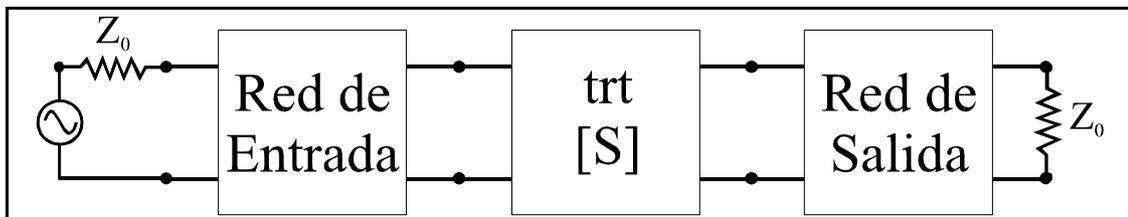


Figura 3.1.-Esquema del amplificador

En la figura 3.2 se han dibujado los círculos de estabilidad e carga y de fuente, así como diferentes círculos de ganancia de fuente ( $G_1$ ), de carga ( $G_2$ ) y de ruido, con los siguientes valores en cada caso:

G1 (dB)		G2 (dB)		F (dB)	
Círculos ordenados de mayor a menor radio	8.75	Círculos ordenados de mayor a menor radio	17.00	Círculos ordenados de menor a mayor radio	3.00
	11.76		20.00		3.42
	15.44		22.12		4.13
	17.78		24.77		5.44
	19.03		27.00		7.48
	21.76				9.14
				11.76	

Con la ayuda de la Carta de Smith de la figura 3.2, y los detalles de la misma de las figuras 3.3 y 3.4 que se adjuntan, se pide:

(6p) a) Determine cuál es la máxima ganancia teórica, sin importar si es estable o no el amplificador (considere siempre un diseño unilateral). Indique, asimismo, cuáles son las zonas

estables tanto de fuente como de carga -puede indicarlo mediante un esquema de la Carta de Smith o bien mediante texto-, y, por último, diga qué coeficientes de reflexión de fuente y de carga proporcionan dicha ganancia máxima.

(7p) b) Determine cuál es la máxima ganancia unilateral compatible con la estabilidad, y qué coeficientes de reflexión de fuente y de carga deberíamos poner. ¿Cuál es el factor de ruido en este caso?.

(7p) c) Si deseamos tener un ruido mínimo, compatible con la estabilidad, ¿cuál será el coeficiente de reflexión de fuente que deberíamos sintetizar?. Y, en este caso, ¿qué ganancia unilateral tendríamos?.

Por un error, olvidamos colocar la red de adaptación de la salida, de tal forma que el transistor queda directamente conectado a la carga  $Z_0$ .

Para este caso, se pide:

(6p) d) Determine si existe riesgo de oscilación y si se dan las condiciones de arranque del oscilador -suponiendo invariables los parámetros S del transistor- para los coeficientes de reflexión de fuente calculados en los apartados **(b)** y **(c)**.

(4p) e) Por último, si deseáramos un oscilador, ¿cuál sería el valor del coeficiente de reflexión de carga que debería ver el transistor para que tuviéramos un oscilador? -suponga siempre que los parámetros S del transistor no varían y calcule este coeficiente de reflexión de carga para los dos casos **(b)** y **(c)** anteriores: máxima ganancia estable por una lado, y mínimo ruido por otro-. Comente los resultados.

Datos:

1) Ganancia de transferencia de un cuadripolo:

$$G_T = |S_{21}|^2 \cdot \frac{(1 - |\Gamma_s|^2) \cdot (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11} \cdot \Gamma_s) \cdot (1 - S_{22} \cdot \Gamma_L) - S_{12} \cdot S_{21} \cdot \Gamma_s \cdot \Gamma_L|^2}$$

2) Coeficientes de reflexión a la entrada y a la salida de un cuadripolo:

$$\begin{cases} \Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} \cdot S_{21} \cdot \Gamma_L}{1 - S_{22} \cdot \Gamma_L} \\ \Gamma_{out} = S_{22} + \frac{S_{12} \cdot S_{21} \cdot \Gamma_s}{1 - S_{11} \cdot \Gamma_s} \end{cases}$$

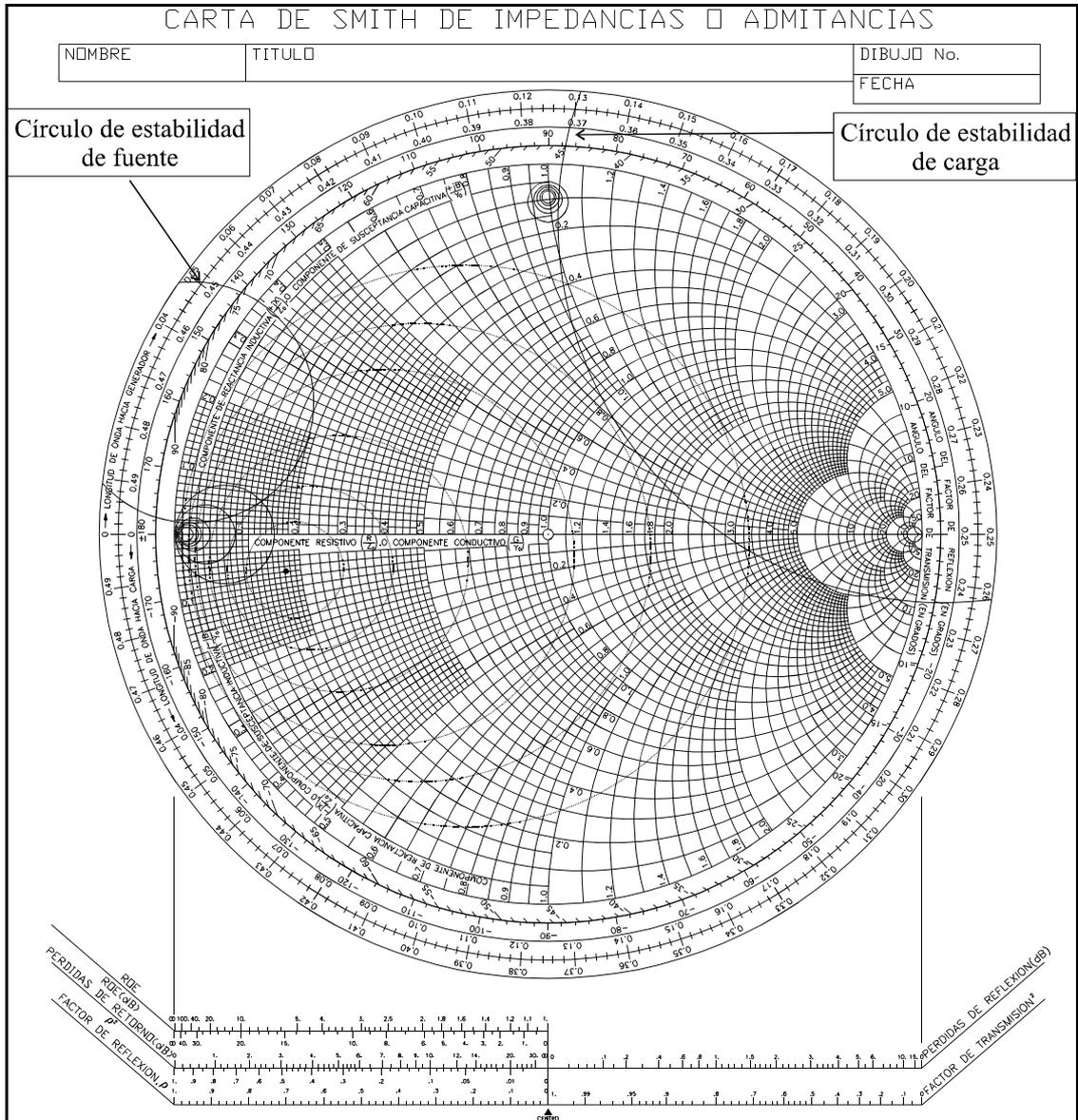


Figura 3.2.-Carta de Smith completa

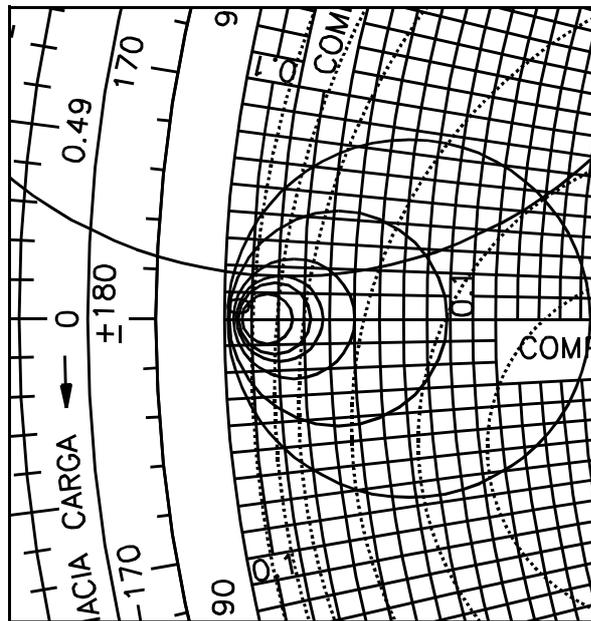


Figura 3.3.-Detalle de los círculos de ganancia G1, de ruido y del círculo de estabilidad de fuente

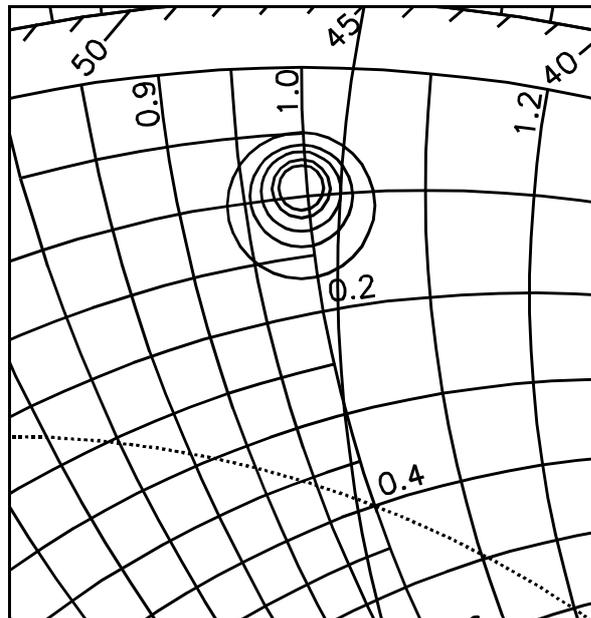


Figura 3.4.-Detalle de los círculos de ganancia G2 y del círculo de estabilidad de carga

a) A la vista de la ganancia de transferencia unilateral:

$$G_{TU} = |S_{21}|^2 \cdot \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{|1 - S_{11} \cdot \Gamma_s|^2} \cdot \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - S_{22} \cdot \Gamma_L|^2}$$

resulta evidente que, puesto que los coeficientes  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son de módulo mayor que la unidad, podemos sintetizar coeficientes de reflexión de fuente y de carga de valor  $\Gamma_s = \frac{1}{S_{11}}$  y  $\Gamma_L = \frac{1}{S_{22}}$ ,

ambos de módulo menor que la unidad, y que hacen que la ganancia sea infinita, en teoría.

Pero si comprobamos las zonas de estabilidad, veremos que son estables las zonas donde **no** se encuentre el centro de la carta de Smith, tanto en carga como en fuente. Es decir, en nuestro caso serán las zonas **interiores** de los círculos de estabilidad las zonas estables.

Si vemos dónde están situados los coeficientes de reflexión anteriores, comprobamos que están en el exterior de los círculos de estabilidad, por lo que están en zona inestable.

b) Si queremos saber la máxima ganancia unilateral compatible con la estabilidad, deberemos buscar los coeficientes de reflexión de fuente y de carga que proporcionen mayor ganancia y que estén en zona estable -interior de los círculos-.

Para ello, nos fijamos en las figuras 3.3 y 3.4, y vemos que los círculos de ganancia constante  $G_1$  y  $G_2$  van creciendo desde las posiciones  $\Gamma_s = \frac{1}{S_{11}}$  y  $\Gamma_L = \frac{1}{S_{22}}$  -que daban ganancia

infinita, pero inestabilidad-, de tal forma que vamos teniendo menor ganancia. Hay un momento en que los círculos son tangentes a los círculos de estabilidad, de tal forma que esos puntos ya son estables, y puesto que son los que nos dan mayor ganancia estable, son los puntos que estábamos buscando.

Así pues, para la fuente, tenemos que el coeficiente de reflexión y la impedancia asociadas a dicho punto tangente son:

$$\bar{Z}_s = 0.02 + j \cdot 0.015 \Rightarrow Z_s = 1 + j \cdot 0.75 \Rightarrow \Gamma_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = -0.96 + j \cdot 0.0288$$

Y para la carga:

$$\bar{Z}_L = 0.1 + j \cdot 1.025 \Rightarrow Z_s = 5 + j \cdot 51.25 \Rightarrow \Gamma_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = -0.027 + j \cdot 0.907$$

Para calcular el ruido, basta con ver la figura 3.3 y ver que por el coeficiente de reflexión de fuente pasa el círculo de ruido de valor  $F=9.14$  dB.

Respecto a la ganancia total obtenida, basta ver los valores individuales de cada uno de los términos de ganancia. Así, el término de ganancia debido al parámetro  $S_{21}$  será:

$$G_0 = |S_{21}|^2 \Rightarrow G_0(dB) = 20 \cdot \log |S_{21}| = 13.64 \text{ dB}$$

El término de ganancia debido a la fuente se obtiene leyendo la ganancia del círculo por el que pasa el coeficiente de reflexión (el 3º empezando por el más pequeño):

$$G_1 = \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{|1 - S_{11} \cdot \Gamma_s|^2} = 17.78 \text{ dB}$$

Y el término de ganancia debido a la carga se obtiene leyendo, en la figura 3.4, la ganancia del círculo correspondiente (el 3º empezando por el más pequeño):

$$G_2 = \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - S_{22} \cdot \Gamma_L|^2} = 22.12 \text{ dB}$$

Y la ganancia total será la suma de los 3 términos:

$$G_{TU} = G_1 \cdot G_0 \cdot G_2 \Rightarrow G_{TU}(dB) = G_1(dB) + G_0(dB) + G_2(dB) = 53.54 \text{ dB}$$

c) Si deseamos tener un mínimo ruido estable, el valor de la carga se dejará igual, ya que no afecta. Y para la fuente deberíamos, en primer lugar, elegir el coeficiente de reflexión óptimo, pero resulta que está en zona inestable, por lo que no se puede coger.

Si observamos la figura 3.3, vemos que los círculos de ruido constante van creciendo, y teniendo un valor cada vez mayor. Como debemos estar en zona estable, vamos creciendo en ruido hasta alcanzar un círculo que es tangente al círculo de estabilidad. Deicho punto ya podemos considerarlo estable, por lo que ese será el coeficiente de reflexión de fuente que proporciona menor ruido y es estable. El punto es:

$$\bar{Z}_s = 0.13 + j \cdot 0.06 \Rightarrow Z_s = 6.5 + j \cdot 0.3 \Rightarrow \Gamma_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = -0.76 + j \cdot 0.094$$

El valor del ruido será el que se lee en la carta, que es el del círculo de ruido constante de valor F=4.13 dB

Y la ganancia que proporciona se obtiene a partir del círculo de ganancia constante que pasa por él, y que se corresponde con el de mayor radio:

$$G_1 = \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{|1 - S_{11} \cdot \Gamma_s|^2} = 8.75 \text{ dB}$$

Y la ganancia total será la suma de los 3 términos:

$$G_{TU} = G_1 \cdot G_0 \cdot G_2 \Rightarrow G_{TU}(dB) = G_1(dB) + G_0(dB) + G_2(dB) = 44.51 \text{ dB}$$

d) Por último, si colocamos la carga  $Z_0$  directamente a la salida del transistor, tenemos un coeficiente de reflexión de carga  $\Gamma_L=0$ , por lo que el coeficiente de reflexión a la entrada del transistor será:

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} \cdot S_{21} \cdot \Gamma_L}{1 - S_{22} \cdot \Gamma_L} \Bigg|_{\Gamma_L=0} = S_{11} = -1.026 \Rightarrow Z_{in} = -0.64 \Omega$$

Por lo tanto es potencialmente inestable.

Para saber si se dan las condiciones de arranque del oscilador, debemos ver cuál es la impedancia de fuente que estamos viendo. Sabemos que la condición de arranque es que la suma de las impedancias de dispositivo y de carga sea negativa.

Por ello, para el caso de máxima ganancia:

$$Z_s = 6.5 + j \cdot 3.0 \Rightarrow \operatorname{Re}(Z_s + Z_{in}) = 5.86 > 0$$

Es decir, en este caso **no** se cumple la condición de arranque.

Por otra parte, para el caso de mínimo ruido:

$$Z_s = 1 + j \cdot 0.75 \Rightarrow \operatorname{Re}(Z_s + Z_{in}) = 0.36 > 0$$

Es decir, **tampoco** se cumple la condición de arranque

e) Para obtener un oscilador, se debe cumplir la siguiente condición:

$$\Gamma_s \cdot \Gamma_{in} = 1 = \Gamma_s \cdot \left( S_{11} + \frac{S_{12} \cdot S_{21} \cdot \Gamma_L}{1 - S_{22} \cdot \Gamma_L} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma_L = \frac{\frac{1}{\Gamma_s} - S_{11}}{S_{12} \cdot S_{21} + S_{22} \cdot \left( \frac{1}{\Gamma_s} - S_{11} \right)}$$

Por lo tanto los coeficientes de reflexión de carga posibles, para cada caso, son:

$$\Gamma_L = \begin{cases} -0.648 - j \cdot 0.582 \Big|_{\Gamma_s = -0.96 + j \cdot 0.03} ; Z_L = 3.96 - j \cdot 19.07 \\ -0.198 - j \cdot 0.983 \Big|_{\Gamma_s = -0.765 + j \cdot 0.094} ; Z_L = -0.13 - j \cdot 40.91 \end{cases}$$

Nótese que en el segundo caso **no** es posible construir una red pasiva que presente dicho coeficiente de reflexión, ya que tiene la parte real de la impedancia negativa y el módulo del coeficiente de reflexión es mayor que la unidad.