

ETSI Telecomunicación

# Antenas

Apuntes de Pak

## **Antenas**

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)  
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.  
Primer cuatrimestre de 4º curso  
Curso 2006/2007

## **Contenido**

- Referencia rápida de la asignatura
- Apuntes extensos de la asignatura
- Problemas resueltos

**Fecha de última actualización:** 24 Agosto 2007

# Antenas - Referencia Rápida

## Introducción: Parámetros de Antenas

$$d(\theta, \phi) = \frac{|\vec{E}(r, \theta, \phi)|}{|\vec{E}_{max}(r)|} = \frac{\sqrt{|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2}}{|N_{max}|}$$

$$t(\theta, \phi) = \frac{|\vec{P}(r, \theta, \phi)|}{|\vec{P}_{max}(r)|} = d^2(\theta, \phi)$$

$$P = \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{|\vec{E}|^2}{\eta} = \frac{E_\theta^2 + E_\phi^2}{\eta} \left[ \frac{W}{m^2} \right] \propto \frac{1}{r^2}$$

$$W_{rad} = \iint_S P(\theta, \phi) dS = I^2 \cdot R_{rad}$$

$$K = r^2 P \left[ \frac{W}{sr} \right] \text{cte con } r$$

$$D(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{\frac{W_{rad}}{4\pi r^2}} = D_{max} \cdot t(\theta, \phi) = D_{max} \cdot (d(\theta, \phi))^2$$

$$G(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{\frac{W_{ent}}{4\pi r^2}} = \eta \cdot D(\theta, \phi)$$

$\eta = \frac{W_{rad}}{W_{ent}}$

$$D = \frac{P_{max} \cdot 4\pi r^2}{\iint_S P(\theta, \phi) dS} = \frac{4\pi r^2}{\iint_S \frac{P(\theta, \phi)}{P_{max}} r^2 \sin\theta d\theta d\phi}$$

$$= \frac{4\pi}{\iint_S t(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi} = \frac{4\pi}{\int \Omega_{eq}}$$

$\Omega_{eq} \approx \theta_{-3dB} \cdot \theta_{-3dB}$

Polarización:  $\vec{E}_0 = \vec{E}_r + j\vec{E}_i$   
 lineal:  $\vec{E}_i \times \vec{E}_r = 0$   
 circular:  $\begin{cases} \vec{E}_r \cdot \vec{E}_i = 0 \\ |\vec{E}_r| = |\vec{E}_i| \end{cases} (\vec{E}_i \times \vec{E}_r) \cdot \vec{k}$   
 $> 0$ : derechas  
 $< 0$ : izquierdas

Impedancia:  $Z_a = R_a + jX_a$   
 M.T.P  $Z_a = Z_g^*$   
 $R_a = R_{wb} + R_r$   
 $\eta = \frac{W_{rad}}{W_{ent}} = \frac{I^2(R_r)}{I^2(R_a)} = \frac{R_r}{R_r + R_{wb}}$   
 "o si resonante"

$$A_{ef} = \frac{W_r [W]}{P_{in} [W/m^2]} \quad t_{ef} = \frac{V_{ca} [V]}{E_{in} [V/m]} = \frac{N_\theta \hat{e}_\theta + N_\phi \hat{e}_\phi}{I_0}$$

$$W_r = P_i \cdot A_{ef} = \frac{|\vec{E}_i|^2}{\eta} A_{ef}$$

$$W_r = \frac{V_{ca}^2}{4R_a} = \frac{|\vec{E}_i|^2 t_{ef}^2}{4R_a}$$

$$A_{ef} = \frac{t_{ef}^2 \eta}{4R_a}$$

Reciprocidad  $\frac{A_{ef}}{D} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$

Ecuación de tx  $W_r = \frac{W_e}{4\pi r^2} \cdot D_e \cdot A_{ef} = W_t \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 D_e D_r$

## Tema 2. Fundamentos de radiación

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} + \omega^2\mu\epsilon\vec{E} = j\omega\mu\vec{J} + \nabla(\rho/\epsilon) \\ \nabla^2 \vec{H} + \omega^2\mu\epsilon\vec{H} = -\nabla \times \vec{J} \end{array} \right.$$

ecuaciones de onda de los campos

Defino potenciales:

$$\begin{cases} \nabla\phi = \vec{E} + j\omega\vec{A} \\ \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\epsilon\phi \end{cases}$$

Condición de Lorentz

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\rho/\epsilon \\ \nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu\vec{J} \end{cases}$$

ecuaciones de onda de los potenciales

Función de Green de la ecuación de onda fuente puntual en  $\vec{r}'$

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad G(R) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi R}$

$$\begin{cases} \Phi = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' \\ \vec{A} = \frac{1}{\mu} \iiint_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dV' \end{cases}$$

Aproximación de rayos paralelos

$$G(R) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi R} \approx \frac{e^{-jk(r - \vec{r}' \cdot \hat{r})}}{4\pi r}$$

$R > 2D^2/\lambda \Rightarrow$  FASE:  $R \approx r - \vec{r}' \cdot \hat{r}$   
 MODULO:  $R \approx r$

$$\vec{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\vec{r}' \cdot \hat{r}} dV'$$

desfase de  $dV'$  respecto al origen  
 $\vec{N}$  es una TF

$$\vec{H} = -\frac{jk}{\mu} \hat{r} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = j\omega \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A}) \begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = -j\omega A_\theta \\ E_\phi = -j\omega A_\phi \end{cases}$$

Expresiones generales de los campos

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \hat{R} \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jkr}}{R^2} dV' + \frac{jk}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \left[ \rho(\vec{r}') \hat{R} - \frac{\omega\mu\epsilon}{k} \vec{J} \right] \frac{e^{-jkr}}{R} dV'$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkr}}{R^2} dV' - \frac{jk}{4\pi} \iiint_{V'} (\hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}')) \frac{e^{-jkr}}{R} dV'$$

inducidos  $\propto 1/r^2$       radiados  $\propto 1/r$

$\vec{J}$	inducidos	radiados cercanos	lejanos (aprox rayos paralelos)

$R = \lambda/2\pi \quad R = \frac{2D^2}{\lambda}$  (error fase menor a  $\pi/8$ )

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta \cos\phi \hat{x} + \cos\theta \sin\phi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}$$

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

Utilidad:

descomponer  $\vec{k} = k \hat{r}$

$$k_x = k \hat{r} \cdot \hat{x} = k \sin\theta \cos\phi$$

$$k_y = k \hat{r} \cdot \hat{y} = k \sin\theta \sin\phi$$

$$k_z = k \hat{r} \cdot \hat{z} = k \cos\theta$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

pasar  $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$  a esféricas

$$A_r = \vec{A} \cdot \hat{r}$$

$$A_\theta = \vec{A} \cdot \hat{\theta}$$

$$A_\phi = \vec{A} \cdot \hat{\phi}$$

pasar coordenadas primadas (en esféricas o cilíndricas) a esféricas

1. Expresar coordenadas primadas en f. de  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$
2. Coordenadas esféricas en f. de  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$
3. Hacer producto escalar, factorizar, y aplicar:

$$\begin{aligned} \sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \end{aligned}$$

$$\vec{N} = \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dv'$$

$$\vec{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N}$$

a esféricas

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$$

$$\begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = -j\omega A_\theta \\ E_\phi = -j\omega A_\phi \end{cases} \quad \vec{E} = \eta(\vec{H} \times \hat{r}) \quad \begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta} \\ H_\phi = +\frac{E_\theta}{\eta} \end{cases}$$

$$\vec{E} = -j\omega \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N}_{\text{transv}} = I(\phi) \cdot \vec{e}_\phi(\theta, \phi)$$

$$e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} = e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'}$$

o bien según las coordenadas primadas que intererren

ejemplo: al integrar espira en XY

$$\begin{aligned} \vec{r} &= a \cos\phi' \hat{x} + a \sin\phi' \hat{y} \\ \hat{r} \cdot \vec{r}' &= (\dots) = a \sin\theta \cos(\phi - \phi') \\ \hat{\theta}' &= -\sin\phi' \hat{x} + \cos\phi' \hat{y} \\ \hat{\phi}' \cdot \hat{\theta} &= (\dots) = \cos\theta (\sin(\phi - \phi')) \\ \hat{\phi}' \cdot \hat{\phi} &= (\dots) = \cos(\phi - \phi') \end{aligned}$$

aparece en integral de  $\vec{J}$  tendremos  $N$  en  $\hat{\theta}'$  y habrá que pasar a esféricas  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$  ANTES de integrar

$$\hat{z} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I_0 e^{jk_z z'} dz' = \hat{z} \frac{I_0}{j k_z} [e^{jk_z z'}]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

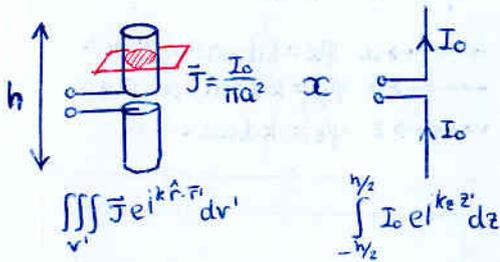
$$\frac{\sin(u)}{u} = I_0 h \hat{z} \frac{\sin(k_z \frac{h}{2})}{k_z \frac{h}{2}}$$

$$\text{con } k_z = k \cos\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \cos\theta \rightarrow \text{hallar M.V.}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega \mu}{\eta}$$

# Tema 3. Antenas Elementales

## • Dipolo elemental ( $h \ll \lambda$ )



$$\vec{N} = \hat{z} \int_{-h/2}^{h/2} I_0 e^{jkz \hat{z} \cdot \hat{r}} dz \approx \hat{z} \int_{-h/2}^{h/2} I_0 dz = I_0 h \hat{z}$$

$h \ll \lambda \Rightarrow$

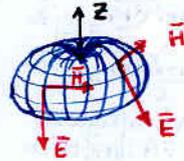
$\hat{k} \cdot \hat{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{r} \cdot \hat{r} \approx 0$   
 $e^{j\hat{k} \cdot \hat{r}} \approx 1$

$\vec{N} = I_0 h \hat{z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_r \text{ no importa} \\ N_\theta = -N_z \sin\theta \rightarrow \vec{A}_\theta = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} N_\theta \rightarrow \vec{E}_\theta = -j\omega \vec{A}_\theta \rightarrow H_\theta = \frac{E_\theta}{\eta} \\ N_\phi = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{E} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 h \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{4\pi} \frac{\omega\mu}{k} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 h \sin\theta \hat{\phi}$$



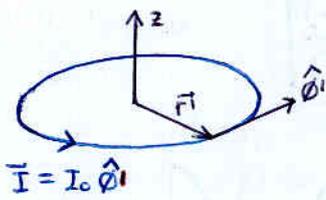
$$\vec{P} = \hat{r} \left( \frac{I_0 h}{4\pi r} \right)^2 \omega \mu k \sin^2\theta$$

$$t(\theta, \phi) = \sin^2\theta \quad D_{\max} = 1.5$$

$$d(\theta, \phi) = \sin\theta \quad \vec{e}_j = -h \sin\theta \hat{\theta}$$

$$W_{\text{rad}} = I^2 \frac{80\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{R_{\text{rad}}} \quad h = 2H \int \dots$$

## • Espira elemental ( $a \ll \lambda$ )



$$\vec{N} = \int_1 \vec{I}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dl' = \int_0^{2\pi} I_0 \hat{\phi}' e^{jk(a \sin\theta \cos(\phi - \phi'))} a d\phi'$$

$a \ll \lambda \Rightarrow$

$e^{j\hat{k} \cdot \vec{r}'} \approx 1 + j\hat{k} \cdot \vec{r}'$

se anula

$$e^x \approx 1 + x$$

Taylor

$$\vec{N} = a I_0 \left[ \int_0^{2\pi} \hat{\phi}' d\phi' + \int_0^{2\pi} \hat{\phi}' jka \sin\theta \cos(\phi - \phi') d\phi' \right]$$

separar en componentes esféricas sin primar  $\hat{\phi}' \cdot \hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}' \cdot \hat{\phi}$  y hacer las 2 integrales que quedan sumándose una se anula  $\int_0^{2\pi} \sin\omega d\omega = 0$

$\vec{N} = jka^2 I_0 \pi \sin\theta \hat{\phi}$

$$\vec{A} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} N_\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{E} = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} jk I_0 \pi a^2 \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{H} = j \frac{\omega\mu}{k} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} jk I_0 \pi a^2 \sin\theta \hat{\theta}$$



$$t(\theta, \phi) = \sin^2\theta \quad D_{\max} = 1.5$$

(para cualquier espira elemental)

$$W_{\text{rad}} = I^2 \frac{20\pi^2 (ka)^4}{R_{\text{rad}}} = \iint \frac{|E|^2}{\eta} ds$$

$$A_{\text{ej}} = D \frac{\lambda^2}{4\pi} = \frac{3\lambda^2}{8} \quad \vec{e}_j = jk\pi a^2 \sin\theta \hat{\theta}$$

## • Dipolos y espiras de formas arbitrarias

Dipolos:

$$\vec{N} = \int_1 \vec{I}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dl' \approx \int_1 \vec{I}(\vec{r}') dl'$$

Espiras:

$$\vec{N} = \int_1 \vec{I}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dl' \approx \int_1 \vec{I}(\vec{r}') dl' + jk \int_1 \vec{I}(\vec{r}') (\hat{r} \cdot \vec{r}') dl' \equiv$$

$$\vec{m} = \iint_s \vec{I} d\vec{s}$$

$$\vec{N} = jk (\vec{m} \times \vec{r})$$

otra def  $\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin\theta \hat{n}$

no olvides el signo!!!  
alternar!!!

+	-	+
$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{z}$
$m_x$	$m_y$	$m_z$
$r_x$	$r_y$	$r_z$

## • Espira con nucleo de ferrita

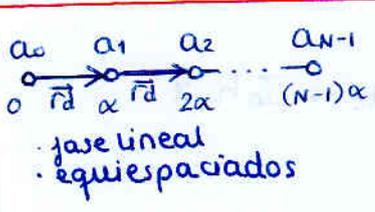
Faraday  $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$

$\int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = -j\omega\mu \iint \vec{H} \cdot d\vec{s}$

$$R_{\text{rad ferrita}} = R_{\text{rad}} \cdot \mu_r^2 \cdot N^2$$

Directividad y Area efectiva } constantes  
 $\vec{e}_j$  } aumentar  
 Rrad } aumentar

# Tema 4. Arrays



$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot FA$$

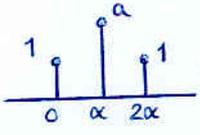
$$FA(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\psi}$$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$$

$$\psi = \vec{k} \cdot \vec{r}_d + \alpha$$

- x  $\psi_x = kd \sin \theta \cos \phi + \alpha$
- y  $\psi_y = kd \sin \theta \sin \phi + \alpha$
- z  $\psi_z = kd \cos \theta + \alpha$

## 3 antenas



$$FA(\psi) = 1 + ae^{i\psi} + e^{i2\psi}$$

$$= e^{i\psi} (e^{-i\psi} + a + e^{i\psi})$$

$$|FA(\psi)| = |a + 2 \cos \psi|$$

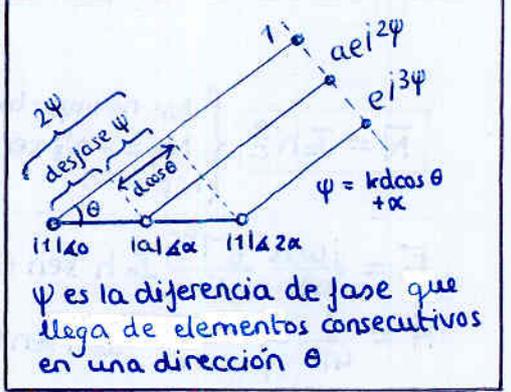
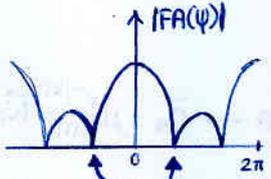
$$P(z) = 1 + az + z^2$$

$$= (z - z_0)(z - z_1)$$

$$z_0 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} = e^{i\psi_0}$$

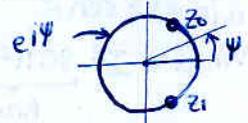
$$z_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} = e^{i\psi_1} = e^{-i\psi_0}$$

son conjugados  
i.e. FA simétrico



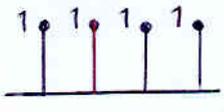
## 2 antenas

$$FA = 1 + \frac{I_2}{I_1} e^{ik_2 d}$$



## - Distribuciones de corriente

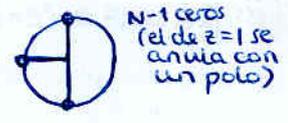
### Uniforme



$$FA(\psi) = 1 + e^{i\psi} + e^{i2\psi} + \dots$$

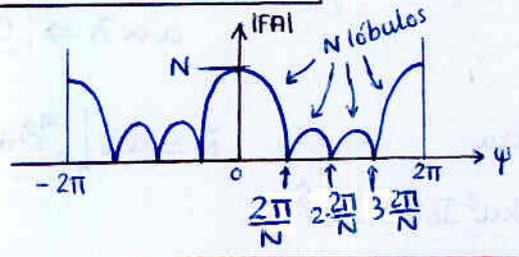
$$= (\dots) = e^{i \frac{N-1}{2} \psi} \frac{\text{sen}(N \frac{\psi}{2})}{\text{sen}(\frac{\psi}{2})}$$

$$P(z) = 1 + z + z^2 + \dots = \frac{z^N - 1}{z - 1}$$

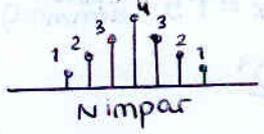


$$|FA(\psi)| = \left| \frac{\text{sen}(N \frac{\psi}{2})}{\text{sen}(\frac{\psi}{2})} \right|$$

se anula en  $n \cdot \frac{2\pi}{N}$



### Triangular

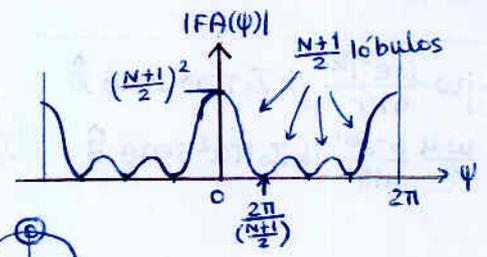


convolución de 2 rectangulares de  $\frac{N+1}{2}$  elementos

$$FA(\psi) = \left[ \frac{\text{sen} \frac{N+1}{4} \psi}{\text{sen} \frac{\psi}{2}} \right]^2$$

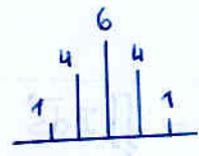
$$P(z) = \left( \frac{z^{\frac{N+1}{2}} - 1}{z - 1} \right)^2$$

son ceros dobles



### Binómica

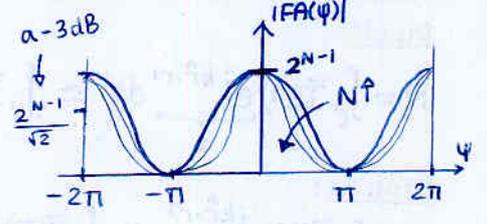
N=1	1
N=2	1 1
N=3	1 2 1
N=4	1 3 3 1
N=5	1 4 6 4 1



$$|FA(\psi)| = 2^{N-1} \cos^{N-1} \left( \frac{\psi}{2} \right)$$

$$P(z) = (z + 1)^{N-1}$$

cero múltiple



## Superposición:

$$1:4:5:4:1 = \begin{cases} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ - & & & & \\ & & & & 1 \end{cases}$$

$$FA(\psi) = 1 + 4e^{i\psi} + 6e^{i2\psi} + 4e^{i3\psi} + e^{i4\psi}$$

-  $e^{i2\psi}$  ← no restar 1, ya que el origen de fase está en el 1º elemento

$$= (1 + e^{i\psi})^4 - e^{i2\psi} = (e^{i\frac{\psi}{2}})^4 (e^{i\frac{\psi}{2}} + e^{-i\frac{\psi}{2}})^2 - e^{i2\psi}$$

$$= e^{-i2\psi} [16 \cos^4(\frac{\psi}{2}) - 1]$$

Síntesis Schelkunoff

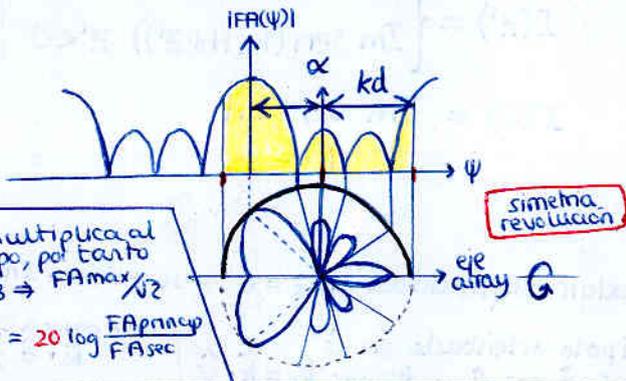
$$P(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$$

$$= a_{N-1} \prod_{n=1}^{N-1} (z - z_n)$$

↑  $e^{i\psi_n}$

# Diagrama de radiación: método gráfico

M.V.  $\psi \in [-kd + \alpha, kd + \alpha]$



FA multiplicada al campo, por tanto  $-3dB \rightarrow FA_{max}/\sqrt{2}$   
 NLPS =  $20 \log \frac{FA_{main}}{FA_{sec}}$

simetra revolución

Hallar ángulo correspondiente a algun valor del FA(ψ) (ej: nulo)

simplemente igualar:

ej: array eje z

$$\psi_0 = kd \cos \theta_0 + \alpha \rightsquigarrow \theta_0$$

ej: array eje x en plano XZ (θ=0)

$$\psi_0 = kd \sin \theta_0 + \alpha \rightsquigarrow \theta_0$$

ej  $\frac{2\pi}{N}$  (primer nulo tip.)

## Lóbulos difracción

M.V. tan ancho que abarca nuevas lóbulos principales Evitarlos:  $\frac{k \cdot d}{d} < \frac{2\pi}{\lambda}$

- aumentar N: más lóbulos y más estrechos
- aumentar d: más lóbulos y más estrechos
- desfase progresivo α: apuntamiento

$$e_{fmax} = \frac{N_{max}}{I_{in}} = \frac{N_0 \cdot F_{AM}}{I_{in}}$$

## Directividad

ignorando diagrama elemento

o hacer

$$D_m = \frac{P_{max}}{W_{rad} / 4\pi r^2}$$

$$P^2 = \frac{|E_0|^2 |FA|^2}{Z}$$

$$W_{rad} = I^2 \cdot R_{rad}$$

Re(Zrad)

$$D_{max} = \frac{2kd}{\int_{-kd+\alpha}^{kd+\alpha} \frac{|FA(\psi)|^2}{FA_{max}^2} d\psi}$$

## Broadside

α = 0

si N ↑

$$\Delta\theta_{-3dB} = \frac{2\lambda}{dN} \quad \Delta\theta_{-3dB} = 0.88 \frac{\lambda}{dN}$$

## Endfire

α = ± kd

si N ↑

$$\Delta\theta_{-3dB} = \sqrt{\frac{2\lambda}{dN}} \quad \Delta\theta_{-3dB} = 2.1 \sqrt{0.88 \frac{\lambda}{dN}}$$

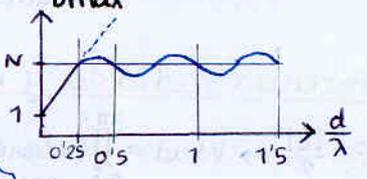
## Broadside: uniforme

$$D \approx 2 \frac{N \cdot d}{\lambda}$$



## Endfire: uniforme

$$D \approx 4 \frac{N \cdot d}{\lambda}$$



mayor que la broadside

• si α = 0 (Broadside)  
 $d = n \cdot \frac{\lambda}{2}$   
 M.V.  $[-\pi, \pi]$

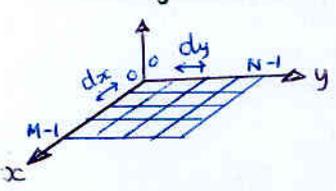
$$D_{max} = \frac{(\sum a_n)^2}{\sum |a_n|^2} = N$$

uniforme

• si distribución uniforme

$$D_{max} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(N-n)}{nk d} 2 \cos(n\alpha) \sin(nkd)}$$

## Arrays planos



$$\vec{r}_{mn} = m d_x \hat{x} + n d_y \hat{y}$$

$$I_{mn} = a_{mn} e^{j\gamma_{mn}}$$

$$a_{mn} = a_m \cdot a_n$$

$$\gamma_{mn} = m\alpha + n\beta$$

$$FA(\psi) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} I_{mn} e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}_{mn}}$$

$$= \sum \sum a_{mn} e^{jm\psi_x} e^{jn\psi_y}$$

$$FA = FA_x(\psi_x) \cdot FA_y(\psi_y)$$

$$\psi_x = k d_x \sin \theta \cos \phi + \alpha$$

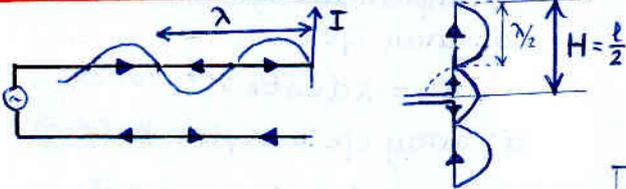
$$\psi_y = k d_y \sin \theta \sin \phi + \beta$$

## Apuntamiento:

$$\begin{cases} \psi_x = 0 \rightarrow \sin \theta \cos \phi_m = -\alpha / k d_x & (1) \\ \psi_y = 0 \rightarrow \sin \theta \sin \phi_m = -\beta / k d_y & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_m \\ \phi_m \end{cases}$$

# Tema 5. Radiación de dipolos

## Distribución de corriente



$$I(z') = \begin{cases} I_m \sin(k(H-z')) & z' > 0 \\ I_m \sin(k(H+z')) & z' < 0 \end{cases}$$

$$I(0) = I_m \sin kH$$

para alimentación asimétrica

usar  $I(z')$  pero con  $I_{m1}, H_1$  /  $I_{m2}, H_2$

· exigir continuidad en  $z=0 \rightarrow$  se obtienen  $I_{m1}, I_{m2}$

Vector de radiación  $\vec{N} = \hat{z} \int_{-H}^H I(z') e^{ik_z z'} dz'$

$$\vec{N} = \hat{z} 2k I_m \left( \frac{\cos k_z H - \cos kH}{k^2 - k_z^2} \right)$$

(para dipolo orientado en  $\hat{u}$  cambiar  $\hat{z}$  por  $\hat{u}$  y  $k_z$  por  $k_r = k \cdot \hat{u}$ ) luego pasar a esfericas  $\vec{N} \cdot \hat{\theta}$  y  $\vec{N} \cdot \hat{\phi}$

## Campo radiado (dipolo orientado en z)

$$\vec{E} = j \frac{\omega \mu_0}{4\pi r} e^{-jkr} I_m \frac{\cos k_z H - \cos kH}{\sin \theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{E} = (-j\omega) \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{-jkr} \cdot (-2k I_m \frac{\cos k_z H - \cos kH}{k^2 - k_z^2} \cdot \sin \theta)$$

$k^2(1 - \cos^2 \theta) \rightarrow k_z^2$   
 $k^2 \sin^2 \theta$

Los planos E y H cambian cuando los lóbulos secundarios se convierten en principales, tb hay saltos bruscos en  $D_{max}$

## Longitud efectiva

$$\vec{l}_{ef} = \frac{N_{\theta} \hat{\theta} + N_{\phi} \hat{\phi}}{I(0)}$$

$$\vec{l}_{ef} = -2 \frac{\cos(kH \cos \theta) - \cos(kH)}{k \sin kH \sin \theta}$$

$\theta = \pi/2$  en los casos prácticos

$$l_{ef} = l_{efmax} \cdot d(\theta)$$

$$l_{ef} = \frac{\hat{z}}{I(0)} \int I(z') e^{ik_z z'} dz'$$

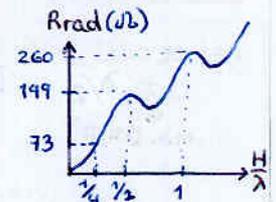
ignorando componente  $\hat{\phi}$  tras integrar  
1 en la dirección del máximo

$$l_{efmax} = \frac{1}{I(0)} \int I(z') dz' = -\frac{\lambda}{\pi} \frac{1 - \cos kH}{\sin kH}$$

$$l_{ef} = l_{efmax} \cdot d(\theta)$$



$$kH = 2\pi \frac{H}{\lambda}$$



## Potencia radiada y resistencia de radiación

$$P = \frac{|E|^2}{\eta} \rightarrow W_{rad} = \int \int P r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$W_{rad} = I_m^2 \cdot \frac{\eta}{2\pi} \int_0^\pi \frac{[\cos(kH \cos \theta) - \cos kH]^2}{\sin^3 \theta} d\theta$$

Arad

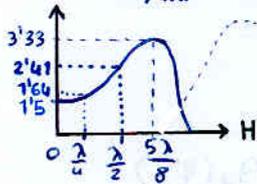
## Directividad

tomamos  $P_{max}$  en  $\theta = \pi/2$  (será válido hasta que el lóbulo secundario supere al principal)

$$D_{max} = \frac{P_{max}}{W_{rad}/4\pi r^2}$$

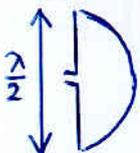
$$R_{in} = \frac{I_m^2}{I(0)^2} R_{rad} = \frac{R_{rad}}{\sin^2 kH}$$

- $W_{rad} = I_m^2 \cdot R_{rad}$   
Arad independiente de alimentación solo depende de la distribución de corrientes, como los campos
- $W_{rad} = I(0)^2 \cdot R_{in}$   
Rin depende del punto de alimentación



No calcular  $W_{rad}$  integrando si sabemos Arad

## Dipolo resonante $H = \lambda/4$



$$R_{rad} = R_{in} = 73 \Omega$$

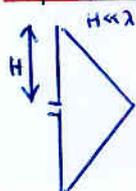
$$l_{efmax} = \frac{\lambda}{\pi}$$

$$l_{ef}(\theta) = l_{efmax} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}$$

$$D_{max} = 1.64$$

$$D(\theta) = D_{max} \cdot \left[ \frac{d(\theta)}{l_{ef}(\theta)} \right]^2$$

## Dipolo corto



$$\vec{N} \approx I_0 H \hat{z} = I_0 \frac{l}{2} \hat{z}$$

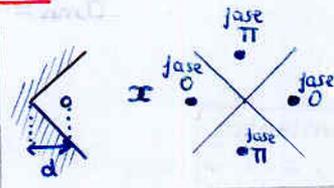
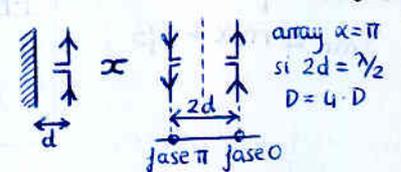
$\vec{E}$ : la mitad del elemental

$$D_{max} = 1.5$$

$$l_{efmax} = H = \frac{l}{2}$$

$$R_{rad} = 20\pi^2 \left( \frac{2H}{\lambda} \right)^2$$

## Teoría de las imágenes



## Monopolo



Corriente	I	I
Tensión	V	2V
Potencia	W	2W
Arad	$Z/2$	Z
Directividad	2D	D
long. efectiva	$l/2$	l

$$W = I \cdot V$$

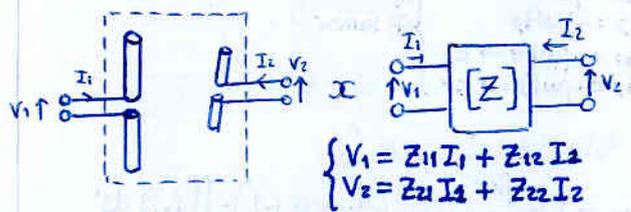
$$2V = Z \cdot R_{dip}$$

$$V = I \cdot R_{mon}$$

**Tema 6. Interacción entre antenas. Impedancias**

Teorema reciprocidad

$$\iiint_{V_a} \vec{E}_b \cdot \vec{J}_a dV_a = \iiint_{V_b} \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b dV_b$$



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

$$Z_{ab} = \frac{V_a}{I_b} \Big|_{I_k=0}$$

- $Z_{12} = Z_{21}$
- diagrama tx = rx
- $Z_{in tx} = Z_{in rx}$

$$V_{ca} = - \frac{1}{I_0} \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{E}_i(\vec{r}') dV'$$

↑  
corriente en la antena cuando transmite

↖  
campo eléctrico incidente

Potencia recibida si el receptor está adaptado a Rin

$$W = \frac{|V_{ca}|^2}{4 R_r}$$

Onda Plana incidente:



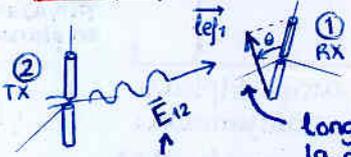
$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$V_{ca} = - \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_j(\theta)$$

visto desde detrás de la onda plana incidente



Campo producido por otra antena



campo creado por 2 en 1 con el origen cómodamente en 2

long. efectiva de 1 en la dirección incidente calculada con el origen cómodamente en 1

$$V_{ca} = - \vec{E}_{12} \cdot \vec{e}_j^*(\theta)$$

por eso se conjugan  
 $\hat{\theta} = \hat{\theta}'$   
 $\hat{\phi} = -\hat{\phi}'$

$$\vec{E}_{12} = -j \omega \frac{\mu_0 e^{jkr}}{4\pi r} \left( \vec{J}_2(0) \cdot \vec{e}_j \right) \frac{1}{N_0 \hat{\theta} + N_0 \hat{\theta}'}$$

$\vec{A}_{transv.}$

Desacoplo de polarización

$$W_r = C_p \cdot W_{acoplo}$$

$\hat{p}$ : vector de la polarización normalizado  $\equiv \vec{e}_j$  normalizado

suponiendo  $\vec{e}_j \parallel \vec{E}_i$   
calculado cómodamente con el origen en cada antena

$$C_p = \begin{cases} |\hat{E}_0 \cdot \hat{p}_{RX}|^2 & \text{para onda plana} \\ |\hat{p}_{TX} \cdot \hat{p}_{RX}^*|^2 & \text{para 2 antenas} \end{cases} = \frac{|\hat{p}_{TX} \cdot \hat{p}_{RX}^*|^2}{|\hat{e}_j|^2 |\hat{e}_j|^2}$$

Impedancia

Impedancia entrada

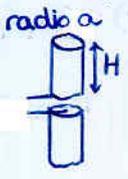
$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1}$$

Impedancia mutua

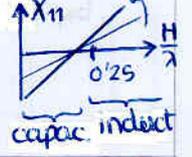
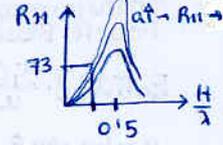


$$Z_{21} \xrightarrow{d \rightarrow 0} Z_{11}$$

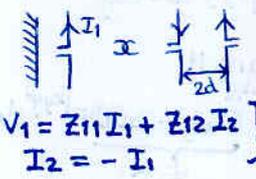
Autoimpedancia Z11



$$Z_{11} = R_{11}(H, a) + j X_{11}(H, a)$$

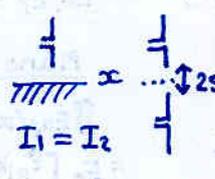


Impedancia junto a planos conductores

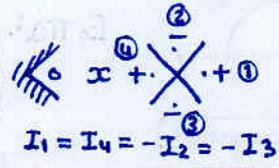


$$Z_{in} = Z_{11} - Z_{12}(2d)$$

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ I_2 = -I_1 \end{cases} \rightarrow Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$$



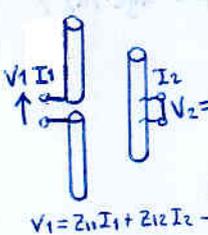
$$Z_{in} = Z_{11} + Z_{12}(2d)$$



$$Z_{in} = Z_{11} + Z_{14}(2d) - 2 \cdot Z_{12}(d\sqrt{2})$$

Yagi Uda

Array endfire donde relación corrientes se controla con impedancias mutuas

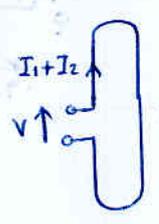


$$\begin{cases} V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \\ V_2 = 0 \end{cases}$$

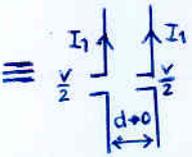
$$I_2 = - \frac{Z_{12}}{Z_{22}} I_1$$

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$$

Dipolo doblado



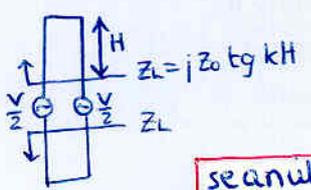
modo antena



$$\left[ \frac{V}{Z_{12}} \rightarrow Z_{11} \right] \rightarrow I_1 = \frac{V}{4 Z_{11}}$$

suma del campo de 2dipolos  
Ddoblado = Ddipolo  
 $\vec{e}_j \text{ doblado} = 2 \vec{e}_j \text{ dipolo}$

modo l. de tx



$$I_2 = \frac{V}{2j Z_0 \tan kh}$$

se anula para  $H = \lambda/4$  ( $Z_L = \infty$ )

$$Z_{in} = 4Z_{11} // 2j Z_0 \tan kh = 4Z_{11} = 300 \Omega$$

$H = \lambda/4$

# Tema 7. Antenas de apertura

## Aperturas planas



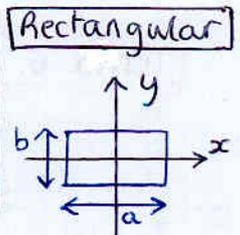
$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_a \rightarrow \vec{N} = \iint \vec{J}_s e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} ds \rightarrow \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi r} \vec{N} \rightarrow \begin{cases} E_\theta = -j\omega A_\theta \\ E_\phi = -j\omega A_\phi \end{cases}$$

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_a \rightarrow \vec{L} = \iint \vec{M}_s e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} ds \rightarrow \vec{F} = \frac{\epsilon}{4\pi r} \vec{L} \rightarrow \begin{cases} H_\theta = -j\omega F_\theta \rightarrow E_\phi \\ H_\phi = -j\omega F_\phi \rightarrow E_\theta \end{cases}$$

Sumar

$$E_\theta = -j\omega \frac{1}{4\pi r} (\eta N_\theta + L_\theta)$$

$$E_\phi = -j\omega \frac{1}{4\pi r} (\eta N_\phi + L_\phi)$$



## Polarización en $\hat{z}$

si es difícil, sustituir plano E o H (kx, ky) antes de resolver la integral

$$E_\theta = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \cos\theta \left( \frac{r}{z_0} \cos\theta + 1 \right) \iint_{S'} E(x', y') e^{ik_x x'} e^{ik_y y'} dx' dy'$$

$$E_\phi = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \sin\theta \left( \frac{r}{z_0} \cos\theta \right) \iint_{S'} E(x', y') e^{ik_x x'} e^{ik_y y'} dx' dy'$$

## Polarización en $\hat{y}$

$$E_\theta = j \frac{e^{-jkr}}{r} \sin\theta \left( \frac{r}{z_0} \cos\theta + 1 \right) \iint_{S'} (\dots) ds'$$

$$E_\phi = +j \frac{e^{-jkr}}{r} \cos\theta \left( \frac{r}{z_0} + \cos\theta \right) \iint_{S'} (\dots) ds'$$

apertura elemental si multiplicamos por  $\Delta x \Delta y \ll \lambda^2$   
 si  $\eta \approx z_0$   $|E|^2 \propto (1 + \cos\theta)^2$

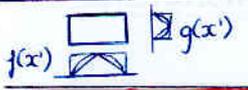
si  $E_x(x', y') = E_0 f(x') g(y')$  el término queda

$$E_0 \cdot F(k_x, a) \cdot G(k_y, b)$$

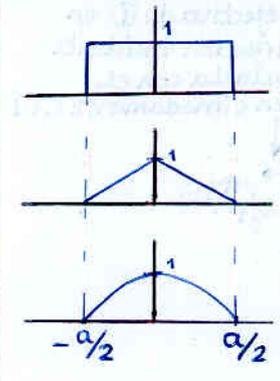
$F(0, a) \equiv \text{cte en plano H}$   $G(0, b) \equiv \text{cte en plano E}$   
 $\eta = \pi/2$   $\theta = 0$

$$W_{rad} = \frac{E_0^2}{\eta} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} |f(x)|^2 dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} |g(y)|^2 dy'$$

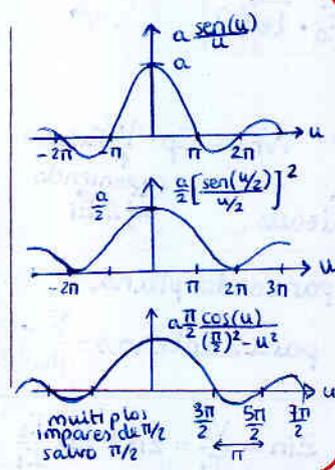
$$|E|_{max} = \frac{1}{2\lambda r} \left( \frac{r}{z_0} + 1 \right) \iint_{k_x=0, k_y=0} E_{ap}(x', y') dx' dy'$$



## Distribuciones de campo típicas



Transformada:	$\eta_{ilx}$
$a \cdot \frac{\text{sen}(kx a/2)}{kx a/2}$	1
$\frac{a}{2} \left[ \frac{\text{sen}(kx a/4)}{kx a/4} \right]^2$	0.75
$a \cdot \frac{\pi \cos(kx a/2)}{(\frac{\pi}{2})^2 - (kx a/2)^2}$	$\frac{8}{\pi^2}$



### Directividad

$$D_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \text{Area} \cdot \eta_{il}$$

$$= \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{(\iint E_{ap} ds)^2}{\iint |E_{ap}|^2 ds}$$

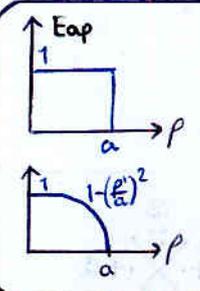
caso rectangular  $\eta_{il}$

$$D_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab \eta_{ilx} \eta_{ily}$$

$\eta_{ilx} = \frac{(\int_{-a/2}^{a/2} |f(s)|^2 ds)^2}{\int_{-a/2}^{a/2} |f(s)|^2 ds}$  tabla o fórmula normalizada  $s = x'/a$

## Circulares

caso  $E_{ap}(\rho', \theta') = E_{ap}(\rho') \Rightarrow E_\theta, E_\phi \propto \int_0^{2\pi} \int_0^a E_{ap}(\rho') e^{ik\rho' \text{sen}\theta \cos(\theta - \theta')} \rho' d\rho' d\theta'$  TF-B



Transformada Fourier Bessel

$$E_0 \pi a^2 \cdot 2 \cdot \frac{J_1(u)}{u}$$

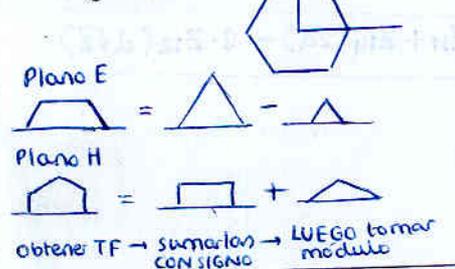
$$u = ka \text{sen}\theta$$

$$E_0 \pi a^2 \cdot 8 \cdot \frac{J_2(u)}{u^2}$$

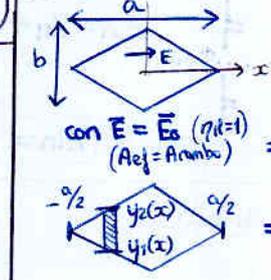
$$D_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \pi a^2 \eta_{il} \rightarrow \eta_{il} = \frac{(2\pi)^2 \int_0^a \int_0^{2\pi} [1 - (\frac{\rho'}{a})^2] \rho' d\rho' d\theta'}{\pi a^2 \int_0^a \int_0^{2\pi} [1 - (\frac{\rho'}{a})^2]^2 \rho' d\rho' d\theta'}$$

en este caso

## Hexagonal



## Romboidal



$$E_\theta, E_\phi \propto \iint E_{ap}(x', y') e^{ik_x x'} e^{ik_y y'} dx' dy'$$

Plano E  $\theta = 0, k_y = 0$

$$\iint E_{ap}(x', y') e^{ik_x x'} dx' dy' = E_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ik_x x'} \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy' \right] dx'$$

$$= E_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (y_2(x) - y_1(x)) e^{ik_x x'} dx'$$

TF de una rectangular conocida

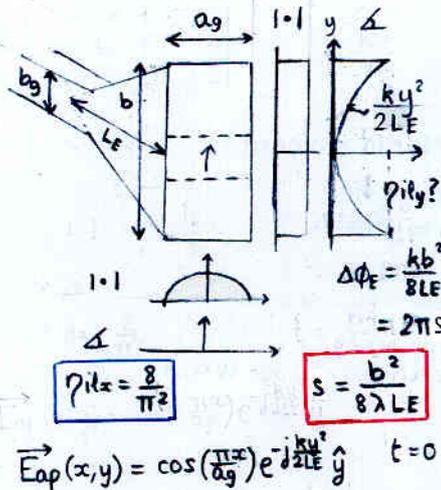
Plano H

$$E_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x_2(y) - x_1(y)) e^{ik_y y'} dy'$$

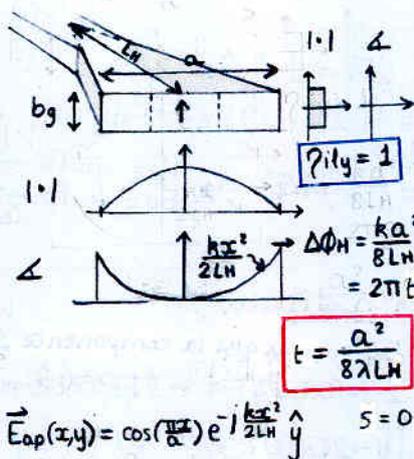
$$= 2 E_0 \frac{a}{2} \frac{b}{2} \left( \frac{\text{sen}(k_y b/4)}{k_y (b/4)} \right)^2$$

Bocinas rectangulares

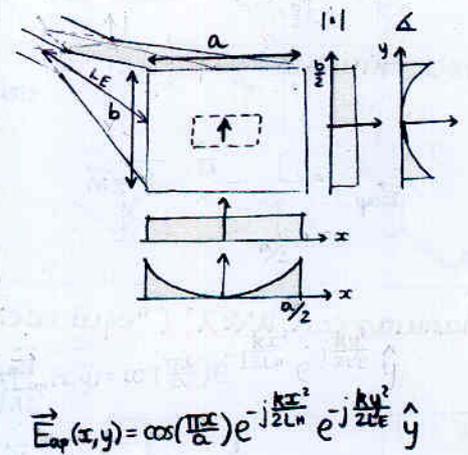
Plano E:



Plano H:



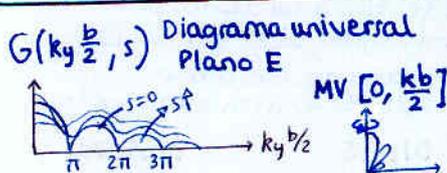
Piramidal



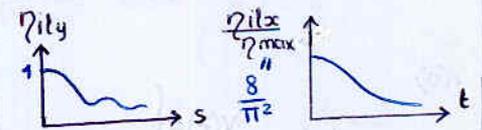
$$\iint E_{ap}(x', y') e^{j k_x x'} e^{j k_y y'} dx' dy' = F(k_x \frac{a}{2}, t) \cdot G(k_y \frac{b}{2}, s)$$

f(x, t) = cos(pi\*x/a) \* e^(-j\*2\*pi\*t\*x^2)  
 g(x, t) = e^(-j\*2\*pi\*s\*y^2)

f define al plano H en bocina plano E, t=0  
 g define al plano E en bocina plano H s=0  
 F es la TF del coseno  
 G es la TF de la uniforme (i.e. sinc)



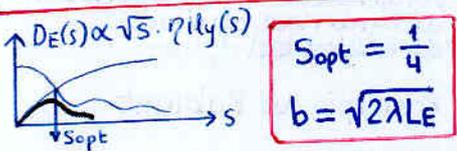
$$D_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab \eta_{ix} \eta_{iy}$$



$$D_{max}(s) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a_g \cdot \frac{\sqrt{s} \cdot 8\lambda L_E}{b} \cdot \left(\frac{8}{\pi^2}\right) \eta_{ix}(s)$$

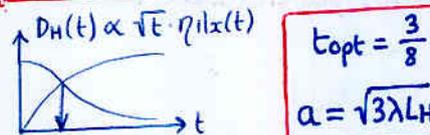
$$D_{max}(t) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{\sqrt{t} \cdot 8\lambda L_H}{a} \cdot b_g \cdot \eta_{ix}(t) \cdot \eta_{iy}$$

$$D_{pir} = \frac{\pi}{32} \left(\frac{\lambda}{a_g} D_E\right) \left(\frac{\lambda}{b_g} D_H\right)$$



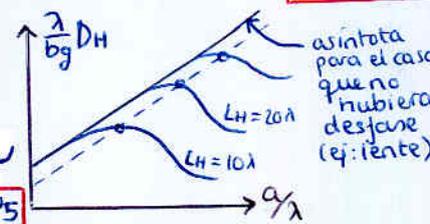
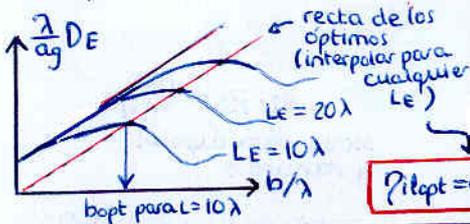
$$s_{opt} = \frac{1}{4}$$

$$b = \sqrt{2\lambda L_E}$$

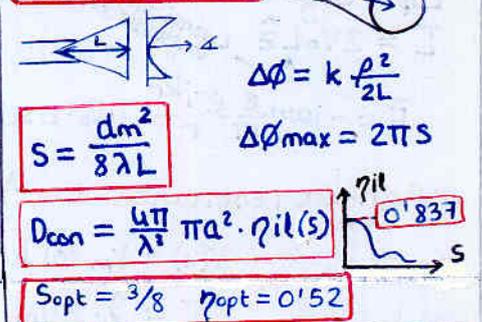


$$t_{opt} = \frac{3}{8}$$

$$a = \sqrt{3\lambda L_H}$$



Bocinas cónicas



$$\Delta\phi = k \frac{d^2}{2L}$$

$$\Delta\phi_{max} = 2\pi s$$

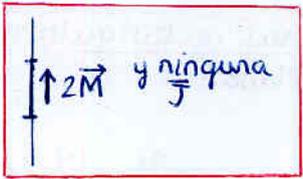
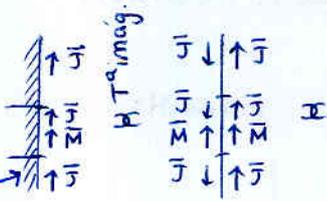
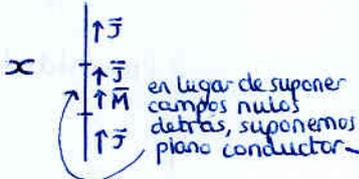
$$s = \frac{d^2}{8\lambda L}$$

$$D_{con} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \pi a^2 \cdot \eta_{ill}(s)$$

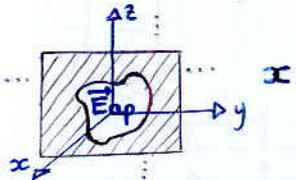
$$s_{opt} = 3/8 \quad \eta_{opt} = 0.52$$

# Tema 9. Ranuras

Pueden haber corrientes en el metal y por tanto  $\vec{H}$



## Procedimiento general:

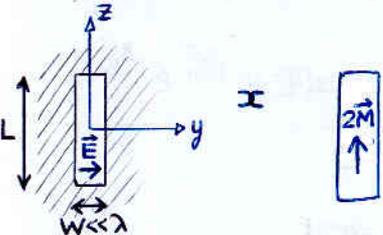


siendo  $2\vec{M} = 2 \cdot (-\hat{n} \times \vec{E}_{ap})$

$$\vec{L} = \iint_S 2\vec{M} e^{iky'} e^{jk_z z'} dy' dz' \quad (\text{TF bidimensional})$$

$$\vec{F} = \frac{\epsilon}{4\pi r} e^{-jkr} \vec{L} \rightarrow \begin{cases} H_\theta = -j\omega F_\theta \rightarrow E_\phi = -\eta H_\theta \\ H_\phi = -j\omega F_\phi \rightarrow E_\theta = \eta H_\phi \end{cases}$$

## Ranuras con $W \ll \lambda$ ("equivalentes" a dipolos)



la componente  $\hat{x}$  se anula por ser  $W \ll \lambda$

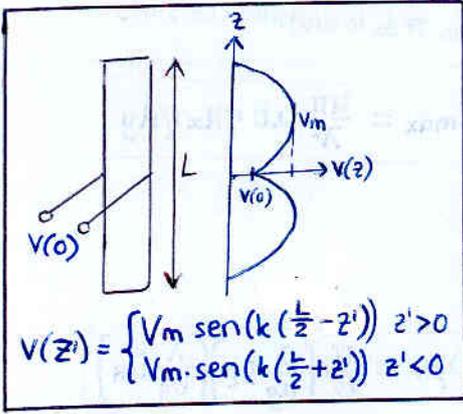
$$\vec{E}_{ap} = E_{ap} \hat{y} = E_0 f(z) \hat{y}$$

$$2\vec{M} = 2 \cdot (-\hat{n} \times E_{ap} \hat{y}) = -2E_0 f(z) \hat{z}$$

$$\vec{L} = \iint_S -2E_0 f(z) \hat{z} e^{ik_z z'} e^{jky' y'} dy' dz'$$

$e^{jky' y'} = 1$  por ser  $W \ll \lambda$

Recuerda: Potencial  $V_0 = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -W \cdot E$



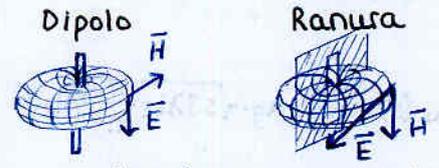
$$\vec{L} = \hat{z} \int_{-L/2}^{L/2} 2(-W \cdot E_0) f(z') e^{jk_z z'} dz'$$

$$\vec{L} = \hat{z} \int_{-L/2}^{L/2} 2 \cdot V(z') e^{jk_z z'} dz'$$

$$\vec{F} = \frac{\epsilon}{4\pi r} e^{-jkr} L_z \hat{z}$$

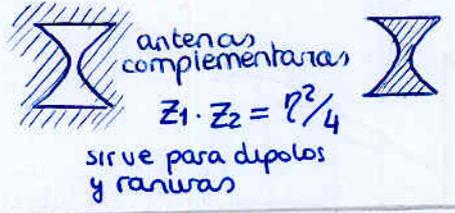
$$\begin{cases} H_\theta = -j\omega F_\theta = j\omega F_z \sin\theta \\ E_\phi = -\eta H_\theta = -j\omega \eta F_z \sin\theta \end{cases}$$

Idéntico a un dipolo pero cambiando  $I(z')$  por  $2V(z')$   
Las ranuras son como un hilo de corriente magnética



- polarizaciones ortogonales
- diagramas iguales
- directividad igual

### Principio de Babinet



### • Ranura elemental

$$\vec{E}_{ap} = E_0 \hat{y}$$

$$\vec{L} = 2V_0 L \hat{z}$$

$L$ : longitud, no confundir con  $L$

$$\vec{E} = -j\omega \eta \frac{\epsilon}{4\pi r} e^{-jkr} \cdot 2 \cdot V_0 \cdot L \sin\theta \hat{\theta}$$

### • Ranura resonante $L = \lambda/2$

$$V(z) = V_m \cos kz$$

$$\vec{L} = \hat{z} \cdot 2V_m \cdot 2 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin^2\theta \cdot k}$$

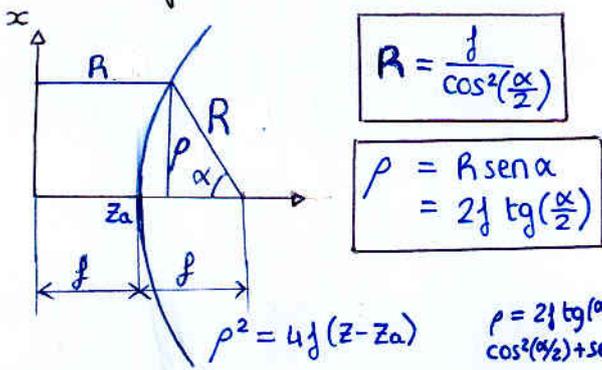
$$\vec{E} = -j \frac{V_m}{\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} \hat{\theta}$$

Nota: Por si sale ranura en una guía donde el campo tiene fase  $e^{-j\beta z}$   
La TF de una cte con fase lineal es una sinc desplazada

$$\int_{-L/2}^{L/2} 2E_0 e^{-j\beta z} e^{jk_z z'} dz' = 2E_0 L \frac{\text{sen}[(k_z - \beta) \frac{L}{2}]}{(k_z - \beta) \frac{L}{2}}$$

# Tema 10. Reflectores

## Análisis geométrico



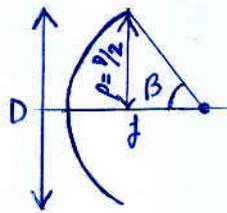
$$R = \frac{f}{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\rho = R \sin \alpha = 2f \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})$$

$$\rho^2 = 4f(z - z_a)$$

$$\frac{\rho}{\cos^2(\alpha/2)} + \sin^2(\alpha/2) = 1 \implies \cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\rho/2f)^2}}$$

Para el ángulo máximo:

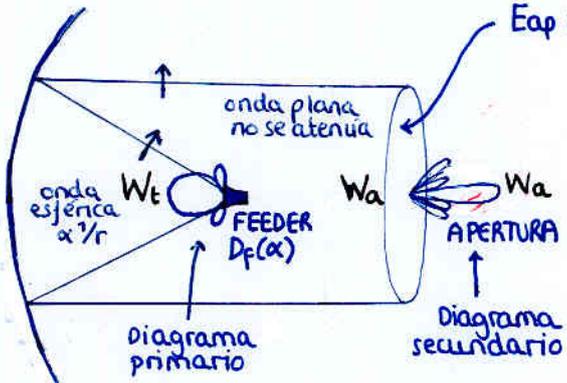


$$\alpha = \beta$$

$$\rho = D/2$$

$$\frac{f}{D} = \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2(\beta/2)}$$

## Análisis electromagnético



- misma fase en todos los puntos
- módulo depende de

- camino que recorrió atenuándose como esférica
- ponderación a causa de  $D_f(\alpha)$

$$D_f(\alpha) = \frac{P_i(\alpha)}{W_t / 4\pi r^2} \implies P_i(\alpha) = \frac{D_f(\alpha) \cdot W_t}{4\pi r^2}$$

$$P_i(\alpha) = \frac{|E_i(\alpha)|^2}{\eta}$$

$$\implies |E_i(r=R)| = |E_{ap}| = \frac{\sqrt{D_f(\alpha) \cdot W_t \cdot \eta}}{\sqrt{4\pi} \cdot R(\alpha)} = E_0 \cdot \frac{\sqrt{D_f(\alpha)}}{R(\alpha)}$$

Directividad (del reflector "total")

$$D_{\text{reflector}} = \frac{P_{\text{max}}}{W_t / 4\pi r^2} = \frac{P_{\text{max}}}{W_a / 4\pi r^2} \cdot \frac{W_a}{W_t}$$

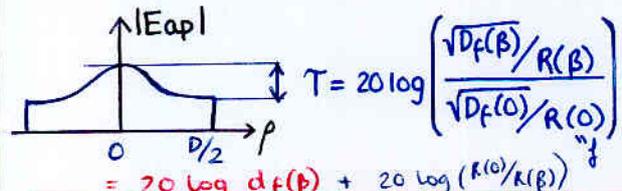
Directividad de la apertura

$$= \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \eta_{il}$$

$$\eta_{il} = \frac{1}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\iint E_{ap} ds\right)^2}{\iint |E_{ap}|^2 ds}$$

siendo  $E_{ap} = E_0 \frac{\sqrt{D_f(\alpha)}}{R(\alpha)}$

eficiencia de desbordamiento (spillover)  $\eta_s$



$$T = 20 \log \left( \frac{\sqrt{D_f(\beta)}/R(\beta)}{\sqrt{D_f(0)}/R(0)} \right)$$

$$= 20 \log d_f(\beta) + 20 \log (R(0)/R(\beta))$$

$$T = 10 \log t_f(\beta) + 20 \log 1/R(\beta) < 0$$

$$= 10 \log t_f(\beta) + 40 \log \cos(\beta/2)$$

$$= T_{\text{DIAGRAMA}} + T_{\text{CAMINOS}}$$

$$\eta_s = \frac{W_a}{W_t} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\beta P(\alpha) d\alpha d\beta}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P(\alpha) d\alpha d\beta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\beta D_f(\alpha) d\alpha d\beta}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi D_f(\alpha) d\alpha d\beta} \cdot 4\pi$$

$$\eta_s = \frac{1}{2} \int_0^\beta D_f(\alpha) \sin \alpha d\alpha$$

Por tanto

$$D_{\text{reflector}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \eta_{il} \cdot \eta_s$$

$$\eta_{\text{tot}} = \eta_{il} \cdot \eta_s$$

$$\eta_{\text{tot}} = \cot^2(\frac{\beta}{2}) \left( \int_0^\beta \sqrt{D_f(\alpha)} \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2}) d\alpha \right)^2$$

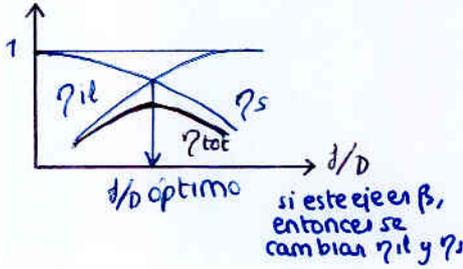
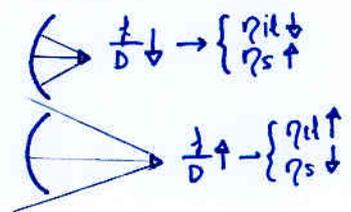
¡No olvidar  $D_{f\text{max}}$  si sólo te dan  $t_f(\alpha)$ !

$$D_{f\text{max}} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi t_f(\alpha) \sin \alpha d\alpha d\beta}$$

↑ típico  $\cos^n \alpha$   
↑  $\cos^n \frac{\alpha}{2}$

## Relación foco a diámetro óptima

Para un mismo alimentador



Handwritten notes at the top of the page, possibly including a title or date.



$$\frac{1}{(2a) + h} = \dots$$

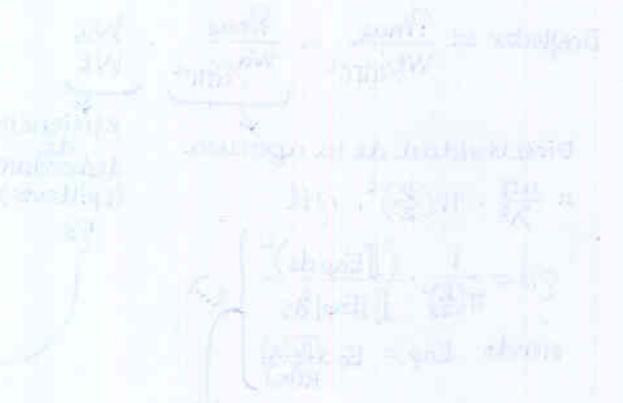
Handwritten text below the diagram on the right.

Handwritten text on the left side, possibly describing a process or method.

$$\frac{1}{(2a) + h} = \dots$$



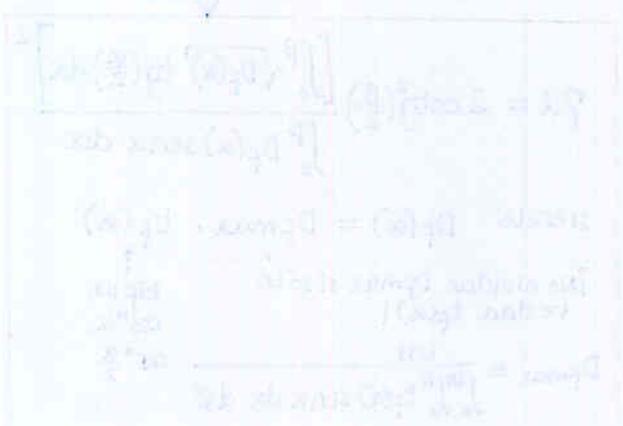
Handwritten text below the diagram on the right.



$$\frac{1}{(2a) + h} = \dots$$

Handwritten text on the left side, possibly describing a process or method.

$$\frac{1}{(2a) + h} = \dots$$



Handwritten text below the diagram on the right.

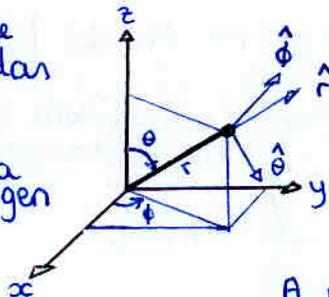
$$\frac{1}{(2a) + h} = \dots$$

# Antenas

## Introducción: Parámetros de Antenas

Sistema de coordenadas esférico

antena en el origen



$$\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, \phi)$$

$$= E_\theta(r, \theta, \phi) \hat{\theta} + E_\phi(r, \theta, \phi) \hat{\phi} + E_r(r, \theta, \phi) \hat{r}$$

campo eléctrico perpendicular a propag en  $\hat{r}$

A partir de cierta distancia (distancia de campo lejano), la relación entre el campo de dos puntos de una esfera es independiente del radio de la esfera.

La dependencia con 'r' se puede 'sacar factor común'  $\vec{E} = [j_\theta(\theta, \phi) \hat{\theta} + j_\phi(\theta, \phi) \hat{\phi}] \frac{e^{-jkr}}{r}$

Por lo tanto el diagrama de radiación siempre es igual para cualquier r.

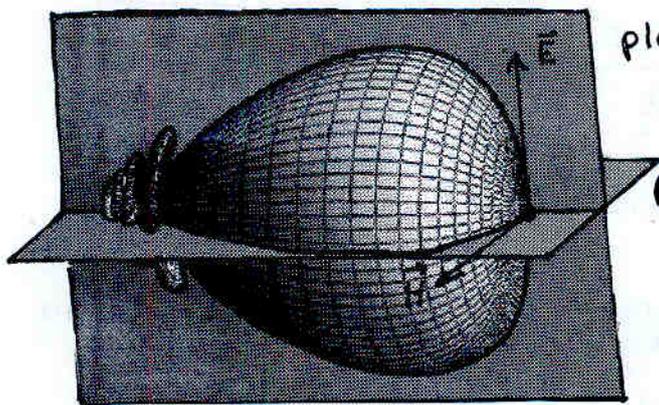
Diagrama de radiación:

$$d(\theta, \phi) = \frac{|\vec{E}(r, \theta, \phi)|}{|\vec{E}_{max}(r)|}$$

siendo  $|\vec{E}| = \sqrt{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}$

isotrópico: radia por igual en todas direcciones

omnidireccional: radia por igual en todas direcciones dentro de un mismo plano ej:

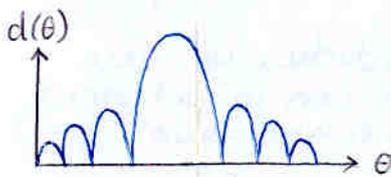


plano E:   
 • contiene al máximo   
 • contiene a  $\vec{E}$  (mirando el  $\vec{E}$  en los puntos de la dirección del máximo)

plano H:   
 • contiene al máximo   
 • contiene a  $\vec{H}$

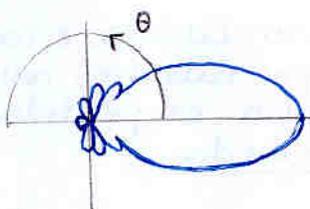
Cortes del diagrama 3D: varias representaciones

• cartesianas



escala puede ser lineal o logarítmica

• polares



Ancho de haz:

- entre ceros
- a -3dB (half-power beamwidth)

Nivel lóbulo principal a secundario.

$$NLPS = 20 \log \frac{|E_{max}|}{|E_{s1}|} \text{ adimensional}$$

## Potencia

• Densidad de potencia radiada:

$$\vec{P}(\theta, \phi) = \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

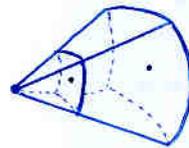
y como  $\eta = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|}$

$$P(\theta, \phi) = \frac{|\vec{E}|^2}{\eta} = \frac{E_\theta^2 + E_\phi^2}{\eta}$$

disminuye con la distancia  
a  $\frac{1}{r^2}$

• Intensidad de radiación:

$$K(\theta, \phi) = r^2 \cdot P(\theta, \phi) \left[ \frac{W}{sr} \right]$$



no cambia con  
la distancia

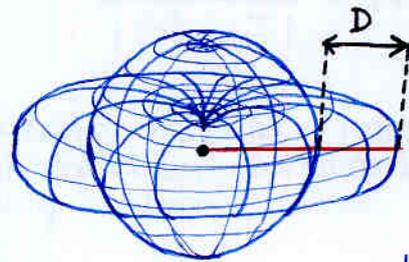
• Potencia total radiada

$$W_r = \iint_S P(\theta, \phi) dS$$

## Directividad y ganancia

### Directividad

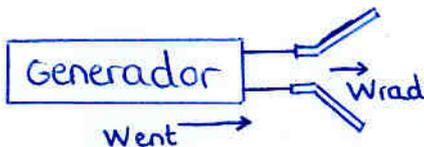
Relación (adimensional) de potencias entre nuestra antena y una antena isotrópica, a igualdad de potencia radiada, en una determinada dirección. Al ser una relación, no varía con la distancia  $r$  (se cancela el  $\frac{1}{r^2}$ )



$$D(\theta, \phi) = \frac{P_{\text{rad}}(\theta, \phi)}{P_{\text{isotrópica}}} = \frac{P_{\text{rad}}(\theta, \phi)}{\frac{W_{\text{rad}}}{4\pi r^2}} = D_{\text{max}} \cdot t(\theta, \phi) = D_{\text{max}} \cdot [d(\theta, \phi)]^2$$

normalmente se expresa en dB haciendo  $10 \log(\cdot)$

### Ganancia.



Nuestra antena no radia toda la potencia que se le entrega (no es ideal)

En la directividad comparábamos con una antena isotrópica que radiaba la misma potencia que la nuestra  $W_{\text{rad}} < W_{\text{ent}}$ , sin considerar para nada la  $W_{\text{ent}}$

La ganancia sin embargo tiene en cuenta esta pérdida, ya que compara la potencia radiada por nuestra antena con la potencia radiada por una antena isotrópica 'sin pérdidas' (i.e.  $W_{\text{rad}} = W_{\text{ent}}$ ;  $\eta = 1$ ) a igualdad de potencia entregada.

$$G(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{\frac{W_{\text{ent}}}{4\pi r^2}} = \eta \cdot D(\theta, \phi) \quad \text{siendo } \eta = \frac{W_{\text{rad}}}{W_{\text{ent}}}$$

# Directividad y ángulo sólido equivalente

$$D = \frac{P_{\max}}{\frac{W_{\text{rad}}}{4\pi r^2}} = \frac{P_{\max} \cdot 4\pi r^2}{\iint_S P(\theta, \phi) \cdot dS} = \frac{4\pi r^2}{\iint_S \underbrace{\frac{P(\theta, \phi)}{P_{\max}}}_{t(\theta, \phi)} \cdot \underbrace{r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}_{dS}}$$

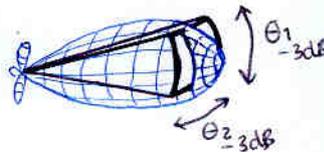
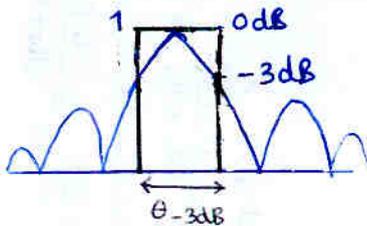
$$= \frac{4\pi}{\iint_{4\pi} t(\theta, \phi) \cdot \underbrace{\sin\theta \, d\theta \, d\phi}_{d\Omega_e}} = \frac{4\pi}{\Omega_{e}}$$

$D = \frac{4\pi}{\Omega_{e}}$       $\Omega_{e}$ : ángulo sólido equivalente

$$\Omega_{e} = \iint_{4\pi} t(\theta, \phi) \, d\Omega = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

## Directividad aproximada

Cuando los diagramas son muy directivos aproximamos el diagrama con uno que tuviera  $t(\theta, \phi) = 1$  en todo el ancho de haz a -3dB en ambas direcciones



$$\Omega_{eq} \approx \theta_1 \cdot \theta_2$$

$$D \approx \frac{4\pi}{\theta_1 \cdot \theta_2}$$

Polarización: según la figura trazada en el tiempo por el campo eléctrico en un punto.

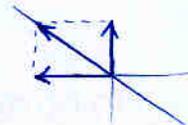
lineal	circular	elíptica

se debe a que  $\vec{E}$  tiene en realidad una variación armónica en el tiempo que nosotros damos por supuesta al usar fasores.

ej: superposición de dos polarizaciones lineales

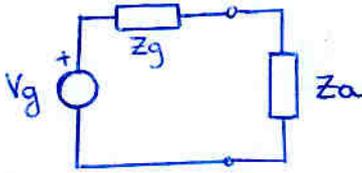
Dos polarizaciones lineales  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ , en direcciones ortogonales, pueden superponerse y crear:

- polarización lineal: si  $E_1$  y  $E_2$  están en fase oscilan al unísono
- polarización circular:  $E_1$  y  $E_2$  misma magnitud desfasados  $\pi/2$
- polarización elíptica: todos los demás casos.



# Impedancia

Relación entre V e I en bornes de antena en general es complejo



$$Z_a = R_a + jX_a$$

antena resonante:  $jX_a = 0$

$$R_a = R_{ohm} + R_r$$

↑                    ↑  
pérdidas ohmicas    radiación

$$\eta = \frac{W_t}{W_{ent}} = \frac{I^2 R_r}{I^2 (R_r + R_{ohm})}$$

$$\eta = \frac{R_r}{R_r + R_{ohm}}$$

$$W_{ent} = W_{rad} + W_{ohm}$$

máxima Transferencia Potencia

$$Z_g = Z_a^*$$

si no hay MTP hay un coeficiente de desadaptación  $C_a$

## Área efectiva

$$A_{ef} [m^2] = \frac{W_r [m]}{P_{in} [W/m^2]}$$

Representa el área que tendría la antena si dicha área entregase TODA la potencia incidente

$$A_{ef} = \eta \cdot A_{física}$$

## Longitud efectiva

$$l_{ef} [m] = \frac{V_{ca} [V]}{E_{in} [V/m]}$$

sin adaptación

$$W_r = \frac{|V_{ca}|^2 R_L}{(R_a + R_L)^2 + (X_a + X_L)^2}$$

el coeficiente de adaptación

$$C_a = \frac{W_r}{W_{rmax}} = \frac{4 R_a R_L}{(R_a + R_L)^2 + (X_a + X_L)^2}$$

## Ligar parámetros

Cuando una antena está en tx tiene directividad D

→ ¿qué área efectiva tendrá cuando la misma antena esté en recepción?

Reciprocidad

$$\frac{A_{ef}}{D} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Además

$$\left. \begin{aligned} W_{er} \text{ (pot entregada al receptor)} &= \frac{V_{ca}^2}{4 R_a} = \frac{|E_{in}|^2 \cdot l_{ef}^2}{4 R_a} \\ W_{er} &= P_{in} \cdot A_{ef} = \frac{|E_{in}|^2}{\eta} \cdot A_{ef} \end{aligned} \right\}$$

$$A_{ef} = \frac{l_{ef}^2 \cdot \eta}{4 \cdot R_a}$$

permite ver la proporcionalidad de los parámetros para típica pregunta de test.

## Ecuación de transmisión

pot recibida

$$W_r = \underbrace{\frac{W_t}{4\pi r^2}}_{\substack{\text{pot. por m}^2 \\ \text{en antena receptora,} \\ \text{contando expansión onda} \\ \text{esférica y directividad}}} \cdot D \cdot A_{ef} = W_t \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 \cdot D_t \cdot D_r$$

$A_{ef} = D \frac{\lambda^2}{4\pi}$

# Tema 2. Fundamentos de radiación

## 1. Ecuaciones de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ley de Ampère} \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{Ley de Faraday} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{Ley de Gauss} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \text{Ley de Gauss} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

Tomando la divergencia de la Ley de Ampère, y sabiendo q. div. del rot. es cero y  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$  se obtiene

Ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\vec{E}$	Campo eléctrico	Voltios/m
$\vec{H}$	Intensidad del campo magnético	Amperios/m
$\vec{D}$	desplazamiento del campo eléctrico	Culombios/m <sup>2</sup>
$\vec{B}$	Flujo del campo magnético	Weber/m <sup>2</sup>
$\vec{J}$	Densidad de corriente	Amperios/m <sup>2</sup>
$\rho$	Densidad de carga	Culombios/m <sup>3</sup>

siendo  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$   
 $\vec{B} = \mu \vec{H}$

Forma integral de las ecuaciones de Maxwell:

Aplicando teoremas de Stokes y de la divergencia:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{s}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\iiint \nabla \cdot \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint \rho \, dv$$

$$\iiint \nabla \cdot \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$\epsilon$  y  $\mu$  pueden ser

Real	Sin pérdidas
Compleja	Con pérdidas
Escalar	Isótropo
Matriz	Anisótropo
constante	Homogéneo
Variable	Inhomogéneo

Nosotros suponemos medio lineal, isótropo y homogéneo

Ecuaciones de Maxwell para campos variables armónicamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E} \end{array} \right.$$

utilizando notación fasorial

(por tanto donde veamos  $\vec{E}, \vec{J}, \vec{H}, \dots$  en realidad hay  $\vec{E}e^{j\omega t}, \vec{J}e^{j\omega t}, \vec{H}e^{j\omega t}, \dots$ )

La ecuación de continuidad queda:

$$\nabla \cdot \vec{J} + j\omega\rho = 0$$

## 2. Ecuaciones de onda para los campos

identidad

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

Ecuación de onda para el campo eléctrico

Dem:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\nabla \times \vec{H} \\ \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -j\omega\mu(\vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E}) \\ \text{P/E} \quad &= -j\omega\mu\vec{J} + \omega^2\mu\epsilon\vec{E} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} + \omega^2\mu\epsilon\vec{E} = j\omega\mu\vec{J} + \nabla\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)$$

La fuente son tanto corrientes como cargas

Ecuación de onda para el campo magnético

Dem:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E} \\ \nabla \times \nabla \times \vec{H} &= \nabla \times \vec{J} + j\omega\epsilon\nabla \times \vec{E} \\ \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} &= \nabla \times \vec{J} + \omega^2\mu\epsilon\vec{H} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{H} + \omega^2\mu\epsilon\vec{H} = -\nabla \times \vec{J}$$

Hemos separado  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  a costa del segundo orden

## 3. Definición de los potenciales

Para simplificar los cálculos, recurrimos a funciones potenciales "inventadas"

Definición del potencial vector  $\vec{A}$

Ley de Gauss para el flujo magnético  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\Rightarrow$  se cumple automáticamente si definimos  $\vec{B}$  como el rotacional de un campo vectorial

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Definición del potencial escalar  $\Phi$

Dem:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega(\nabla \times \vec{A}) \\ \nabla \times (\vec{E} + j\omega\vec{A}) &= 0 \end{aligned}$$

ya que el rotacional del gradiente de una función es cero

$$\Rightarrow \vec{E} + j\omega\vec{A} = \nabla\Phi$$

Ecuación de onda para el potencial vector eléctrico

Sustituimos los nuevos conceptos  $\vec{A}$  y  $\Phi$  en la ley de Ampere

Dem:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E} \\ \nabla \times \nabla \times \vec{A} &= \mu\vec{J} + j\omega\mu\epsilon(-\nabla\Phi - j\omega\vec{A}) \\ \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} &= \mu\vec{J} + j\omega\mu\epsilon(-\nabla\Phi - j\omega\vec{A}) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2\mu\epsilon\vec{A} = -\mu\vec{J} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\mu\epsilon\Phi)$$

# Ecuación de onda para el potencial escalar eléctrico

Dem:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot (-j\omega \vec{A} - \nabla\phi) = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} - j\omega \nabla \cdot \vec{A} \Rightarrow \nabla^2 \phi + \omega^2 \mu \epsilon \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} + (-j\omega \nabla \cdot \vec{A} + \omega^2 \mu \epsilon \phi)$$

resultan ecuaciones con fuentes muy complejas.

## Definición de la condición de Lorentz

Definiendo  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  deja un grado de libertad en  $\vec{A}$ . Hay muchas funciones distintas que pueden cumplir esa ecuación.

Para definir de forma única el potencial vector  $\vec{A}$ , debemos definir tanto su rotacional como su divergencia.

Podemos hacer ésto sabiamente de forma que simplifiquemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{A} = -j\omega \mu \epsilon \phi \end{cases} \rightarrow \nabla \cdot \vec{A} + j\omega \mu \epsilon \phi = 0$$

Las ecuaciones de onda quedan:

Ecuaciones de onda de los potenciales

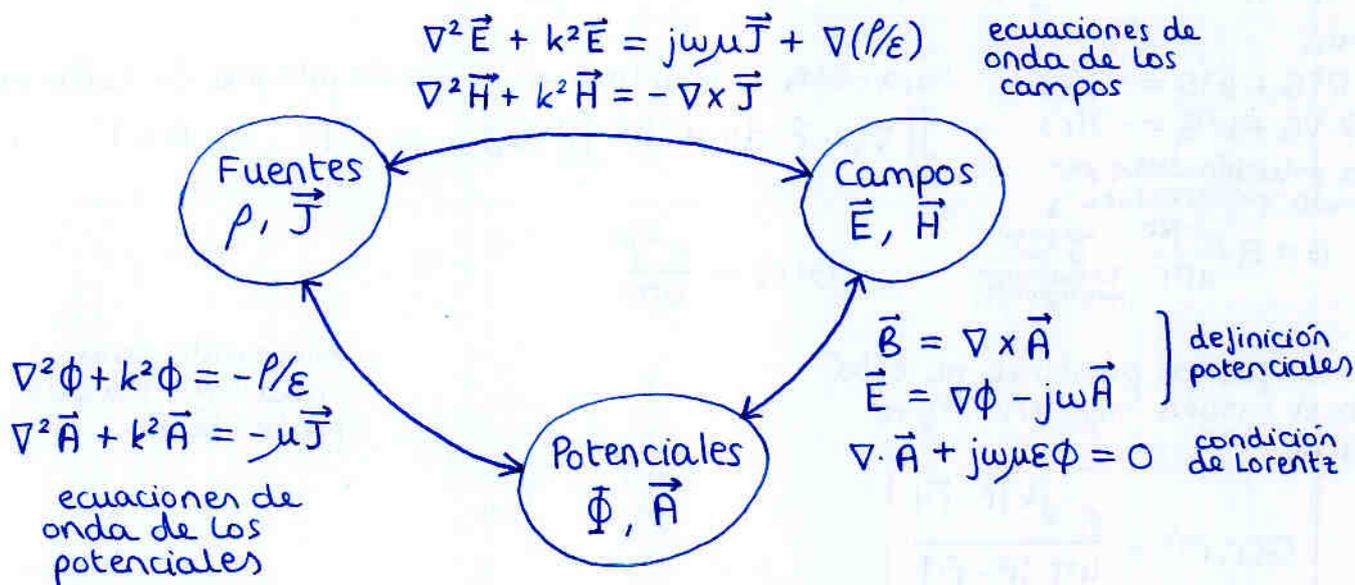
$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi + k^2 \phi &= -\rho/\epsilon \\ \nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} &= -\mu \vec{J} \end{aligned}$$

$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$   
número de onda

siendo:

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = \nabla\phi - j\omega \vec{A} \\ \nabla \cdot \vec{A} + j\omega \mu \epsilon \phi = 0 \end{cases}$$

## Resumen



**4. Ondas planas, cilíndricas, esféricas**

Podemos ver que forma puede tener la solución a las ecuaciones de ondas considerando el caso homogéneo (sin fuentes)

Ondas planas:

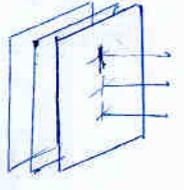
$$\nabla^2 \Omega + k^2 \Omega = 0$$

suponiendo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0 \\ \nabla^2 \Omega + k^2 \Omega = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + k^2 \Omega = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega = \underbrace{Ae^{-jkz}}_{\text{progresiva}} + \underbrace{Be^{jkz}}_{\text{regresiva}}$$



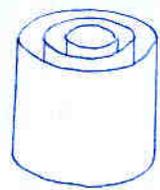
Ondas cilíndricas

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} = 0 \\ \nabla^2 \Omega + k^2 \Omega = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} + k^2 \Omega = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega = A \cdot H_0^{(1)}(k\rho) + B H_0^{(2)}(k\rho)$$

$\nabla^2$  en cilíndricas



Funciones de Hankel

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(k\rho) &\approx \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \\ H_0^{(1)}(k\rho) &\approx \frac{e^{jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \end{aligned}$$

Ondas esféricas

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = 0 \\ \nabla^2 \Omega + k^2 \Omega = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + k^2 \Omega = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega = A \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} + B \frac{e^{jkr}}{4\pi r}$$

$\nabla^2$  en esféricas



**5. Función de Green de la ecuación de onda**

supongamos una fuente puntual en el origen

Dem:

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(r)$$

$$\nabla \cdot \nabla G + k^2 G = -\delta(r)$$

la solución debe ser onda progresiva

$$G = A \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

ver pags 38-40 Electrodinámica para Ingenieros

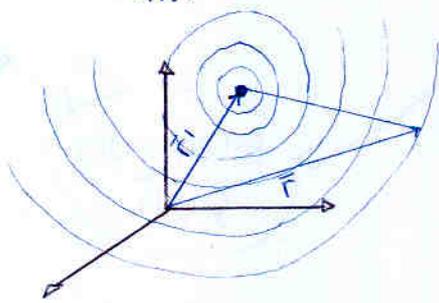
Para obtener A aplicamos la versión integral de la ecuación

$$\iint_S \nabla G \cdot \hat{r} \, ds + k^2 \iiint_V G \, dv = -1 \Rightarrow A=1$$

$$G(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

Si la fuente puntual no está en el origen sino en  $\vec{r}'$ , se tiene

$$G(r, r') = \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$



Representa una onda esférica que parte de  $\vec{r}'$

Recuerda que es un fasor, en realidad:

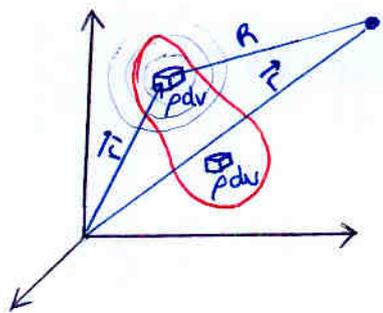
$$\text{Re}(G(r) \cdot e^{j\omega t}) = \frac{1}{4\pi r} \cos(\omega t - kr)$$

6. Soluciones integrales para los potenciales

Una vez obtenida la solución de la ecuación de onda para una fuente puntual, podemos obtener la solución general aplicando el principio de superposición, integrando el conjunto de todas las fuentes

Potencial escalar

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -\rho/\epsilon \Rightarrow \Phi = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$



Estamos haciendo un sumatorio de ondas esféricas que parten de cada  $\rho dV'$ , ponderadas por  $\rho$ .

Potencial vector

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \Rightarrow \vec{A} = \mu \iiint_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

Esta vez es un sumatorio de ondas esféricas pero ponderadas por un vector (intuitivamente; según hacia donde apunte el vector  $\vec{J}(\vec{r}')$ , la onda esférica en cuestión colaborará más a unas componentes de  $\vec{A}$  que a otras. Por ej. si  $\vec{J}(\vec{r}')$  sólo tiene componente en  $\hat{x}$ ,  $A_x$  será la onda esférica,  $A_y = A_z = 0$ )

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

$$\vec{A} = \mu \iiint_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

Fuentes  
 $\rho, \vec{J}$

$\longleftrightarrow$

Potenciales  
 $\Phi, \vec{A}$

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$


---

siendo:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \left. \vphantom{G(\vec{r}, \vec{r}')}
$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$$$

## 7. Expresiones generales de los campos

sabiendo las expresiones de  $\Phi$  y  $\vec{A}$  en función de  $G(R)$ , podemos "sustituirlos" en los campos

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \nabla \Phi$$

Es necesario hallar:

$$\nabla \times \vec{A} = \mu \nabla \times \iiint_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dV' = \mu \iiint_{V'} \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

↑  
se aplica sobre las variables  
sin primas (punto de observación)

$$\nabla \Phi = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{V'} \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

$$\begin{aligned} \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{\partial G}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G}{\partial \phi} \hat{\phi} \\ &= \frac{\partial G(R)}{\partial R} \hat{R} = \left(-jk - \frac{1}{R}\right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \hat{R} \end{aligned}$$

sustituyendo y simplificando las anteriores expresiones se obtienen las expresiones de los campos, válidas en todos los puntos del espacio:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \hat{R} \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R^2} dV' + \frac{jk}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \left( \rho(\vec{r}') \hat{R} - \frac{j\omega\epsilon}{k} \vec{J} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \\ \vec{H} &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R^2} dV' - \frac{jk}{4\pi} \iiint_{V'} (\hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}')) \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \end{aligned}$$

### Campos inducidos

proporcionales a  $1/r^2$   
son igual que las leyes de estática  
Ley de Coulomb  $\rightarrow \vec{E}$   
Ley de Biot-Savart  $\rightarrow \vec{H}$   
pero con un término de fase  $e^{-jkR}$  debido a que  $\vec{J}$  y  $\rho$  varían senoidalmente.

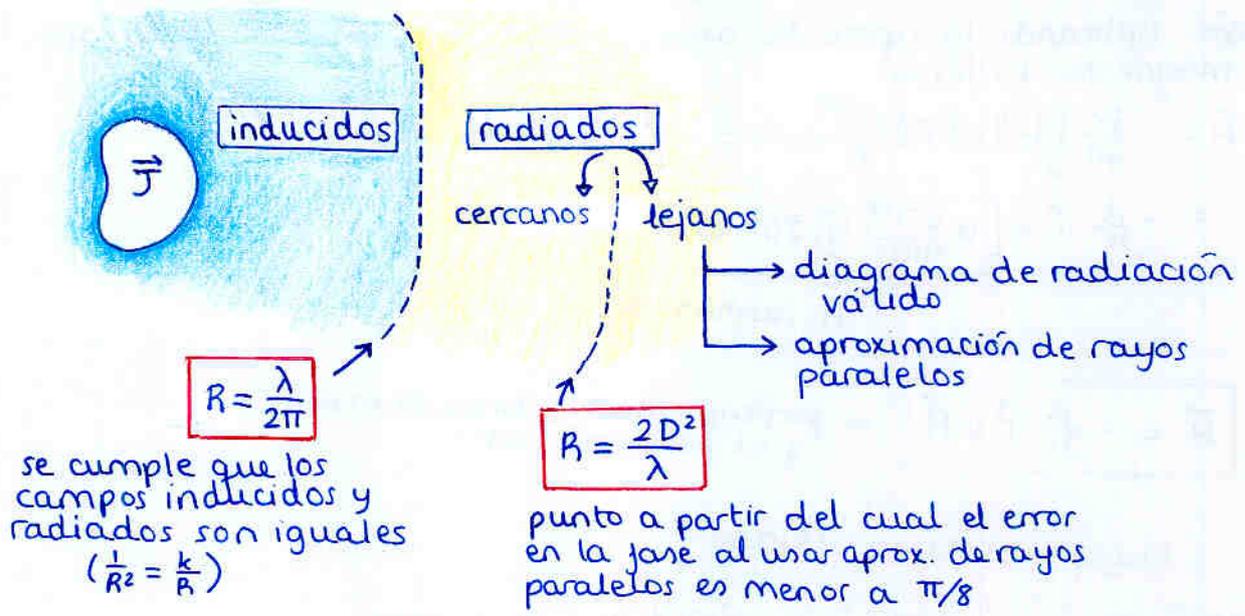
Predominan a distancias cercanas

### Campos radiados

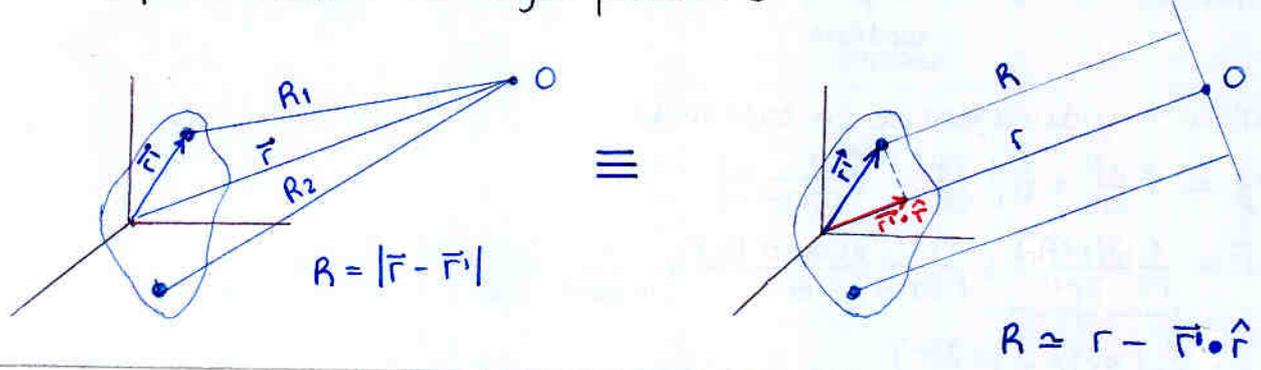
proporcionales a  $1/r$   
Este sumando es el que representa las verdaderas ondas electromagnéticas que alcanzan grandes distancias

Predominan a distancias lejanas

# 8. Campos radiados



## Aproximación de rayos paralelos



## Función de Green aproximada

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \approx \frac{e^{-jk(r - \vec{r}' \cdot \hat{r})}}{4\pi r}$$

$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

$R > \frac{2D^2}{\lambda}$  { FASE:  $R \approx r - \vec{r}' \cdot \hat{r}$  }  
 { MODULO:  $R \approx r$  }

En el módulo basta aproximar con  $R \approx r$ , pero en la fase sería una aproximación tan burda que todo se sumaría siempre en fase

## Potencial vector:

$$\vec{A} = \mu \iiint_{v'} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

$$\vec{A} = \mu \iiint_{v'} \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{J}(\vec{r}') dV' \rightarrow \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{e^{-jk(r - \vec{r}' \cdot \hat{r})}}{4\pi r} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{jk\vec{r}' \cdot \hat{r}}$$

$$\vec{A} = \underbrace{\mu \cdot \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}}_{\text{onda esférica en el origen}} \iiint_{v'} \underbrace{\vec{J}(\vec{r}') \cdot e^{jk\vec{r}' \cdot \hat{r}}}_{\text{desfase de } dV' \text{ respecto al origen en la dirección } \hat{r}} dV'$$

La integral es un "sumatorio" de los vectores corrientes  $\vec{J}$  cada uno con su desfase. En el "sumatorio" se tendrá por tanto en cuenta la interferencia. Lo llamaremos  $\vec{N}$

## Campo magnético lejano

Dem: Aplicando la aprox. de rayos paralelos a la expresión de campo magnético radiado

$$\vec{H} = -\frac{jk}{4\pi} \iiint_V (\hat{r} \times \vec{J}(\vec{r}')) \frac{e^{-jkr}}{R} dv' \approx -\frac{jk}{4\pi} \iiint_V (\hat{r} \times \vec{J}(\vec{r}')) \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dv'$$

$$= -\frac{jk}{\mu} \hat{r} \times \underbrace{\left[ \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}')) e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dv' \right]}_{\vec{A} \text{ (aproximado)}}$$

$$\vec{H} = -\frac{jk}{\mu} \hat{r} \times \vec{A} \Rightarrow \text{perpendicular a dirección radial y al potencial vector}$$

## Campo eléctrico lejano

Dem: El campo eléctrico es más difícil de obtener:

A partir de los potenciales  $\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla\Phi \stackrel{\substack{\text{condición} \\ \text{Lorentz}}}{=} -j\omega\vec{A} - \nabla\left(\frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \vec{A}\right) = -j\omega\vec{A} - \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla \nabla \cdot \vec{A}$

Gradiente y divergencia en esféricas:

$$\nabla f = \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (F_\phi)}{\partial \phi}$$

$$\frac{1}{r^2} (2rF_r + r^2 \frac{\partial F_r}{\partial r}) = \frac{1}{r} (2F_r + r \frac{\partial F_r}{\partial r}) = \frac{2F_r}{r} + \frac{\partial F_r}{\partial r}$$

Se puede ver que todos los términos de la divergencia de  $\vec{A}$  disminuyen con la distancia salvo el de  $\frac{\partial F_r}{\partial r}$

Por tanto, a distancias grandes

$$\nabla \cdot \vec{A} \approx \frac{\partial A_r}{\partial r}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \nabla\left(\frac{\partial A_r}{\partial r}\right) = \hat{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \phi}$$

de nuevo tomamos únicamente el sumando que menos decrece con la distancia

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \approx \hat{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2}$$

si derivamos dos veces  $A_r$  respecto a  $r$  (sólo afecta a lo de fuera de la integral:  $A_r = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}')) e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dv'$ ) y nos quedamos de nuevo con el término que menos decrece con la distancia

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \approx -k^2 (\hat{r} \cdot \vec{A}) \hat{r} \text{ y sustituimos en la expresión de } \vec{E}$$

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -j\omega(\vec{A} - (\hat{r} \cdot \vec{A}) \hat{r}) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$= j\omega (\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A}))$$

$$\vec{E} = j\omega \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A}) \Rightarrow \text{perpendicular a } \vec{H} \text{ y a } \hat{r}$$

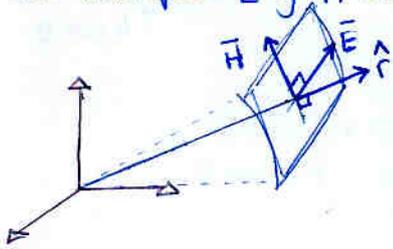
# Expresiones aproximadas para los campos radiados

$$\vec{H} = -\frac{jk}{\mu} \hat{r} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = j\omega (\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A})) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r = 0 \\ E_\theta = -j\omega A_\theta \\ E_\phi = -j\omega A_\phi \end{array} \right.$$

no importa la componente radial de A

Los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son perpendiculares entre si y tangenciales



La relación entre sus módulos se llama :

$\eta$  : impedancia característica del medio

$$\eta = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{|\vec{E}_\theta|}{|\vec{H}_\phi|} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{k}{\omega\epsilon}$$

sólo tienen componente tangencial

$$= c \cdot \mu = \frac{1}{c \cdot \epsilon}$$

TRUCCO
$\eta_0 = 120\pi$
$c_0 = 3 \cdot 10^8$
Permite sacar $\epsilon_0, \mu_0$

Por tanto  $\vec{E} = \eta (\vec{H} \times \hat{r})$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_r = 0 \\ H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta} \\ H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta} \end{array} \right.$$

## 9. El vector de radiación

$$\vec{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dV'$$

onda esférica centrada en el origen de coordenadas

$\vec{N}$  : vector de radiación

se puede interpretar como la suma vectorial de todas las corrientes multiplicadas por un término que representa la diferencia de fase entre la onda que produce y la que produciría si estuviera en el origen

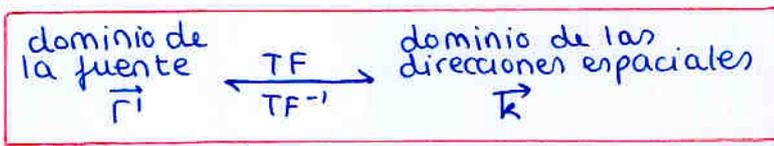
Interpretación como TF tridimensional

$$\left\{ \begin{array}{l} k\hat{r} = \vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \\ \vec{r}' = x' \hat{x} + y' \hat{y} + z' \hat{z} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} k_x = k \sin\theta \cos\phi \\ k_y = k \sin\theta \sin\phi \\ k_z = k \cos\theta \end{array}$$

$k_z z'$  es el desfase en dirección z

$$\vec{N} = \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dV' = \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dV'$$



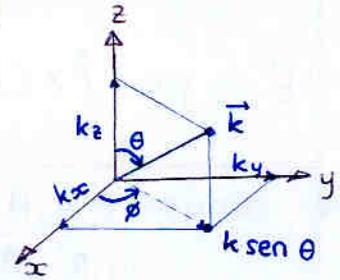
Resumen:

$$\vec{N} = \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dV'$$

$$= \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dV' \quad \text{¡TF3D!}$$

$$\vec{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N}$$

$$\begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \phi \\ k_y = k \sin \theta \sin \phi \\ k_z = k \cos \theta \end{cases}$$



$$= A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

pasamos a esféricas

$$\begin{cases} A_r = A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta \\ A_\theta = A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta \\ A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \end{cases}$$

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$$

Y ahora directamente los campos

$$\vec{E} = j\omega (\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A}))$$

$$\vec{H} = -\frac{jk}{\mu} (\hat{r} \times \vec{A})$$

$$\vec{E} = \eta (\vec{H} \times \hat{r})$$

es decir

$$E_r = 0$$

$$E_\theta = -j\omega A_\theta$$

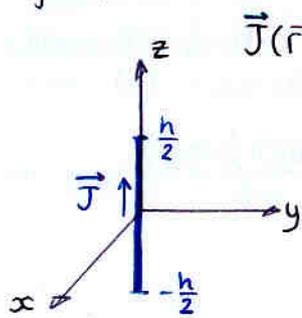
$$E_\phi = -j\omega A_\phi$$

$$H_r = 0$$

$$H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta}$$

$$H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta}$$

ejemplo :



$$\vec{J}(\vec{r}') = I(z') \delta(x') \delta(y') \hat{z}$$

$$I(z') = \begin{cases} I_0 & |z'| \leq h/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Hallar el vector de radiación:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\vec{k}) &= \iiint \vec{J}(\vec{r}') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dx' dy' dz' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(z') \delta(x') \delta(y') \hat{z} e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dx' dy' dz' \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} I_0 e^{jk_z z'} dz' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') e^{jk_x x'} dx'}_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y') e^{jk_y y'} dy'}_1 \hat{z} \\ &= \hat{z} \int_{-h/2}^{h/2} I_0 e^{jk_z z'} dz' \end{aligned}$$

recuerda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x-x_0) dx = f(x_0)$$

Es la TF unidimensional

$$\begin{aligned} \hat{z} \int_{-h/2}^{h/2} I_0 e^{jk_z z'} dz' &= \frac{I_0 \hat{z}}{jk_z} \left[ e^{jk_z z'} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{I_0 \hat{z}}{jk_z} (e^{jk_z h/2} - e^{-jk_z h/2}) \\ &= \frac{2I_0}{k_z} \text{sen}(k_z h/2) \hat{z} = I_0 h \hat{z} \left[ \frac{\text{sen}(k_z h/2)}{k_z h/2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{sen } x = \frac{e^{jk_x} - e^{-jk_x}}{2j}$$

$$\vec{N}(\vec{k}) = I_0 h \left[ \frac{\text{sen}(k_z h/2)}{k_z h/2} \right] \hat{z}$$

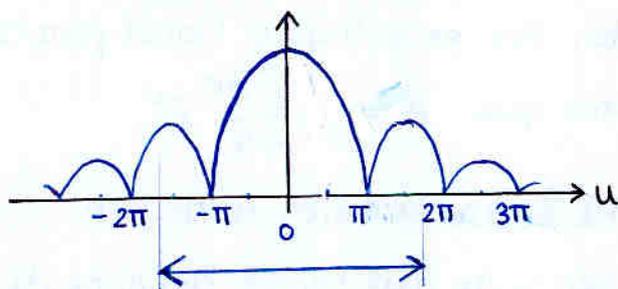
y como

$$\begin{cases} k_x = k \text{ sen } \theta \cos \phi \\ k_y = k \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi \\ k_z = k \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{N}(\vec{k}) &= I_0 h \left[ \frac{\text{sen}(k \cos \theta h/2)}{k \cos \theta h/2} \right] \hat{z} \\ &= I_0 h \left[ \frac{\text{sen}(\pi \frac{h}{\lambda} \cos \theta)}{\pi \frac{h}{\lambda} \cos \theta} \right] \hat{z} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

no olvidar el  $\hat{z}$

$$|N(u)| = \left| \frac{\text{sen}(u)}{u} \right|$$



Llamamos MARGEN VISIBLE a la zona donde  $N(u)$  tiene sentido físico.

Hay que tener en cuenta que  $\theta \in [0, \pi]$

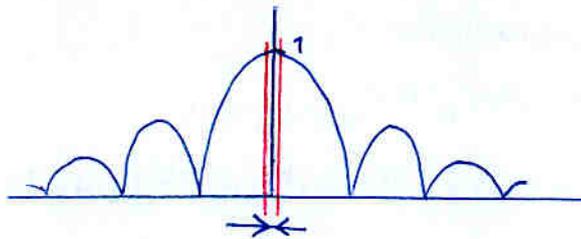
por tanto

$$u = k h/2 \cos \theta = \pi \frac{h}{\lambda} \cos \theta$$

$$\begin{aligned} -k \frac{h}{2} < u < k \frac{h}{2} \\ -\pi \frac{h}{\lambda} < u < \pi \frac{h}{\lambda} \end{aligned}$$

# Casos particulares

$h \ll \lambda$        $-\pi \frac{h}{\lambda} < u < \pi \frac{h}{\lambda}$



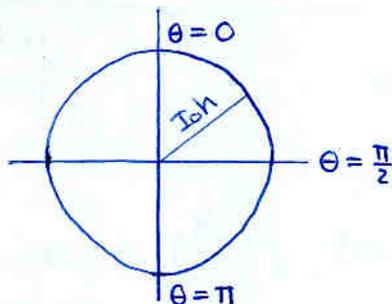
El margen visible tiende a intervalo muy pequeño alrededor del cero.

Por tanto

$$\bar{N}(E) \approx I_0 h \cdot 1 \hat{z} \frac{\text{sen}(\pi \frac{h}{\lambda} \cos \theta)}{\pi \frac{h}{\lambda}} \text{ con } h \ll \lambda$$

Si representamos la componente z (en este caso la única que tiene) de  $\bar{N}$  en polares, tenemos:

$N_z = I_0 h$



$h \ll \lambda \Rightarrow \bar{N}$  es isotrópico

$\bar{N}$  representa la "parte" del diagrama de radiación debida a las diferencias de fase (i.e. representa el efecto de la interferencia en la fase entre las 'infinitas' ondas esféricas que parten de cada  $dv'$ )

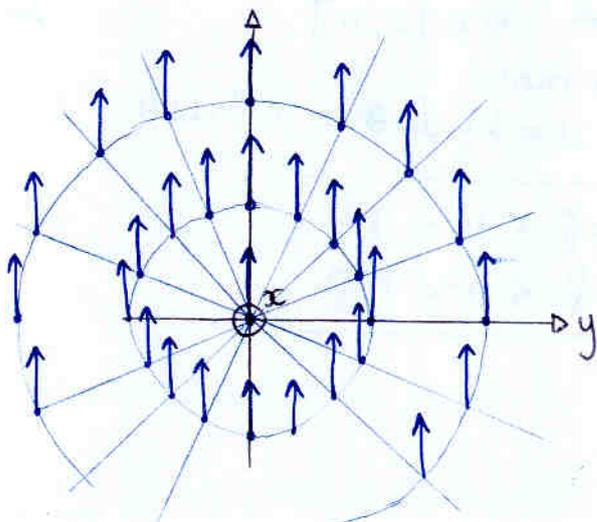
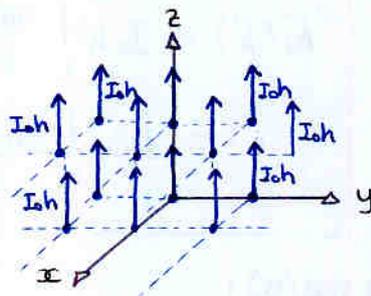
Si  $h \ll \lambda$  entonces todos los  $dv'$  están a la misma distancia, y por tanto no hay diferencia de caminos

Pero CUIDADO. Que  $\bar{N}(E)$  sea isotrópico no quiere decir que  $\vec{E}$  lo sea (no existe antenas isotrópicas).  
Veamos porqué:

$\bar{N}(E) = I_0 h \hat{z}$  en realidad significa que, para todo  $\theta, r, \phi$  (es decir en todo el espacio) el VECTOR  $\bar{N}$  vale  $I_0 h \hat{z} \rightarrow$

Para verlo mejor, miremos sólo el plano  $zy$  representando valores discretizados de  $r$  y  $\theta$

Representémoslo



En efecto,  $N_z$  es isotrópico (igual para todo  $\theta$ )

Recordemos que  $\vec{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N}$

$\vec{A} = A_z \hat{z}$  será también isotrópico

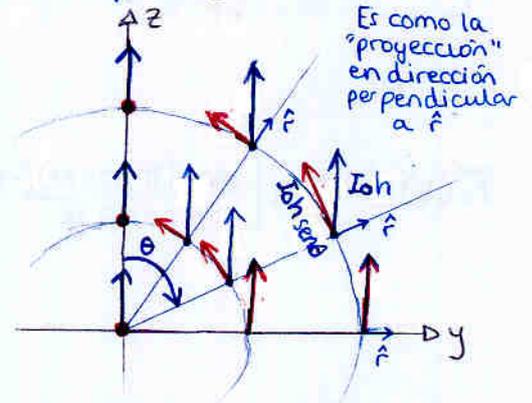
y el hecho de que tenga componente únicamente en  $z$  viene de que las corrientes  $\vec{J}$ , estaban orientadas únicamente en  $\hat{z}$ .

Pero recordemos que el campo  $\vec{E}$  era:

$$\begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = -j\omega A_\theta \\ E_\phi = -j\omega A_\phi \end{cases}$$

Es decir que lo que importa son las componentes  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$  de  $\vec{A}$  (y por tanto de  $\vec{N}$ )

si dibujamos en rojo la componente  $\hat{\theta}$  de  $\vec{N}$ , que será la que contribuirá al campo eléctrico



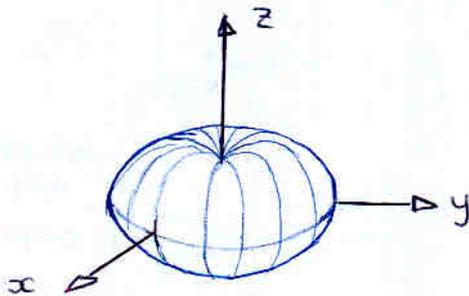
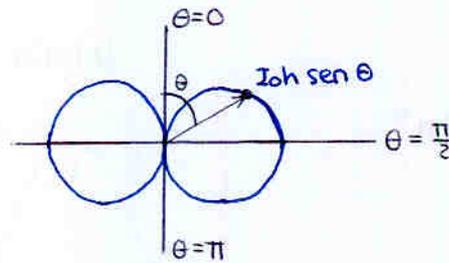
Vemos que  $\vec{N} = I_0 h \hat{z}$   
 ↓ pasar a esféricas (en este caso es sencillo)

en realidad  $N_r$  no importa ya que  $E_r = 0$  →

$$\begin{cases} N_\phi = 0 \\ N_\theta = -N_z \sin \theta \\ = -I_0 h \sin \theta \\ N_r = I_0 h \cos \theta \end{cases}$$

Al pasar a esféricas, tenemos que  $N_\theta$  ya no es isotrópico. Si representamos  $N_\theta$  en polares

Y ésta sí que será la forma de la componente  $E_\theta$  del campo eléctrico, y puesto que será la única componente de  $\vec{E}$  (mira fórmulas) será finalmente el diagrama de radiación tan conocido:



$$\begin{aligned} \vec{E}_\theta &= -j\omega A_\theta \\ &= -j\omega \cdot \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} N_\theta \\ &= j\omega \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} I_0 h \sin \theta \end{aligned}$$

$$E_\phi = -j\omega A_\phi = 0$$

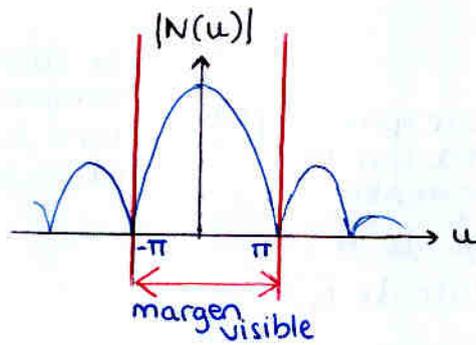
Por tanto

1. Las componentes de  $\vec{N}$  (y por tanto de  $\vec{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N}$ ) representan el efecto de las diferencias de fase entre los distintos puntos de la antena
2. Al pasar  $\vec{N}$  o  $\vec{A}$  a polares y tomar sólo componentes  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$  como campo eléctrico, se está teniendo en cuenta el carácter vectorial de las corrientes

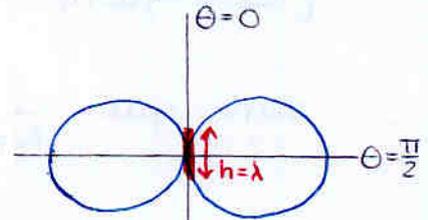
$$h = \lambda$$

$$-\pi \frac{h}{\lambda} < u < \pi \frac{h}{\lambda}$$

$$-\pi < u < \pi$$



$N_z$  en polares



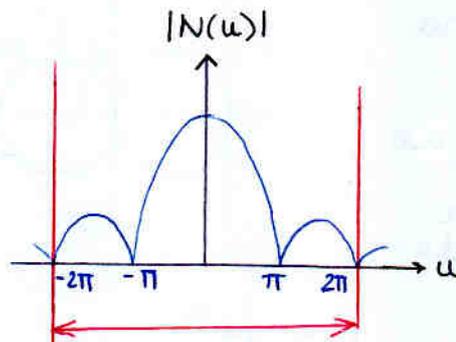
$$\bar{N}(\epsilon) = I_0 h \left[ \frac{\text{sen}(\pi \cos \theta \frac{h}{\lambda})}{\pi \cos \theta \frac{h}{\lambda}} \right] \hat{z} = I_0 h \left[ \frac{\text{sen}(\pi \cos \theta)}{\pi \cos \theta} \right] \hat{z}$$

Esta interferencia es TOTALMENTE lógica si se piensa intuitivamente

nulo en  $\theta = 0$   
max en  $\theta = \pi/2$

$$h = 2\lambda$$

$$-2\pi < u < 2\pi$$

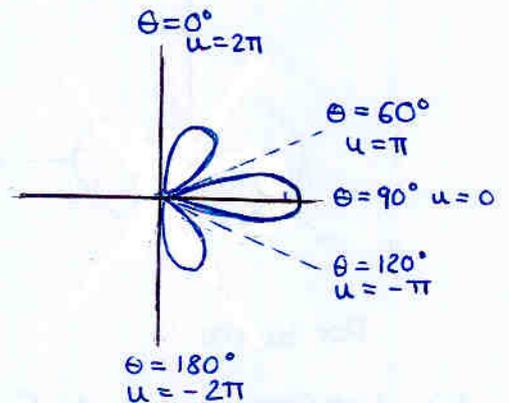


$$\bar{N} = I_0 h \left[ \frac{\text{sen}(2\pi \cos \theta)}{2\pi \cos \theta} \right] \hat{z}$$

Nulos:

$$u = \pi \Rightarrow 2\pi \cos \theta = \pi \Rightarrow \cos \theta = 1/2 \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

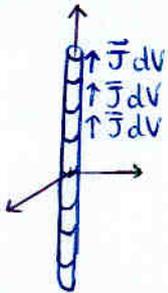
$$u = 2\pi \Rightarrow 2\pi \cos \theta = 2\pi \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0^\circ$$



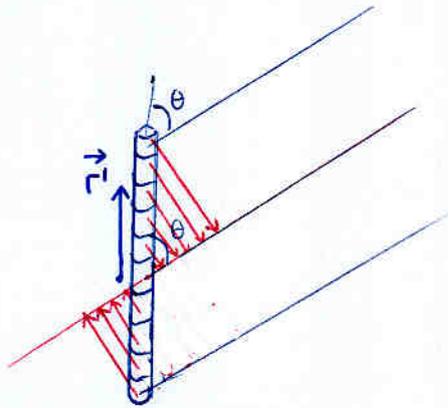
## Aproximación de rayos paralelos intuitivamente

Lo que hace esta aproximación realmente es que ignora cualquier diferencia de posición entre los diferenciales de corriente en la dirección perpendicular a  $\hat{r}$ , y sólo tiene en cuenta las diferencias de posición (y por tanto diferencias de fase) en la dirección paralela a  $\hat{r}$ ;

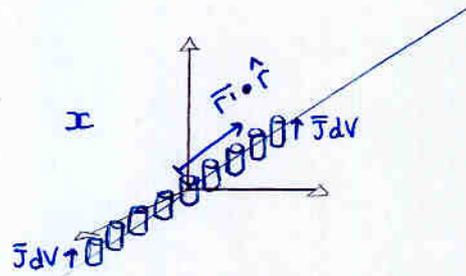
Es decir:



antena con sus diferenciales de corriente



si queremos ver el campo creado en una dirección  $\theta$  utilizando aproximación de rayos paralelos; ignoramos los cambios de posición en la dirección perpendicular a  $r$



Es como si "proyectásemos" cada diferencial  $\vec{J} dV$  sobre la dirección de  $r$ .

Si cada elemento diferencial crea ahora un diferencial de onda esférica

$$\frac{\mu e^{-j(kr - k(\vec{r}_i \cdot \hat{r}))}}{4\pi(\vec{r} - \vec{r}_i)} \approx \frac{\text{para el módulo}}{\vec{r}}$$

Para "sumar" las ondas esféricas de cada diferencial  $\vec{J} dV$  que ahora está colocado en  $\vec{r}_i \cdot \hat{r}$  en lugar de  $\vec{r}_i$

$$\mu \iiint \vec{J} \cdot \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \cdot e^{-jk(\vec{r}_i \cdot \hat{r})} dV$$

$$= \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint \vec{J} e^{-jk(\vec{r}_i \cdot \hat{r})} dV$$

que es justo la expresión que tenemos

Es obvio que cada una llegará al punto de observación con cierto desfase

$$\underbrace{\frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r}}_{\text{fase de la onda que parte del elemento en el origen}} \cdot \underbrace{e^{-jk(\vec{r}_i \cdot \hat{r})}}_{\substack{\text{desfase por la diferencia de posición} \\ \text{EN LA DIRECCIÓN } \hat{r} \\ \text{(Es en ese producto escalar donde se hace patente que la distancia que importa es la que está en dirección } \hat{r} \\ \text{(i.e. importa } \vec{r}_i \cdot \hat{r} \\ \text{y no } \vec{r}_i \text{ a secas)}}}$$

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or introductory paragraph.



Handwritten text below the first diagram, likely describing its components or function.

Handwritten text below the second diagram, continuing the explanation or providing additional details.

Handwritten text below the third diagram, possibly a conclusion or summary of the previous parts.



Handwritten text below the fourth diagram, providing further context or analysis.

Handwritten text at the bottom of the left column, possibly a final note or signature.



Handwritten text below the fifth diagram, likely describing its components or function.



Handwritten text below the sixth diagram, providing further context or analysis.

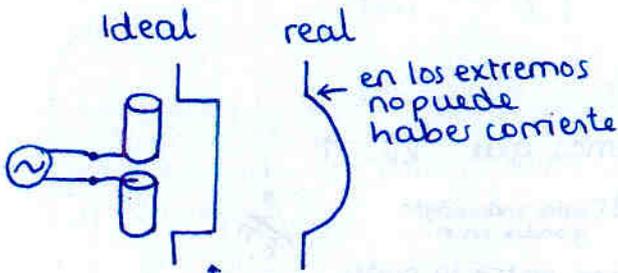
Handwritten text at the top of the right column, possibly a title or introductory paragraph.



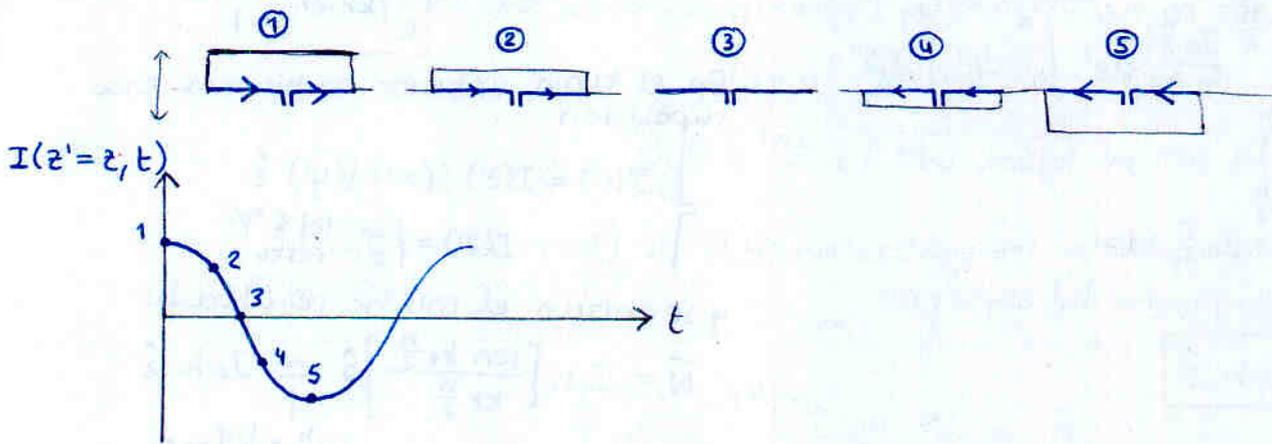
Handwritten text below the seventh diagram, likely describing its components or function.

# Tema 3. Antenas elementales

## 3.1 Dipolo elemental



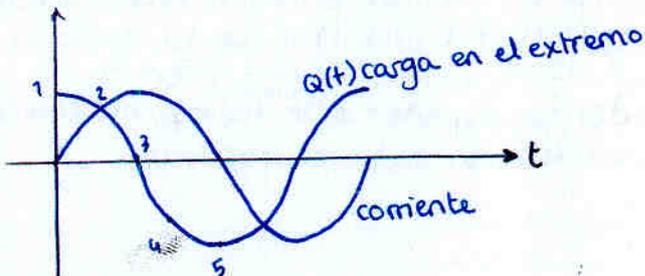
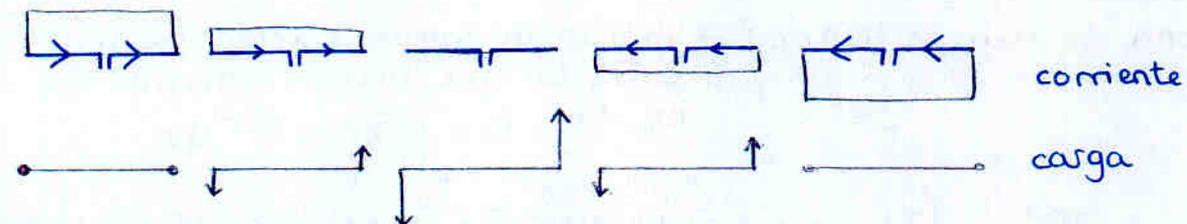
Cuidado: que pongamos la corriente constante no significa que sea corriente continua. En realidad es un fasor que varía armónicamente, y lo que es constante es ese fasor, es decir la amplitud de la variación armónica.



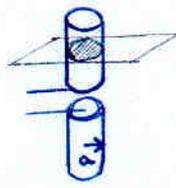
De la ley de continuidad  $\nabla \cdot \mathbf{J} + j\omega\rho = 0$

en su forma integral se ve que donde entra más corriente de la que sale ( $\nabla \cdot \mathbf{J} < 0$ ) habrá acumulación de cargas. Si entra la misma corriente que sale ( $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ) no se acumulan cargas.  $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$

En el dipolo elemental, al ser ideal y tener  $\mathbf{J}$  constante en todo él, la carga SÓLO puede acumularse en los extremos



# campos en el dipolo elemental



$$\vec{J} = \frac{I(z')}{\pi a^2} \hat{z} \quad [A/m^2]$$

$$= \frac{I_0}{\pi a^2} \hat{z}$$

$$I(z') = \begin{cases} I_0 & |z'| \leq h/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

El vector de radiación:

$$\vec{N} = \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{ik\hat{r} \cdot \vec{r}'} dV'$$

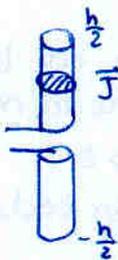
$$= \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{I_0 \hat{z}}{\pi a^2} \rho' dz' d\phi' d\rho'$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{I_0 \hat{z}}{\pi a^2} dz' \int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi'$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} I_0 \hat{z} dz'$$

$$\vec{N} = I_0 h \hat{z}$$

Vemos que es lo mismo



$$\vec{J} = \frac{I(z')}{\pi a^2} \hat{z}$$

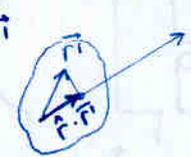
$$\vec{J} = I(z') \delta(x') \delta(y') \hat{z} \quad [A/m^2]$$

$$I(z') [A]$$

Recordemos que  $k\hat{r} \cdot \vec{r}'$

$$= k \cdot \Delta r_{\text{entre onda origen y onda en } r'}$$

= desfase entre la onda que parte del origen y la que parte de  $r'$



Por ser el dipolo electricamente pequeño podemos suponer  $k\hat{r} \cdot \vec{r}' \approx 0$

$$e^{ik\hat{r} \cdot \vec{r}'} \approx 1$$

En el tema anterior no hicimos esa suposición

$$\vec{J}(\vec{r}') = I(z') \delta(x') \delta(y') \hat{z}$$

$$I(z') = \begin{cases} I_0 & |z'| \leq h/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

y se obtuvo el mismo resultado

$$\vec{N} = I_0 h \left[ \frac{\sin k z \frac{h}{2}}{k z \frac{h}{2}} \right] \hat{z} \approx I_0 h \hat{z}$$

$$k z \frac{h}{2} = \frac{h \pi}{\lambda} \approx 0$$

¿Zona de campo lejano? → Válida la aproximación de rayos paralelos que siempre hacemos al escribir  $\vec{N} = \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{ik\hat{r} \cdot \vec{r}'} dV'$

$$R > \frac{2D^2}{\lambda} = \frac{\lambda}{50} < D$$

$D$  pequeño =  $h$   
por ej  $h = \frac{\lambda}{10}$

Resulta que la aproximación de campo lejano es válida antes de haber salido siquiera del entorno de la antena

Podemos suponer que la aproximación es válido en todo el espacio

**Cálculo exacto**

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{N}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 h \hat{z} \begin{cases} A_r = A_z \cos \theta \\ A_\theta = -A_z \sin \theta \\ A_\phi = 0 \end{cases}$$

entonces:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}$$

$$= I_0 h \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \hat{\phi}$$

en esféricas

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r \cdot A_\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla \times \vec{H} - \vec{J})$$

$$= \begin{cases} E_r = I_0 h \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \left( \frac{2\eta}{r^2} + \frac{2}{j\omega\epsilon r^3} \right) \cos \theta \\ E_\theta = I_0 h \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \left( \frac{j\omega\mu}{r} + \frac{\eta}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^2} \right) \sin \theta \end{cases}$$

**Cálculo campo lejano**

Obteníamos expresión MUY sencilla para  $\vec{E}$  sin más que ir despreciando los términos que se atenuaban más. Es el cálculo que siempre haremos.

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 h \hat{z} \begin{cases} A_r = A_z \cos \theta \\ A_\theta = -A_z \sin \theta \\ A_\phi = 0 \end{cases}$$

veremos de nuevo que aunque  $\vec{N}$  era igual en todas direcciones (indicando q. no hay interferencias de fase) al pasar a esféricas se tiene en cuenta el carácter vectorial de las corrientes - donut

y la aproximación es:

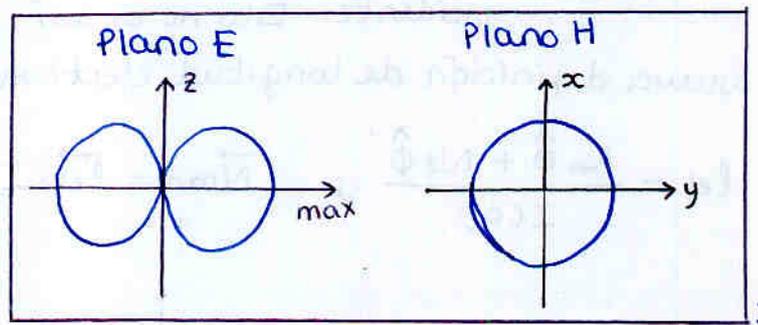
$$\left( \begin{array}{ll} E_r = 0 & H_r = 0 \\ E_\theta = -j\omega A_\theta & H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta} \\ E_\phi = -j\omega A_\phi & H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta} \end{array} \right)$$

coincide con las componentes que menos se atenuan del cálculo exacto

$$\vec{E} = \left( E_\theta \hat{\theta} = -j\omega (-A_z \sin \theta) \right) = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 h \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{4\pi} \left( \frac{\omega\mu}{\eta} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 h \sin \theta \hat{\phi}$$

$$\frac{\omega\mu}{\eta} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = k$$





Cálculandolo:

• Densidad de potencia radiada

$$\vec{E} = \frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} I_0 h \sin\theta \hat{\theta}$$

$$P = \operatorname{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{|\vec{E}|^2}{\eta} = \left(\frac{I_0 h}{4\pi r}\right)^2 \omega\mu k \sin^2\theta$$

• Diagrama de radiación

$$P_{\max} = \left(\frac{I_0 h}{4\pi r}\right)^2 \omega\mu k \rightarrow t(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{P_{\max}} = \sin^2\theta$$

$$|\vec{E}|_{\max} = \frac{j\omega\mu}{4\pi r} I_0 h \rightarrow d(\theta, \phi) = \frac{|\vec{E}(\theta, \phi)|}{|\vec{E}|_{\max}} = \sin\theta$$

• Potencia radiada

$$W_{\text{rad}} = \iint_S P_{\text{rad}}(\theta, \phi) ds = \iint_S P_{\text{rad}}(\theta, \phi) \cdot \underbrace{r^2 \sin\theta d\theta d\phi}_{ds}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{I_0 h}{4\pi r}\right)^2 \omega\mu k \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{I_0 h}{4\pi}\right)^2 \omega\mu k \sin^3\theta d\theta d\phi = \left(\frac{I_0 h}{4\pi}\right)^2 \omega\mu k \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta$$

$$= \frac{(I_0 h)^2}{8\pi} \omega\mu k \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot \sin^2\theta d\theta$$

$$= \frac{(I_0 h)^2}{8\pi} \omega\mu k \int_0^{\pi} \sin\theta (1 - \cos^2\theta) d\theta = \frac{(I_0 h)^2}{8\pi} \omega\mu k \left[ \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta - \int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta d\theta \right]$$

$$= \frac{(I_0 h)^2}{8\pi} \omega\mu k \left[ [-\cos\theta]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} \right]$$

$$= \frac{(I_0 h)^2}{8\pi} \omega\mu k \left[ 2 - \left(-\frac{1}{3}(-1) - -\frac{1}{3}\right) \right] = \frac{4}{3} \frac{(I_0 h)^2}{8\pi} \omega\mu k = I^2 \cdot \frac{k^2 \eta}{8\pi} h^2 \frac{4}{3}$$

$$= I^2 \underbrace{\pi \frac{\eta}{2} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \frac{4}{3}}_{R_{\text{rad}}}$$

• Directividad

$$D_{\max} = \frac{P_{\max}}{\frac{W_{\text{rad}}}{4\pi r^2}} = \frac{\left(\frac{I_0 h}{4\pi r}\right)^2 \omega\mu k \cdot 4\pi r^2}{\frac{(I_0 h)^2}{8\pi} \omega\mu k \frac{4}{3}} = \frac{6\pi}{4\pi} = 1.5$$

• Directividad integrando

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{t(\theta, \phi)}_{\text{sen}^2 \theta} \cdot \underbrace{\text{sen} \theta \, d\theta \, d\phi}_{d\Omega}} = \left( \frac{P_{\max}}{4\pi r^2} = \frac{P_{\max}}{W_{\text{rad}}/4\pi r^2} \right)$$

$$= \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \text{sen}^2 \theta \cdot \text{sen} \theta \, d\theta}$$

2π      2/3 (integral ya hecha en pag anterior)

$$= \frac{3}{2} = 1.5$$

• Longitud efectiva

$$\vec{N} = I_0 h \hat{z}$$

$$N_{\theta} = \vec{N} \cdot \hat{\theta} = I_0 h \hat{z} \cdot \hat{\theta} = -I_0 h \text{sen} \theta$$

$$N_{\phi} = \vec{N} \cdot \hat{\phi} = I_0 h \hat{z} \cdot \hat{\phi} = 0$$

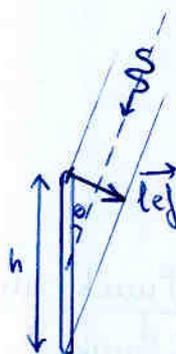
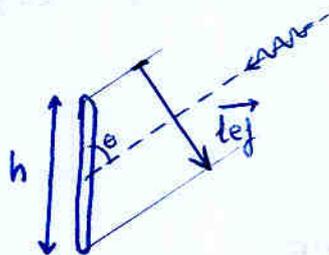
$$l_{ef} = \frac{N_{\theta} \hat{\theta} + N_{\phi} \hat{\phi}}{I_0}$$

↖ I(0) = I<sub>0</sub> (ya que es constante)

$$= \frac{-I_0 h \text{sen} \theta \hat{\theta}}{I_0}$$

$$= -h \hat{\theta} \cdot \text{sen} \theta$$

i.e. es como proyectar el dipolo elemental en la dirección que venga el campo incidente

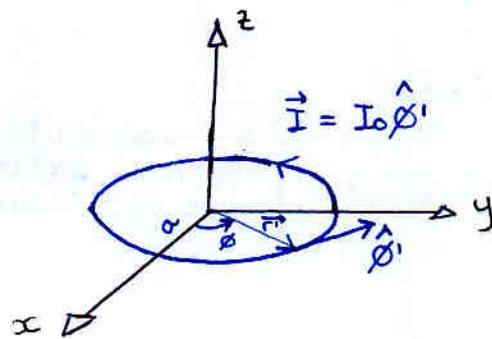


Además

$$l_{ef\max} = h$$

$$\vec{l}_{ef} = l_{ef\max} \cdot d(\theta, \phi) \cdot \hat{\theta}$$

### 3.2 Espira elemental



Esta vez suponemos (sin comprobarlo como en el dipolo) que:

$$\iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') dV' \propto \int_{l'} \vec{I}(\vec{r}') dl'$$

$$\vec{N} = \int_0^{2\pi} I_0 \hat{\phi}' e^{i k \hat{r} \cdot \vec{r}'} \underbrace{a d\phi'}_{dl'}$$

**CUIDADO**  
 $\hat{\phi} \neq \hat{\phi}'$       $\vec{I} \neq I_0 \hat{\phi}$   
 $\vec{I} = I_0 \hat{\phi}'$

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$\vec{r}' = a \cos\phi' \hat{x} + a \sin\phi' \hat{y} \quad (= a \hat{r}' = a \cdot (\cos\phi' \hat{x} + \sin\phi' \hat{y}))$$

$$\hat{r} \cdot \vec{r}' = a \sin\theta \cos\phi \cos\phi' + a \sin\theta \sin\phi \sin\phi'$$

$$= a \sin\theta [\cos\phi \cos\phi' + \sin\phi \sin\phi']$$

$$= a \sin\theta \cos(\phi - \phi')$$

$$\vec{N} = a I_0 \int_0^{2\pi} I_0 \hat{\phi}' e^{i k a \sin\theta \cos(\phi - \phi')} d\phi'$$

tenemos :  $k \cdot a = 2\pi \frac{a}{\lambda} \approx 0$   
 $a \ll \lambda$

- ¿Hacemos como en el dipolo?  $e^x \approx 1$   
 resultaría  $\vec{N} = a I_0 \int_0^{2\pi} I_0 \hat{\phi}' d\phi' = 0$

recuerda  
 $\int_0^{2\pi} \hat{\phi}' d\phi' = 0$

Hemos hecho una aproximación demasiado burda, hemos ignorado las diferencias de fase y por tanto sería como tener todos los  $I dl'$  de círculo en el origen, cancelándose cada uno con su elemento opuesto



- Para la espira hacemos una mejor aproximación, siguiendo con el polinomio de Taylor:

$$e^x \approx 1 + x$$

Por tanto:

$$\vec{N} = a I_0 \int_0^{2\pi} \hat{\rho}' \cdot e^{jka \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi' \simeq a I_0 \int_0^{2\pi} \hat{\rho}' (1 + jka \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')) d\varphi'$$

$e^x \simeq 1 + x$  si  $x \rightarrow 0$

$$= a I_0 \left[ \int_0^{2\pi} \hat{\rho}' d\varphi' + \int_0^{2\pi} \hat{\rho}' jka \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' \right]$$

ha aparecido un término extra que no se anula

$$= jka^2 I_0 \sin \theta \int_0^{2\pi} \hat{\rho}' \cos(\varphi - \varphi') d\varphi'$$

$$= jka^2 I_0 \sin \theta \int_0^{2\pi} [(\hat{\rho}' \cdot \hat{\theta}) \hat{\theta} + (\hat{\rho}' \cdot \hat{\rho}) \hat{\rho} + (\hat{\rho}' \cdot \hat{r}) \hat{r}] \cos(\varphi - \varphi') d\varphi'$$

Descomponemos  $\hat{\rho}'$  en sus 3 componentes esféricas para obtener las componentes esféricas de  $\vec{N}$ .

La componente  $N_r$  no nos interesa, puesto que no se usa para calcular E y H por tanto ni nos molestamos con ella

$\hat{\rho}' = -\sin \varphi' \hat{x} + \cos \varphi' \hat{y}$
$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$
$\hat{\rho} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$
$\hat{\rho}' \cdot \hat{\theta} = -\sin \varphi' \cos \theta \cos \varphi + \cos \varphi' \cos \theta \sin \varphi$ $= \cos \theta (\sin \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi' \cos \varphi)$ $= \cos \theta (\sin(\varphi - \varphi'))$
$\hat{\rho}' \cdot \hat{\rho} = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi'$ $= \cos(\varphi - \varphi')$

$$\left. \begin{cases} \hat{\rho}' \cdot \hat{\theta} = \cos \theta (\sin(\varphi - \varphi')) \\ \hat{\rho}' \cdot \hat{\rho} = \cos(\varphi - \varphi') \\ \hat{\rho}' \cdot \hat{r} = \text{no nos interesa} \end{cases} \right\}$$

queda:

$$= jka^2 I_0 \sin \theta \cos \theta \int_0^{2\pi} \sin(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' \hat{\theta} + jka^2 I_0 \sin \theta \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi - \varphi') d\varphi' \hat{\rho}$$

$\int_0^{2\pi} \sin \cos = 0$   
 $\int_0^{2\pi} \cos^2 = \pi$  ya que  $\sin \perp \cos$  y por tanto

Así pues, ya tenemos el vector de radiación:

$$\vec{N} = jka^2 I_0 \pi \sin \theta \hat{\rho}$$

(y tal vez alguna componente en  $\hat{r}$  que no nos interesa)

A partir del vector de radiación  $\vec{N} = jka^2 I_0 \pi \text{sen} \theta \hat{\phi}$

obtenemos el potencial vector  $\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \vec{N}$

$$\vec{A} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} jk I_0 \pi a^2 \text{sen} \theta \hat{\phi}$$

Como ya tenemos  $\vec{A}$  en esféricas; hacemos directamente:

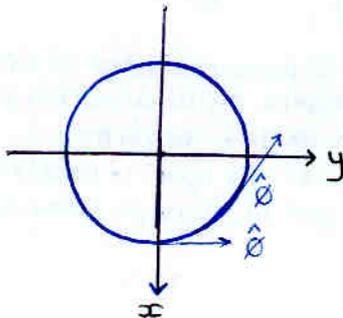
$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= -j\omega A_\theta \\ E_\phi &= -j\omega A_\phi \\ E_r &= 0 \end{aligned} \right\}$$

por eso no  
hacia falta  $N_r$

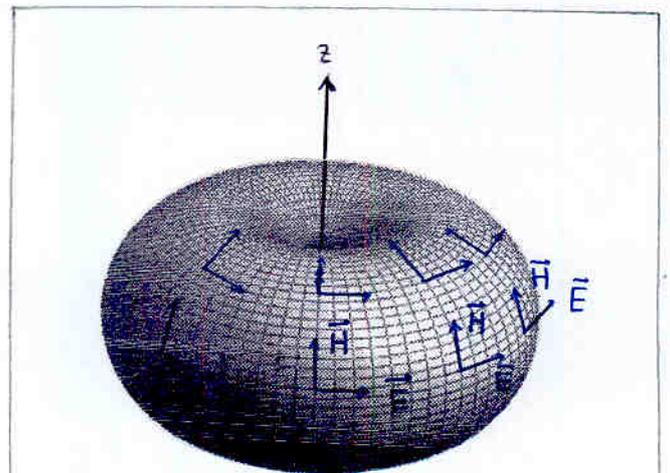
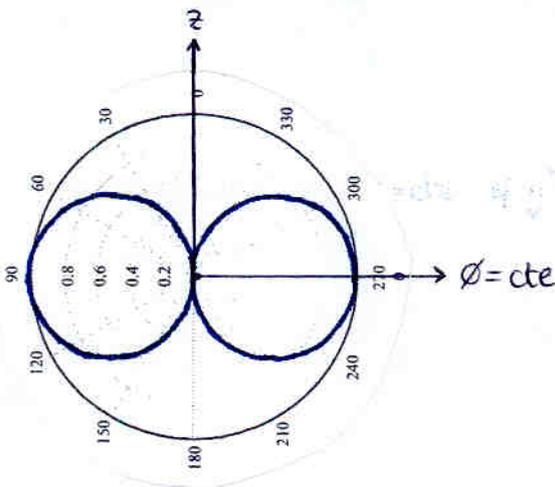
$$\vec{E} = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} jk I_0 \pi a^2 \text{sen} \theta \hat{\phi}$$

El diagrama de radiación:  $\vec{E} = E_0 \cdot \text{sen} \theta \hat{\phi}$

Plano E  $\left\{ \begin{array}{l} \text{incluya } \hat{\phi} \rightarrow \text{dirección de } \vec{E} \\ \text{incluya } \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{máximo de } \vec{E} \end{array} \right.$



Plano H  $\left\{ \begin{array}{l} \text{incluya } \hat{r} \times \hat{\phi} = -\hat{\theta} \rightarrow \text{dirección de } \vec{H} \text{ (} \vec{E} \times \vec{H} = \hat{r} \text{)} \\ \text{incluya } \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{máximo de } \vec{E} \end{array} \right.$



$\vec{E}$ : polarización lineal  $\hat{\phi}$

El diagrama es igual que el del dipolo, pero la polarización es diferente

Potencia radiada

$$W_{\text{rad}} = \iint_S \frac{|E|^2}{\eta} ds = \iint_S \frac{|E_\phi|^2}{\eta} \overbrace{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}^{ds} = \underbrace{\frac{\pi \eta}{6} (k \cdot a)^4 I_0^2}_{R_{\text{rad}}}$$

$$R_{\text{rad}} = 20\pi^2 (ka)^4 [\Omega]$$

Resistencia de radiación menor que el dipolo.  
Hay técnicas para incrementarla

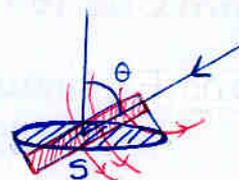
Directividad

$$D_{\text{max}} = 1.5$$

El diagrama es igual al de un dipolo

Longitud efectiva

$$\vec{l}_{\text{ef}} = \frac{N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi}}{I_0} = jk \underbrace{\frac{\pi a^2}{S}}_{S} \sin \theta \hat{\phi}$$



La longitud efectiva mide, además de lo bien que recibe, lo bien que emite:

$$\vec{E} = j\omega \frac{\mu}{4\pi r} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 \cdot \vec{l}_{\text{ef}}$$

es como proyectar el área de la espira en la dirección perpendicular a la que incidimos (i.e. la que será atravesada por el campo magnético)

### 3.3 Dipolos y espiras de formas arbitrarias

#### Dipolos

$$\vec{N} = \int_{l'} \vec{I}(\vec{r}') e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} dl' \approx \boxed{\int_{l'} \vec{I}(\vec{r}') dl' = \vec{N}}$$

1 electricamente pequeño

No es más que la suma de los vectores de las corrientes

Dipolos de cualquier forma



≡



≡



Intuitivamente, los lados se 'cancelan' entre sí, ya que los aproximamos como si estuvieran en el origen todos los  $dl'$

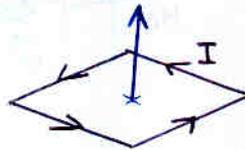
#### Espiras

$$\vec{N} = \int_{l'} \vec{I}(\vec{r}') e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} dl' = \underbrace{\int_{l'} \vec{I}(\vec{r}') dl'}_0 + jk \int_{l'} \vec{I}(\vec{r}') (\hat{r}\cdot\vec{r}') dl'$$

1 +  $jk\hat{r}\cdot\vec{r}'$   
electricamente pequeño.  
Aproximación de Taylor

Definimos: momento dipolar:

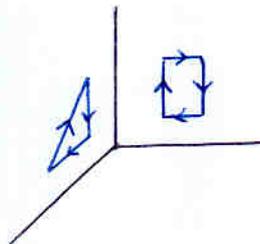
$$\vec{m} = \iint_{s'} \vec{I} \, d\vec{s}$$



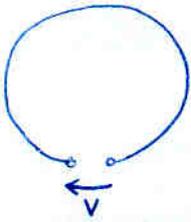
Se puede entonces demostrar mediante análisis vectorial:

$$\vec{N} = jk (\vec{m} \times \hat{r})$$

Fácil de usar para cualquier espira



### 3.4 Espiras con núcleo de ferrita



Ley de Faraday  $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$

$$\iint \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = -j\omega\mu \iint \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

Teorema Stokes  $\downarrow$

$$\underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}}_V = -j\omega\mu \iint \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

se obtiene una tensión proporcional al campo magnético que lo atraviesa

se suelen llamar : detectores de campo magnético

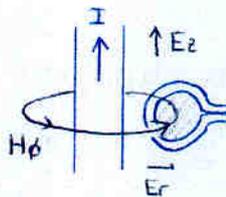
se tiene que  $R_{rad} \propto \mu r^2 \cdot N^2$   
 $\uparrow$  número de espiras

se puede aumentar fácilmente  $R_{rad}$  aumentando  $\mu$  y haciendo  $N$  espiras

$R_{rad \text{ con ferrita con } N \text{ espiras}} = R_{rad} \cdot N^2 \cdot \mu r^2$

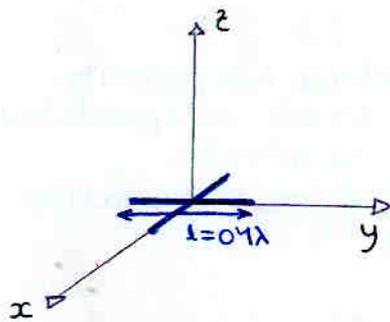
Aplicaciones

Detectar corriente por un cable



$H_\phi \propto I$   
 a diferencia de  $E_z, E_r$

Problema: Dos dipolos elementales cruzados



a) Campo radiado y diagramas en XY, YZ

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I \\ I_y &= j \cdot I \end{aligned} \right\} \text{ los dipolos tienen corriente} \\ \text{desfasada } 90^\circ$$

Calcularemos  $\vec{N}$  por superposición

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{N}_x + \vec{N}_y \\ &= I l \hat{x} + j I l \hat{y} \\ &= I l (\hat{x} + j \hat{y}) \end{aligned}$$

sabiendo:  
Antena Elemental  
 $\vec{N} = I \cdot l \cdot \hat{u}$

Pasando  $\vec{N}$  a esféricas:

$$\begin{aligned} N_\theta &= \vec{N} \cdot \hat{\theta} \\ N_\phi &= \vec{N} \cdot \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} N_\theta = I l (\hat{x} + j \hat{y}) \cdot (\cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}) \\ N_\phi = I l (\hat{x} + j \hat{y}) \cdot (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_\theta = I \cdot l \cdot \cos \theta (\cos \phi + j \sin \phi) \\ N_\phi = I \cdot l \cdot (-\sin \phi + j \cos \phi) \end{cases}$$

Y obtenemos  $\vec{E}$

$$\vec{E} = -j\omega (A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi})$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -j\omega \left( \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} [N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi}] \right) \\ &= -j\omega \left( \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I l [\cos \theta (\cos \phi + j \sin \phi) \hat{\theta} + (-\sin \phi + j \cos \phi) \hat{\phi}] \right) \end{aligned}$$

¿qué diagrama dibujamos? ¿ $E_\theta$ ,  $E_\phi$ ,  $|E|$ ,  $|E|^2 \propto P$ ?

Dibujaremos  $|E|^2 = |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2$

Plano XY: Particularizamos  $\theta = \pi/2$

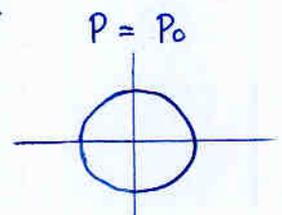
$$N_\theta = I \cdot l \cdot \cos \pi/2 (\cos \phi + j \sin \phi) = 0$$

$$N_\phi = I \cdot l \cdot (-\sin \phi + j \cos \phi) = I \cdot l \cdot j \cdot (\cos \phi + j \sin \phi)$$

$$\vec{E} = -j\omega \left( \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I l (\cos \phi + j \sin \phi) j \hat{\phi} \right) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I l e^{i\phi} \hat{\phi}$$

Gracias al desfase en cuadratura nos sale omnidir.  
 $|E|$  no dependerá de  $\phi$  (ya que  $|e^{i\phi}| = 1$ )

Por tanto  $P = P_0$



Esto nos permite reescribir  $\vec{E}$

$$\vec{E} = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{N}_{rad}$$
$$= -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot I(0) \cdot \vec{e}_y$$

La longitud efectiva nos permite comparar antenas con independencia de la corriente de entrada

Es una comparación más equitativa que usar  $N_{rad}$

$$\vec{N} = -N_z \sin \theta \hat{\theta}$$
$$= -Ih \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\vec{e}_y(\theta, \phi) = \frac{\vec{N}}{I} = -h \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\boxed{e_{y,max} = h}$$

Plano YZ

Tomo  $\phi = \frac{\pi}{2}$

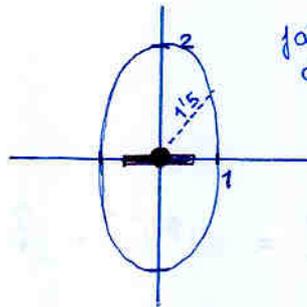
Aunque esto será un semiplano, por simetría será igual al otro semiplano

$$\vec{E} = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I \cdot l (j) \cdot (\cos\theta \hat{\theta} + j\hat{\phi})$$

$$|\vec{E}|^2 = |E_{\theta}|^2 + |E_{\phi}|^2$$

↓

$$P = P_0 \cdot (\cos^2\theta + 1)$$

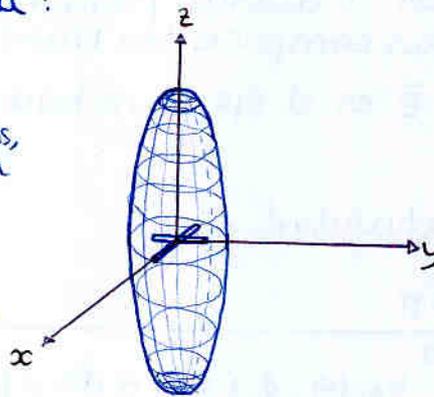


facil de dibujar dando valores

El diagrama en 3D queda:

como ves no es igual a sumar los diagramas de los dos dipolos, ya que el diagrama representa el módulo.

El diagrama creado por la superposición de ambos será el módulo de la suma de campos, no es igual a la suma de los módulos (i.e. suma de los diagramas)  $|x+y| \neq |x|+|y|$



Al ser polarización circular, no tiene sentido hablar de Plano E y Plano H

b) Calcular la polarización en direcciones:

(i)  $(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2})$

(ii)  $(\theta = \frac{\pi}{4}, \phi = 0)$

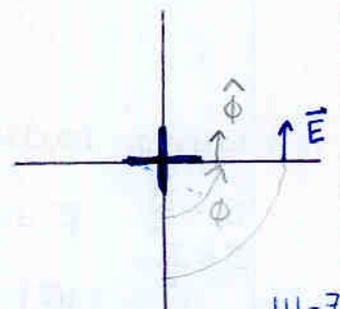
(iii)  $(\theta = 0)$

$$\vec{E} = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I \cdot l \cdot e^{i\phi} (\cos\theta \hat{\theta} + j\hat{\phi})$$

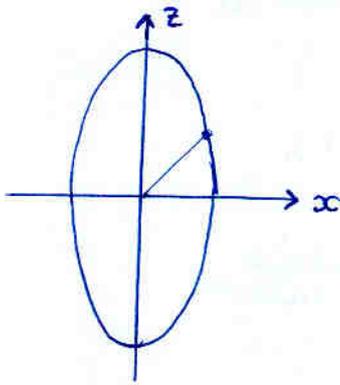
No hay más que particularizar cada dirección

(i)  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , → se anula la componente  $\hat{\theta}$ .

será polarización lineal (es lógico porque en esa dirección uno de los dipolos no radia ya que solo tiene componente  $\hat{\phi}$ )



(ii)  $\theta = \frac{\pi}{4}, \phi = 0$



Tenemos

$$\vec{E} \propto \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\theta} + j\hat{\phi} \right)$$

$|E_{\theta}| \neq |E_{\phi}|$  } Polarización  
desfase  $\pi/2$  } elíptica

(iii)  $\theta = 0$   $\vec{E} \propto e^{j\phi} (\hat{\theta} + j\hat{\phi}) \rightarrow$  Polarización Circular

Nota: en la dirección del eje z, x e y ya son transversales a la propagación (cuando pasamos a esféricas, lo hacemos para obtener las componentes transversales a la propagación) Para estudiar  $\vec{E}$  en el eje z, no hace falta pasar a polares.

c) Hallar la directividad

$$D_{max} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} t_N(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi}$$

Tenemos  $P = P_0 \cdot (\cos^2 \theta + 1)$  al ser omnidireccional, esta expresión es válida para todo  $\phi$

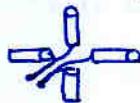
normalizando:  $t_N(\theta, \phi) = \frac{1}{2} (\cos^2 \theta + 1)$

La integral es sencilla, pero de todas formas sabemos que saldrá 1'5

d) Rrad de un dipolo aislado

$$R_{rad} = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 = 8 \Omega$$

si consideramos los dos dipolos, ya veremos más adelante que se alimenta así



y se tiene el paralelo:  $4\Omega$

c) campo radiado a 1km cuando  $I = 1A$

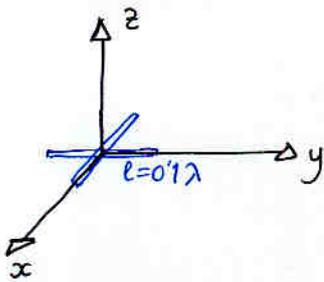
$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \vec{E} = \omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I l \hat{\theta} = \frac{k\eta}{4\pi} I l \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{\theta}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad |E| = \frac{60\pi}{r} \cdot 1 \cdot 0.1 = 18.85 \text{ mV/m}$$

(Mismo problema: más sucio pero más detallado)

Problema: Dos dipolos elementales cruzados

a) Campos radiados y diagramas XY, YZ



$$\begin{aligned} \vec{N}_1 &= I_1 l \hat{x} & I_1 &= I \\ \vec{N}_2 &= I_2 l \hat{y} & I_2 &= jI \end{aligned}$$

$$\vec{N} = I l (\hat{x} + j\hat{y})$$

pasar a esféricas

$$\begin{aligned} N_\theta &= \vec{N} \cdot \hat{\theta} = I l (\cos\theta \cos\phi + j \cos\theta \sin\phi) \\ &= I l \cos\theta (\cos\phi + j \sin\phi) \\ &= I l \cos\theta e^{j\phi} \end{aligned}$$

$$N_\phi = \vec{N} \cdot \hat{\phi} = I l (-\sin\phi + j \cos\phi)$$

$$\vec{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} I l (\cos\theta (\cos\phi + j \sin\phi) \hat{\theta} + (-\sin\phi + j \cos\phi) \hat{\phi})$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = -j\omega A_\theta = -j\omega I l \cos\theta (\cos\phi + j \sin\phi) \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \\ E_\phi = -j\omega A_\phi = -j\omega I l (-\sin\phi + j \cos\phi) \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \end{cases}$$

Diagrama XY

$$\theta = \pi/2 \quad \cos\theta = 0$$

$$\vec{E}(\theta = \pi/2) = -j\omega I l (-\sin\phi + j \cos\phi) \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

$$|\vec{E}(\theta = \pi/2)| = |j\omega I l \sin\phi + \omega I l \cos\phi| \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

$$= \omega I l |\cos\phi + j \sin\phi| \mu / 4\pi r$$

$$= \omega I l |e^{j\phi}| \frac{\mu}{4\pi r}$$

$$= \omega I l \mu / 4\pi r$$

$$|\vec{E}(\theta = \pi/2)|^2 = \frac{\omega^2 I^2 l^2 \mu^2}{(4\pi r)^2}$$

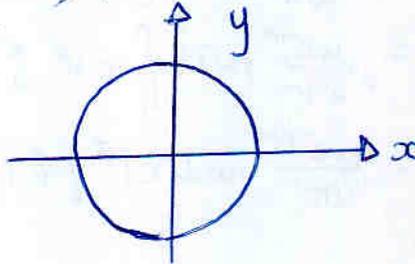


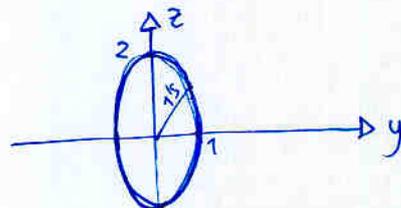
Diagrama YZ

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad \begin{matrix} \cos\phi = 0 \\ \sin\phi = 1 \end{matrix} \Rightarrow \vec{E}(\phi = \frac{\pi}{2}) = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (-j\omega I l) \cos\theta (j) \hat{\theta} + \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (-j\omega I l) (-1) \hat{\phi}$$

$$= \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} j\omega I l (-j \cos\theta \hat{\theta} + 1 \cdot \hat{\phi})$$

$$|\vec{E}(\phi = \frac{\pi}{2})| = \frac{\mu}{4\pi r} \omega I l \sqrt{1^2 + \cos^2\theta}$$

$$|\vec{E}(\phi = \frac{\pi}{2})|^2 = \left( \frac{\mu \omega I l}{4\pi r} \right)^2 (1 + \cos^2\theta)$$



b) Calcular la polarización en direcciones

i)  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{matrix} \cos \theta = 0 & \cos \phi = 0 \\ \sin \theta = 1 & \sin \phi = 1 \end{matrix} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} j\omega I l \hat{\phi}$$

polarización lineal en  $\hat{\phi}$

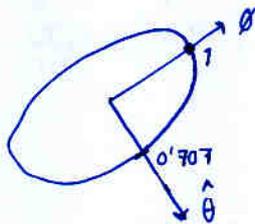
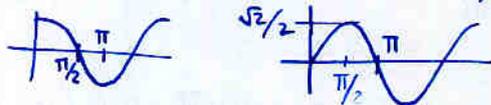
ii)  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\phi = 0$

$$\begin{matrix} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \phi = 1 \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin \phi = 0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} (-j\omega I l) \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\theta} + \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} (\omega I l) \hat{\phi}$$

$$= \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \omega I l \left( \hat{\phi} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\theta} \right)$$

Polarización elíptica

$$\vec{E}(r,t) = E_0 \cdot \left( \cos(\omega t) \hat{\phi} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \hat{\theta} \right)$$



(iii)  $\theta = 0$

$$\begin{matrix} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} j\omega I l \left[ (\cos \phi + j \sin \phi) \hat{\theta} + (-\sin \phi + j \cos \phi) \hat{\phi} \right]$$

$$= \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} j\omega I l \left[ e^{j\phi} \hat{\theta} + j e^{j\phi} \hat{\phi} \right]$$

$$= \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} j\omega I l e^{j\phi} \left[ \hat{\theta} + j \hat{\phi} \right]$$

$$\vec{E}(r,t) = E_0 \cdot \left[ \cos(\omega t) \hat{\theta} + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{\phi} \right]$$

c) Hallar la directividad

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (-j\omega I l) \cos\theta (\cos\phi + j\sin\phi) \\ \quad = -j\omega \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} I l \cos\theta e^{j\phi} \\ E_\phi = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (-j\omega I l) (j\cos\phi - \sin\phi) \\ \quad = -j\omega \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} I l j e^{j\phi} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{E}|^2 &= |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \\ &= \left(\frac{\omega \mu I l}{4\pi r}\right)^2 + \left(\frac{\omega \mu I l}{4\pi r}\right)^2 \cos^2\theta \\ &= \left(\frac{\omega \mu I l}{4\pi r}\right)^2 (1 + \cos^2\theta) \\ &= E_0 \cdot \frac{(1 + \cos^2\theta)}{2} \\ &= E_0 \cdot t(\theta) \end{aligned}$$

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi t(\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\phi} = \frac{2}{\int_0^\pi t(\theta) \sin\theta \, d\theta} = \frac{2}{\int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos^2\theta}{2}\right) \sin\theta \, d\theta}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{1}{2} \sin\theta \, d\theta + \int_0^\pi \frac{1}{2} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} [-\cos\theta]_0^\pi + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \cos^3\theta\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} [-\cos\pi + \cos 0] + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \cos^3\pi + \frac{1}{3} \cos^3 0\right] \\ &= \frac{1}{2} [1 + 1] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$D = \frac{2}{4/3} = \frac{3}{2} = 1.5$$

### Bestimmung der Nullstellen

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = 0 \quad | \text{quadratische Formel}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

$$\text{Nullstelle: } x = 1$$

$$f(x) = (x-1)^2$$

$$f(1) = (1-1)^2 = 0$$

$$f(2) = (2-1)^2 = 1$$

$$f(3) = (3-1)^2 = 4$$

$$f(4) = (4-1)^2 = 9$$

$$f(5) = (5-1)^2 = 16$$

$$f(x) = (x-1)^2$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 1$$

$$f(x) = (x-1)^2$$

$$f(1) = 0$$

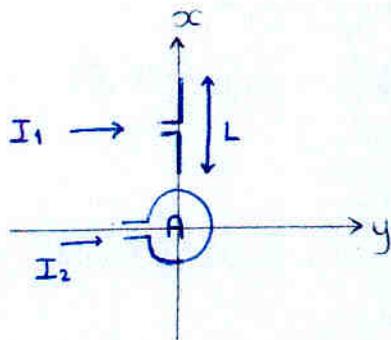
$$f(2) = 1$$

$$f(3) = 4$$

$$f(4) = 9$$

$$f(5) = 16$$

# Problema: Radiogoniometro

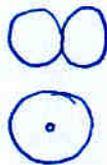


se busca un diagrama con un sólo nulo para poder localizar eficazmente.

Por ser eléctricamente pequeño, despreciamos las interferencias debidas a la distinta posición del dipolo y la espira. sepondremos ambos en el origen

Se pide: relación  $I_1/I_2$  para obtener un nulo en la dirección  $\hat{y}$

con el módulo del campo de cada antena no parece posible



Pero sumar módulos no se puede

" el módulo de la suma no se puede intentar ver con la suma de los módulos "

Para el dipolo:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_1 \cdot L \hat{x}$$

$$A_{1\theta} = A_{1x} \cos \theta \cos \phi$$

$$A_{1\phi} = -A_{1x} \sin \phi$$

$$\vec{E}_1 = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_1 L (\cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi})$$

Para la espira:

$$\vec{E}_2 = \frac{k^2 \eta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_2 A \sin \theta \hat{\phi}$$

Particularizando en el eje y:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1|_{\text{eje } y} &= j \frac{k\eta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_1 L \hat{\phi} \\ \vec{E}_2|_{\text{eje } y} &= \frac{k^2 \eta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_2 A \hat{\phi} \end{aligned} \right\}$$

exigimos

$$|\vec{E}_1| + |\vec{E}_2| = 0$$

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = jk \frac{A}{L}}$$

Habría que usar un

El campo total, si  $\frac{I_1}{I_2} = jk \frac{A}{L}$

$$\vec{E} = \frac{k^2 L}{4\pi} I_2 A [\cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - (\sin \phi - \sin \theta) \hat{\phi}]$$

En el plano XY: ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ )

$$\vec{E} = -\frac{k^2 I}{4\pi} I_2 L [\sin \phi - 1] \hat{\phi}$$

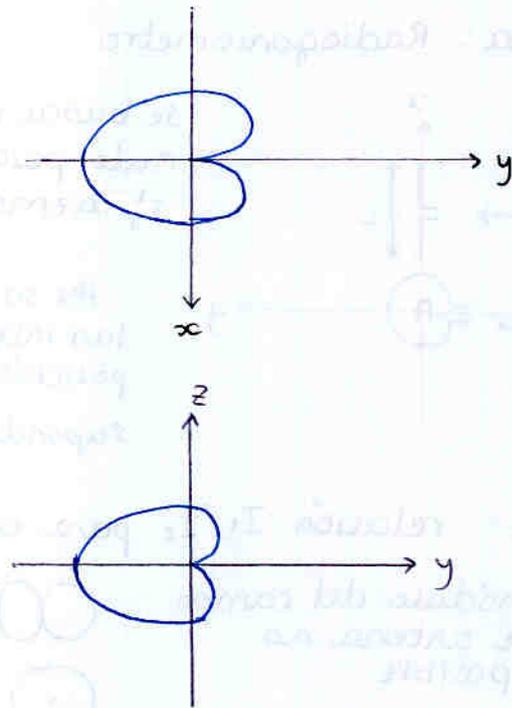
En el plano YZ:

semiplano  $\phi = \pi/2$

$$\vec{E} = \frac{k^2 I}{4\pi} I_2 A [\sin \theta - 1] \hat{\phi}$$

semiplano  $\phi = 3\pi/2$

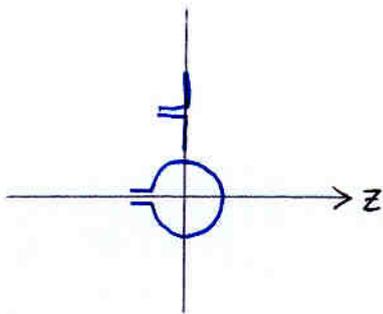
$$\vec{E} = \frac{k^2 I}{4\pi} I_2 A [\sin \theta + 1] \hat{\phi}$$



Parece intuitivo pensar que y será un eje de simetría.

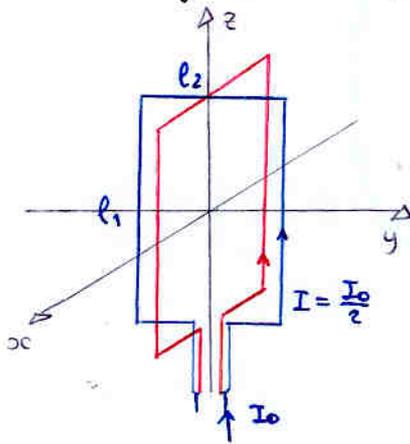
Las ecuaciones saldría más sencillas si el eje de simetría fuera z, ya que sólo dependería de  $\phi$ .

Pero entonces ya no serviría ecuación del campo de la espira conocida; habría que usar el momento dipolar



Problema:

Radiogoniómetro formado por 2 espiras



a) Diagrama de radiación  
Representarlo en  $z=0, y=0, \phi = \frac{3\pi}{4}$

$$\vec{N} = jk \vec{m} \times \vec{r}$$

$$\vec{m}_1 = l_1 l_2 I \hat{y}$$

$$\vec{m}_2 = l_1 l_2 I \hat{z}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \vec{N}_1 &= jk \vec{m}_1 \times \vec{r} \\ &= jk l_1 l_2 I \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\phi \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= jk I l_1 l_2 (\cos\theta \hat{x} - \sin\theta \cos\phi \hat{z})$$

$$\vec{N}_2 = jk \vec{m}_2 \times \vec{r} = jk I l_1 l_2 (-\cos\theta \hat{y} - \sin\theta \sin\phi \hat{z})$$

Pasando a esféricas:

$$\begin{cases} N_{1\theta} = \vec{N}_1 \cdot \hat{\theta} = N_{1x} \cos\theta \cos\phi - N_{1z} \sin\theta \\ \quad = jk I l_1 l_2 \cos\phi \\ N_{1\phi} = \vec{N}_1 \cdot \hat{\phi} = -jk I l_1 l_2 \cos\theta \sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{2\theta} = -jk I l_1 l_2 \sin\phi \\ N_{2\phi} = -jk I l_1 l_2 \cos\theta \cos\phi \end{cases}$$

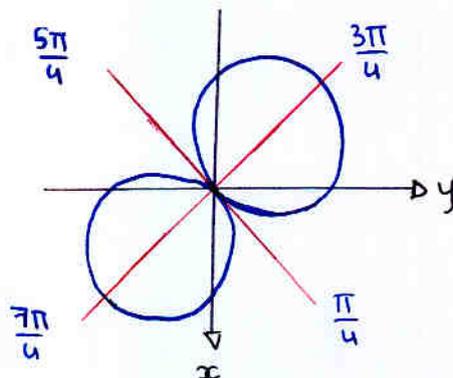
El diagrama de radiación

$$d_N(\theta) = \frac{\sqrt{|N_{\theta}|^2 + |N_{\phi}|^2}}{|N_{\max}|}$$

$$\begin{aligned} N_{\theta} &= jk I l_1 l_2 (\cos\phi - \sin\phi) \\ N_{\phi} &= -jk I l_1 l_2 \cos\theta (\cos\phi + \sin\phi) \end{aligned}$$

Plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$d_N(\phi) = \left| \frac{\cos\phi - \sin\phi}{\sqrt{2}} \right|$$



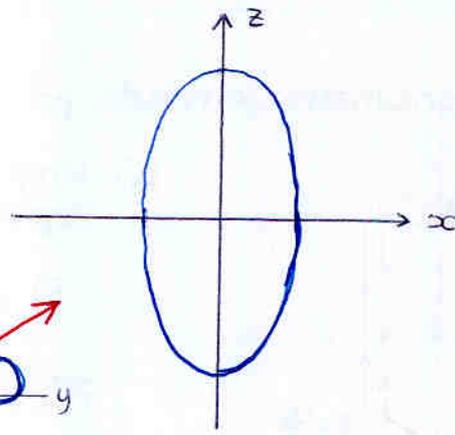
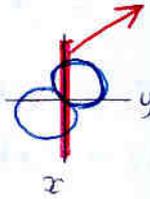
plano  $y=0$  ( $\phi=0$ )

se obtiene

$$dN(\theta, \phi=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \theta}$$

Es un corte un poco extraño.

Hagámoslo en  $\phi = \frac{3\pi}{4}$



plano  $\phi = \frac{3\pi}{4}$

$N_\theta = \text{cte}$   
 $N_\phi = 0$  } omnidireccional

Resulta que la unión de dos espiras cruzadas equivale a una espira en la "posición intermedia"

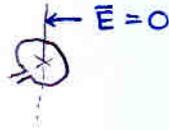


equivalente en todos los aspectos si los alimentamos en paralelo

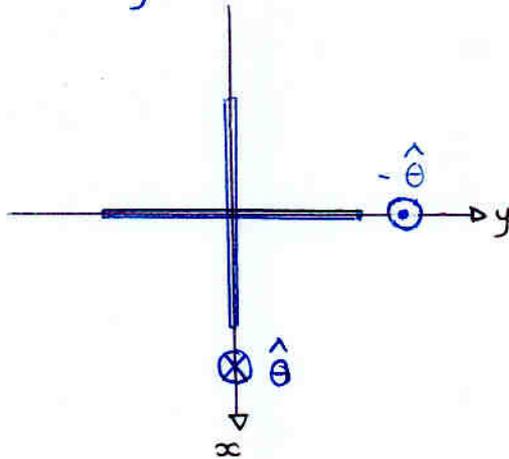
¿se podría conseguir que tuviera sólo un nulo para funcionar como radiogoniómetro? → posible problema de examen

b) Hallar la polarización

Recuerda: la polarización de una espira está "según  $\phi$ "   
 Recuerda: el campo se anula en la dirección perpendicular a una espira



sabiendo estas dos cosas obtenemos la polarización en los planos  $x$  e  $y$



Para la polarización en el eje  $z$ .

se recomienda ver la expresión en coordenadas rectangulares, sabiendo que  $x$  e  $y$  son las coordenadas transversales  
 → polarización  $\hat{x} - \hat{y}$

**i** nota:  
 d → diagrama radiación del campo  
 t → diagrama radiación de potencia

c) Directividad

$$t_N(\theta) = \frac{1}{2} [(\cos \phi - \sin \phi)^2 + \cos^2 \theta (\cos \phi + \sin \phi)^2]$$

Habría que integrar  $t_N(\theta)$

o mucho mejor, saber que dos espiras con misma  $I$  equivalen a una espira, se obtiene  $D_{max} = 1.5$

1)  $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Graph of  $f(x) = \frac{1}{x}$  is shown below. The curve is a hyperbola with two branches, one in the first quadrant and one in the third quadrant. The x-axis and y-axis are asymptotes. The graph is symmetric with respect to the origin.

Graph

The graph shows the function  $f(x) = \frac{1}{x}$  plotted on a Cartesian coordinate system. The x-axis and y-axis are shown. The curve consists of two branches: one in the first quadrant and one in the third quadrant. The x-axis and y-axis are asymptotes. The graph is symmetric with respect to the origin.



The graph shows the function  $f(x) = \frac{1}{x}$  plotted on a Cartesian coordinate system. The x-axis and y-axis are shown. The curve consists of two branches: one in the first quadrant and one in the third quadrant. The x-axis and y-axis are asymptotes. The graph is symmetric with respect to the origin.

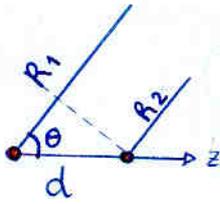
$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

The graph shows the function  $f(x) = \frac{1}{x}$  plotted on a Cartesian coordinate system. The x-axis and y-axis are shown. The curve consists of two branches: one in the first quadrant and one in the third quadrant. The x-axis and y-axis are asymptotes. The graph is symmetric with respect to the origin.

The graph shows the function  $f(x) = \frac{1}{x}$  plotted on a Cartesian coordinate system. The x-axis and y-axis are shown. The curve consists of two branches: one in the first quadrant and one in the third quadrant. The x-axis and y-axis are asymptotes. The graph is symmetric with respect to the origin.

# Tema 4. Arrays

## 1. Interferencia entre ondas



Tenemos dos ondas que llegan a un mismo punto (aproximación de rayos paralelos)

$$\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2}$$

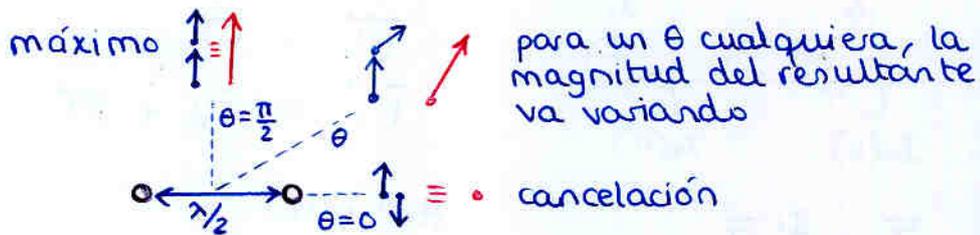
$$\approx \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jk(R_1 - d \cos \theta)}}{R_2}$$

$$R_2 = R_1 - d \cos \theta$$

$$= \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} (1 + e^{jkd \cos \theta})$$

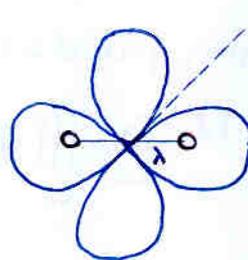
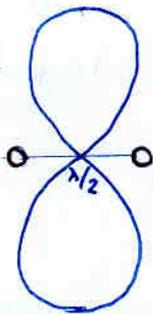
Lo que tenemos es una suma de fasores

ejemplo intuitivo: sumando fasores como flechas

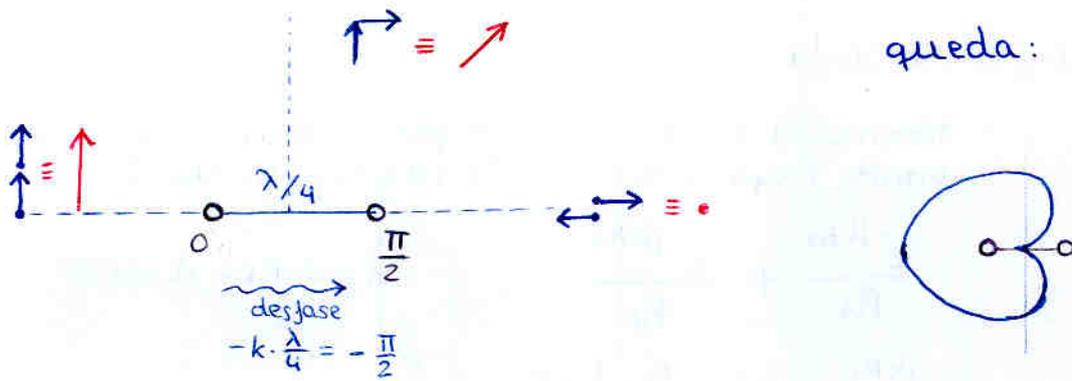


Lo que queda es:

Lo que causa la cancelación es una diferencia de caminos de  $\lambda/2$  que implica un desfase de  $\pi$

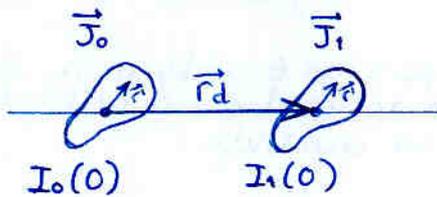


Ademas podemos recurrir a cambiar la fase de cada elemento



## 2. Agrupaciones lineales

Supongamos 2 antenas iguales, alimentadas de forma distinta



$$\vec{J}_1 = \frac{I_1}{I_0} \vec{J}_0$$

de forma que

$$\begin{aligned} \vec{r}'_1 &= \vec{r}' \\ \vec{r}'_2 &= \vec{r}_d + \vec{r}' \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{N}_0 + \vec{N}_1 \\ &= \iiint_{V_0} \vec{J}_0 \cdot e^{ik\hat{r}\vec{r}'} dV_0' + \iiint_{V_1} \vec{J}_1 \cdot e^{ik\hat{r}(\vec{r}_d + \vec{r}')} dV_1' \end{aligned}$$

Puesto que  $\vec{r}_d$  es constante, puedo sacarlo de la integral

$$\vec{N} = \underbrace{\iiint_{V_0} \vec{J}_0 \cdot e^{ik\hat{r}\vec{r}'} dV_0'}_{\vec{N}_0} + e^{ik\hat{r}\cdot\vec{r}_d} \frac{I_1}{I_0} \underbrace{\iiint_{V_0} \vec{J}_0 \cdot e^{ik\hat{r}\vec{r}'} dV_0'}_{\vec{N}_0}$$

$$\vec{N} = \vec{N}_0 \left[ 1 + \frac{I_1}{I_0} e^{ik\hat{r}\cdot\vec{r}_d} \right]$$

es un escalar



- no cambia la polarización
- muestra la interferencia entre las dos antenas

El campo lejano ahora se considera

$$R > \frac{2D^2}{\lambda} = \frac{2d^2}{\lambda}$$

viendo la antena como una sola

Parámetros con los que jugamos

$$\bar{N} = \bar{N}_0 \left( 1 + \frac{I_1}{I_0} e^{i k \hat{r} \cdot \vec{r}_d} \right)$$

1) Espaciado entre elementos  $d$

2) la relación entre corrientes

$$\frac{I_1}{I_0} = A e^{i\alpha} \quad \begin{array}{l} A: \text{amplitud relativa} \\ \alpha: \text{fase relativa} \end{array}$$

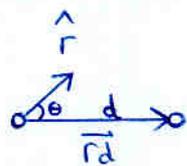
3) Número de elementos  $N$

4) Elemento radiante ( $\bar{N}_0$ ).

Nota: si el array es muy grande, se modifica tanto que el diagrama viene dado casi exclusivamente por  $(1 + \frac{I_1}{I_0} e^{i k \hat{r} \cdot \vec{r}_d})$  y  $\bar{N}_0$  sólo determina la polarización.

Factor de Array :

$$FA = \left| 1 + \frac{I_1}{I_0} e^{i k \hat{r} \cdot \vec{r}_d} \right| = \left| 1 + A e^{i\alpha} e^{i k \hat{r} \cdot \vec{r}_d} \right|$$



$$\hat{r} \cdot \vec{r}_d = d \cos \theta$$

$$FA = \left| 1 + A e^{i\alpha} e^{i k d \cos \theta} \right| = \left| 1 + A \cdot e^{i(kd \cos \theta + \alpha)} \right|$$

Por tanto:

$$FA(\psi) = \left| 1 + A e^{i\psi} \right|$$

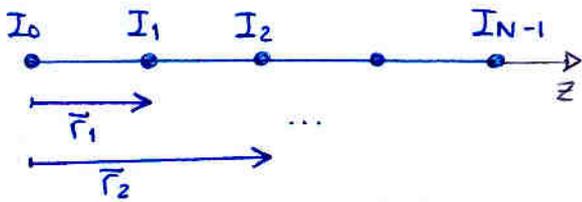
definimos  $\psi = kd \cos \theta + \alpha$   
 desfase total entre elementos consecutivos (para una  $\theta$  dada)  $\uparrow$  desfase por diferencia de caminos  $\uparrow$  desfase en la alimentación

Y se puede hacer:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \cdot FA$$

$\bar{E}_0 = 1$  si suponemos elementos isotrópicos (y ya escalaremos adecuadamente)

# Array de N antenas



Escribimos

$$\frac{I_n}{I_0} = a_n e^{i\alpha n}$$

Normalmente están equiespaciados y con comportamiento lineal de la fase

$$\alpha_n = n \cdot \alpha$$

$$\vec{r}_n = n \cdot d \cdot \hat{z}$$

Entonces se tiene:

$$\vec{r}_n \cdot \hat{r} = nd \cos \theta$$

El vector de radiación:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{N}_0 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \dots + \vec{N}_{N-1} \\ &= \vec{N}_0 + \vec{N}_0 \cdot a_1 e^{i\alpha} e^{ikd \cos \theta} + \vec{N}_0 \cdot a_2 e^{i2\alpha} e^{ik2d \cos \theta} + \dots \\ &= \vec{N}_0 \cdot (a_1 e^{i\alpha} e^{ikd \cos \theta} + a_2 e^{i2\alpha} e^{ik2d \cos \theta} + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{N}_0 \left( \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\alpha} e^{jkn d \cos \theta} \right) \\ &= \vec{N}_0 \left( \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn \underbrace{(kd \cos \theta + \alpha)}_{\psi}} \right) \end{aligned}$$

$$FA(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\psi}$$

que es la transformada discreta de Fourier entre dos dominios "un poco raros"

$$n \longleftrightarrow \psi$$

→ la diferencia de fase entre los rayos que salen de elementos consecutivos

Nota:

$\vec{r}_n \cdot \hat{r} = nd \cos \theta$  gracias a que el array está en el eje z

$$\psi = kd \cos \theta + \alpha = k_z \cdot d + \alpha$$

si el array no está orientado en  $\hat{z}$

$$\psi = \vec{k} \cdot \vec{r}_d + \alpha$$

$$\psi = \vec{k} \cdot \vec{r}_d + \alpha$$

ejemplo: :



$$\psi_x = kd \sin \theta \cos \phi + \alpha$$



$$\psi_y = kd \sin \theta \sin \phi + \alpha$$



$$\psi_z = kd \cos \theta + \alpha$$

$$FA(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (e^{i\psi})^n$$

$z = e^{i\psi}$

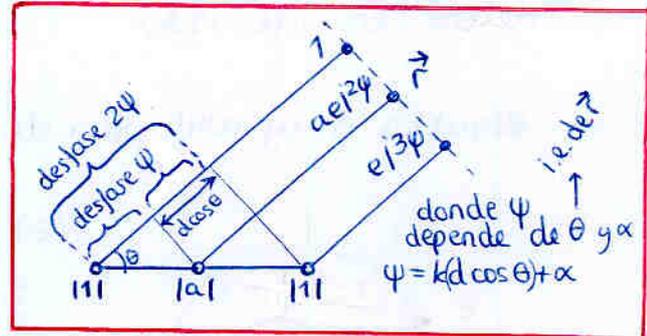
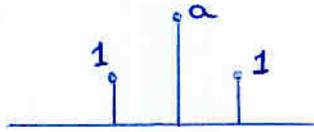
se puede interpretar como un polinomio

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$$

ejemplo

Agrupación de 3 antenas

$$FA(\psi) = 1 + a e^{i\psi} + e^{i2\psi}$$



Lo normal es normalizar la corriente respecto de la corriente en los extremos (que suele ser la misma)

$$P(z) = 1 + az + z^2$$

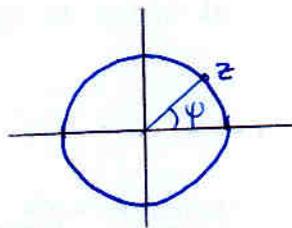
es una ecuación cuadrática  
i.e. tenemos dos ceros

$$\begin{cases} z_0 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} = e^{i\psi_0} \\ z_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} = e^{i\psi_1} = e^{-i\psi_0} \end{cases}$$

son ceros complejos conjugados

$$P(z) = (z - z_0)(z - z_1)$$

al ser  $z = e^{i\psi}$ , en realidad dentro del plano complejo nos movemos en la circunferencia unidad



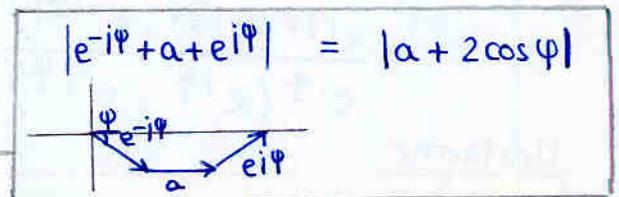
a cada posible  $\psi$  (diferencia de fase entre las antenas consecutivas en el array) le corresponde un valor de  $z$ .

Por tanto a los ceros  $z_0$  y  $z_1$  les corresponden los desfases  $\psi_0$  y  $\psi_1$

$$FA(\psi) = e^{i\psi} (e^{-i\psi} + a + e^{i\psi})$$

$$|FA(\psi)| = \underbrace{|e^{i\psi}|}_1 |e^{-i\psi} + a + e^{i\psi}|$$

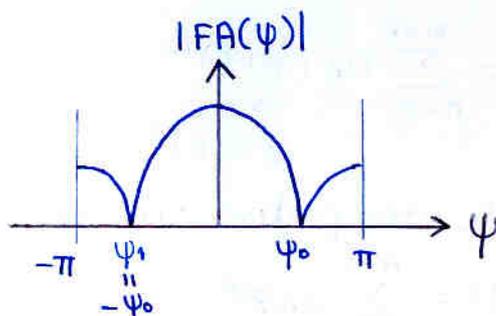
$$|FA(\psi)| = |a + 2 \cos \psi|$$



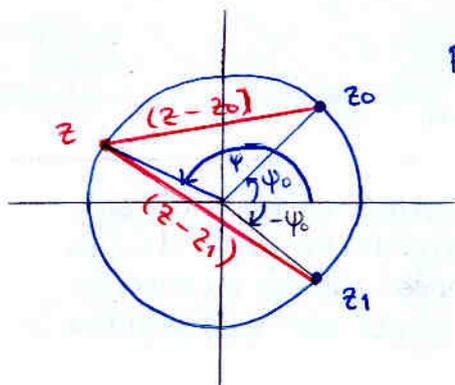
Representa la magnitud del diagrama para cada desfase  $\psi$  que variará según la dirección desde la cual miremos

$$|FA(\psi)| = |a + 2 \cos \psi|$$

resulta que los ceros de  $|FA(\psi)|$  corresponden a los ceros de  $P(z)$



Resulta muy útil para diseñar "intuitivamente"



$$P(z) = (z - z_0) \cdot (z - z_1)$$

### 4.3 Distribuciones de corriente

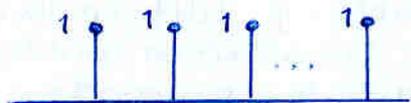
$$FA(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{in\psi}$$



$$\psi = kd \cos \theta + \alpha$$

representa la diferencia de fase entre elementos consecutivos

#### Uniforme



Nota: representamos las corrientes de cada elemento como una serie, normalizada al valor de los extremos.

$$FA(\psi) = 1 + e^{i\psi} + e^{2i\psi} + \dots + e^{(N-1)i\psi}$$

} suma de una serie geométrica

$$= \frac{e^{iN\psi} - 1}{e^{i\psi} - 1}$$

$$= \frac{e^{i\frac{N}{2}\psi} (e^{i\frac{N}{2}\psi} - e^{-i\frac{N}{2}\psi})}{e^{i\frac{\psi}{2}} (e^{i\frac{\psi}{2}} - e^{-i\frac{\psi}{2}})} = e^{i\frac{N-1}{2}\psi} \cdot \frac{\text{sen}(N\frac{\psi}{2})}{\text{sen}(\frac{\psi}{2})}$$

Uniforme:

$ FA(\psi)  = \left  \frac{\text{sen}(N\frac{\psi}{2})}{\text{sen}(\frac{\psi}{2})} \right $	$P(z) = \frac{z^N - 1}{z - 1}$
----------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------

se obtiene trivialmente haciendo:  
 $P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1}$

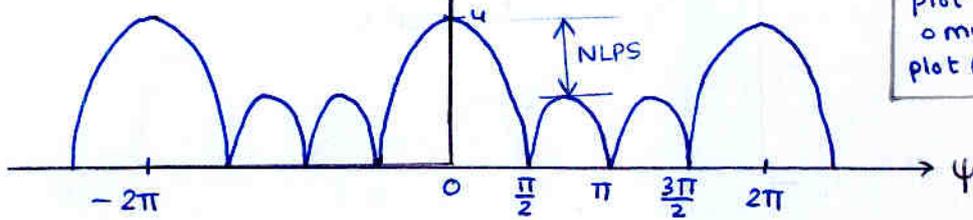
ejemplo: distribución uniforme con  $N=4$

veamos que aspecto tiene:

Es la DFT de una ventana rectangular discreta  $\rightarrow$  sinc periódica

$N=4$

$$|FA(\psi)| = \left| \frac{\text{sen}(2\psi)}{\text{sen}(\frac{\psi}{2})} \right|$$



```

en Matlab
x = [1 1 1 zeros(1,509)];
y = fft(x);
plot(y);
o mejor
plot((0:512)*2π/512, y);
    
```

se anula en:  $N \cdot \frac{\psi}{2} = n\pi \quad \psi = n \cdot \frac{2\pi}{N}$

cuidado:  $\psi$  no es un ángulo espacial, y  $FA(\psi)$  no es un diagrama de radiación (todavía)

La gráfica indica la amplitud a causa de la interferencia en función del desfase  $\psi$  entre elementos consecutivos en una dirección. Es lógico que sea  $2\pi$ -periódico

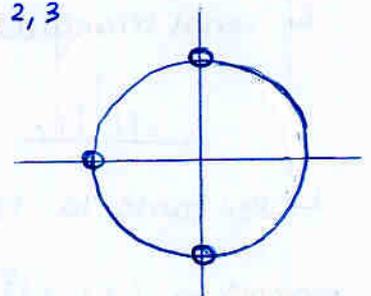
$$NLPS = 20 \log \frac{N}{|FA(\psi_{ls})|} = 20 \log \frac{N}{\frac{1}{\text{sen}(\frac{3\pi}{2N})}} \approx 20 \log \frac{N}{\frac{1}{\frac{3\pi}{2N}}} = 20 \log \frac{3\pi}{2}$$

los nulos son  $N \cdot \frac{\psi}{2} = n\pi$   
 $\psi = \frac{2n\pi}{N}$   
 el lóbulo secundario estará entre el 1º y 2º cero  
 $\psi_{ls} = \frac{2\pi/N + 4\pi/N}{2}$

$$P(z) = \frac{z^4 - 1}{z - 1}$$

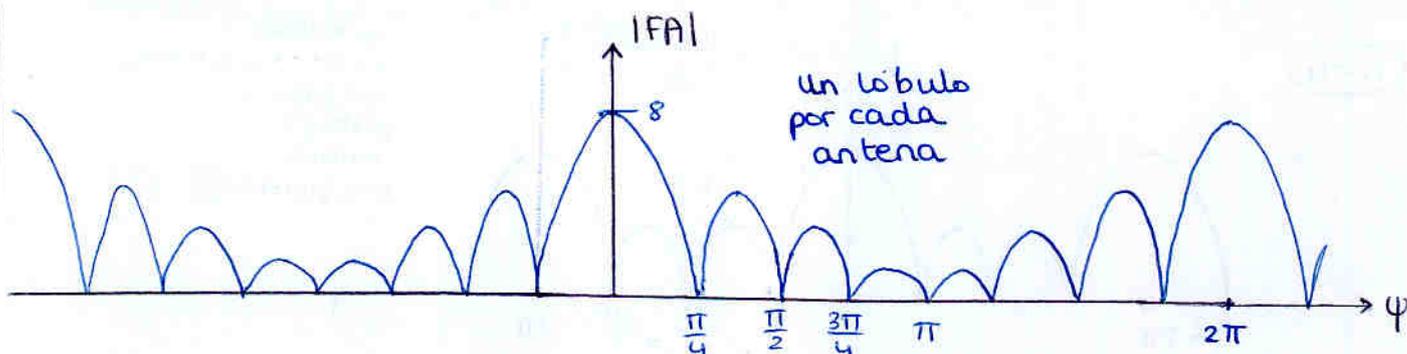
ceros:  $z = \sqrt[4]{1} = 1 \quad \left[ \frac{2k\pi}{4} \right] \quad k = 1, 2, 3$

polo:  $z = 1$  (cancela un polo)

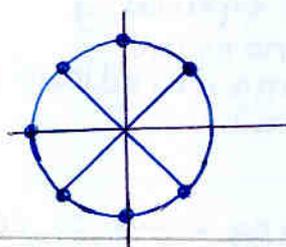


ejemplo: distrib. uniforme con  $N = 8$

$N = 8$   $|FA(\psi)| = \left| \frac{\text{sen}(4\psi)}{\text{sen}(\frac{\psi}{2})} \right|$

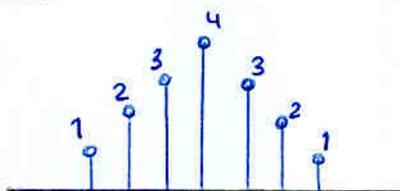


$p(z) = \frac{z^8 - 1}{z - 1}$       ceros:  $z_c = \sqrt[8]{1} \frac{2k\pi}{8} = 1 \frac{2k\pi}{8} \quad k = 1, 2, \dots, 7$



**Triangular**

ej  $N = 7$



sólo admite  $N$  impar

$FA(\psi) = 1 + 2e^{i\psi} + 3e^{i2\psi} + \dots + 2e^{i(N-2)\psi} + e^{i(N-1)\psi}$

Podemos utilizar las propiedades de la TF

↳ señal triangular es la convolución de dos señales rectangulares



↳ Por tanto la TF es el producto de las TF de las rectangulares

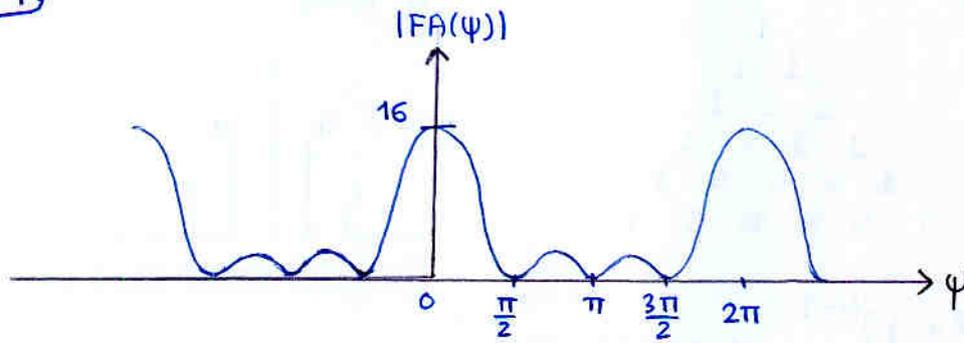
$FA(\psi) = (1 + e^{i\psi} + e^{i2\psi} + \dots + e^{i\frac{N-1}{2}\psi})^2$

$FA(\psi) = \left( \frac{\text{sen} \frac{N+1}{4} \psi}{\text{sen} \frac{\psi}{2}} \right)^2$

$P(z) = \left( \frac{z^{\frac{N+1}{2}} - 1}{z - 1} \right)^2$

**Triangular**  
Es una distrib. uniforme de  $\frac{N+1}{2}$  al cuadrado

$$N = 7$$



Es el  $FA(\psi)$  de la rectangular de 4 al cuadrado  
→ nulos más marcados (elevar al cuadrado reduce los números  $< 1$ )

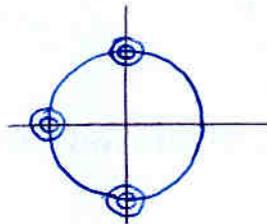
→ NLPS más acusada

$$NLPS_{\text{triang } 7} = 2 \cdot NLPS_{\text{rect } 4} \rightarrow 26'8 \text{ dB}$$

Si comparamos a igual  $N$

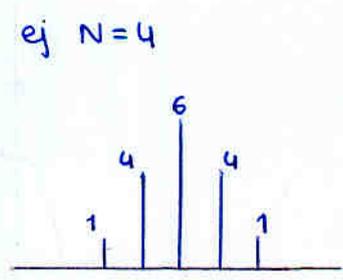
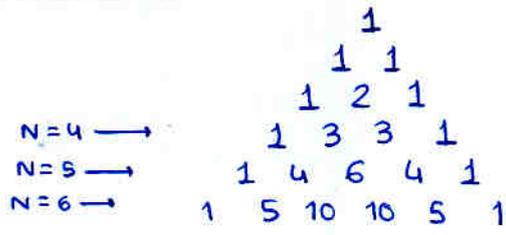
Uniforme  $\rightarrow$  Triangular  $\Rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Mayor ancho de haz principal} \\ \text{Mayor NLPS} \end{array} \right.$

$$P(z) = \left( \frac{z^4 - 1}{z - 1} \right)^2$$



son ceros dobles

Binómica

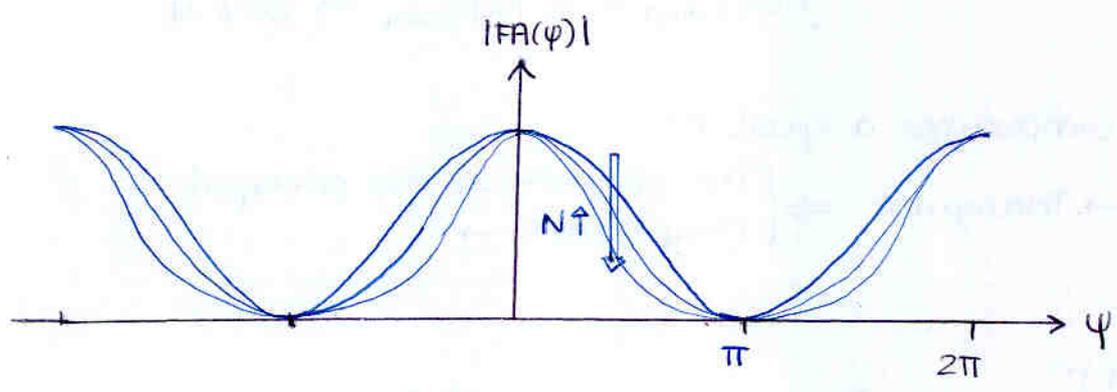


$$FA(\psi) = (e^{i\psi} + 1)^{N-1}$$

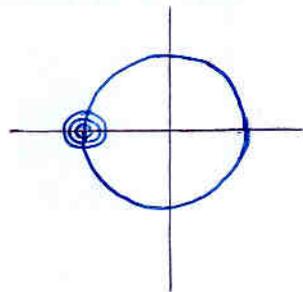
hacemos desaparecer la exponencial

$$= e^{i\frac{N-1}{2}\psi} (e^{i\frac{\psi}{2}} + e^{-i\frac{\psi}{2}})^{N-1}$$

$$|FA(\psi)| = 2^{N-1} \cos^{N-1}\left(\frac{\psi}{2}\right)$$



$$P(z) = (z+1)^{N-1}$$

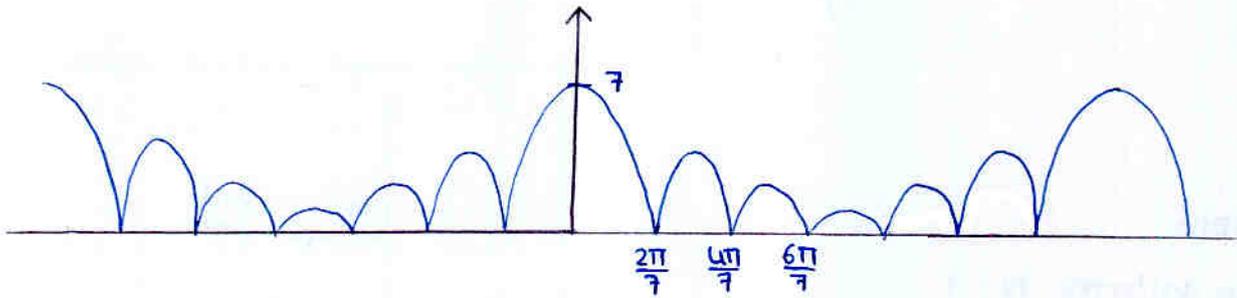


un cero múltiple

#### 4.4. Diagrama de radiación (método gráfico)

Haremos un ejemplo típico:

Array uniforme  $N=7$   $\rightarrow$   $|FA(\psi)| = \left| \frac{\text{sen}(7\frac{\psi}{2})}{\text{sen}(\frac{\psi}{2})} \right|$   
 $d = \lambda/2$   
 $\alpha = 0^\circ$



Si suponemos el array en eje z

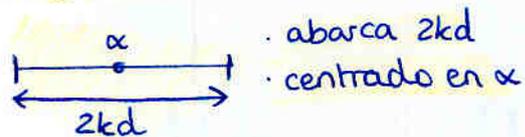


$$\Rightarrow \psi = kd \cos \theta + \alpha$$

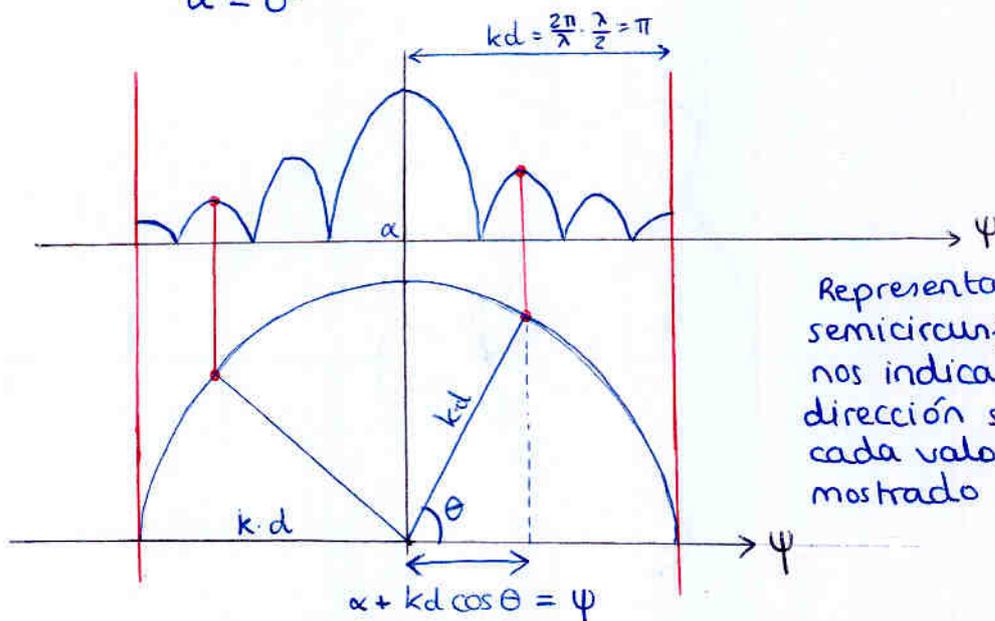
por tanto  $\theta \in [0, \pi]$

$$\psi \in [-kd + \alpha, kd + \alpha]$$

Tomamos sólo ese trozo:  
 margen visible del factor de array

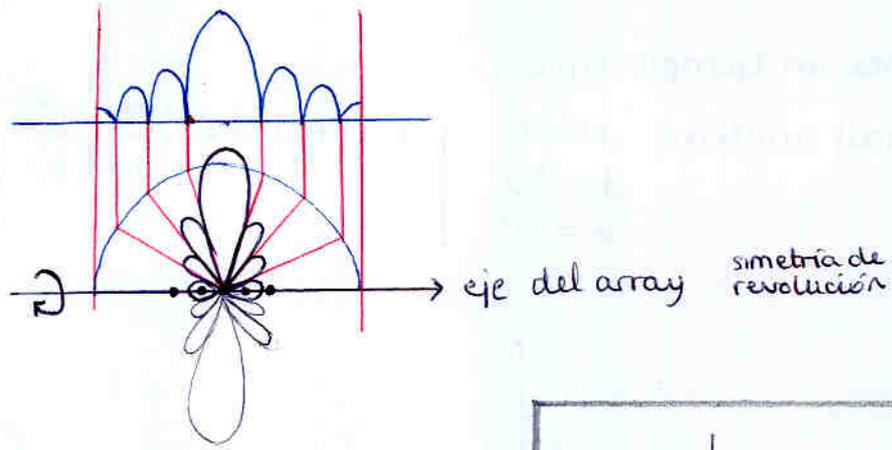


Para el caso  $d = \lambda/2$   
 $\alpha = 0^\circ$



Representamos una semicircunferencia que nos indica en que dirección se tiene cada valor de interferencia mostrado por FA

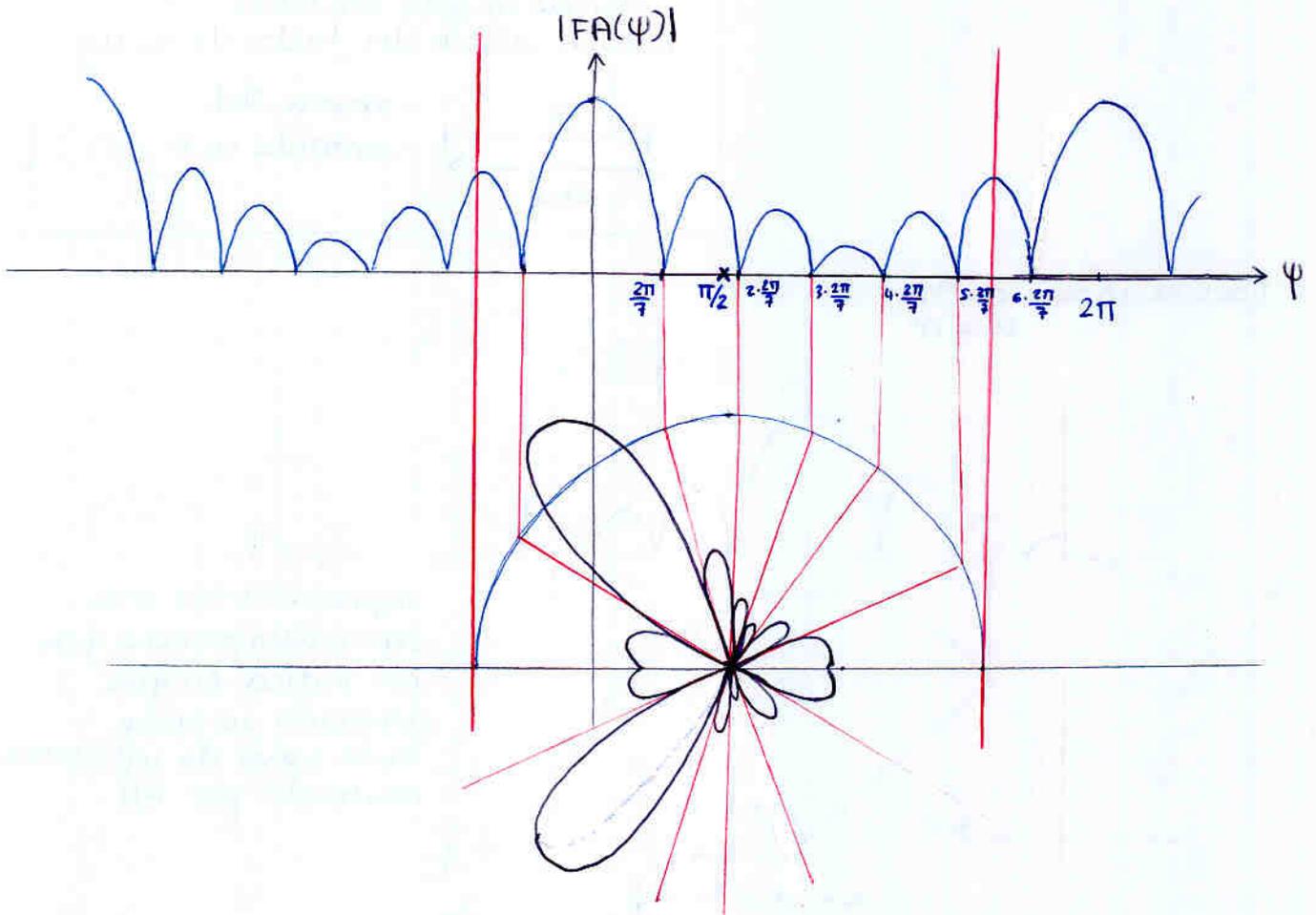
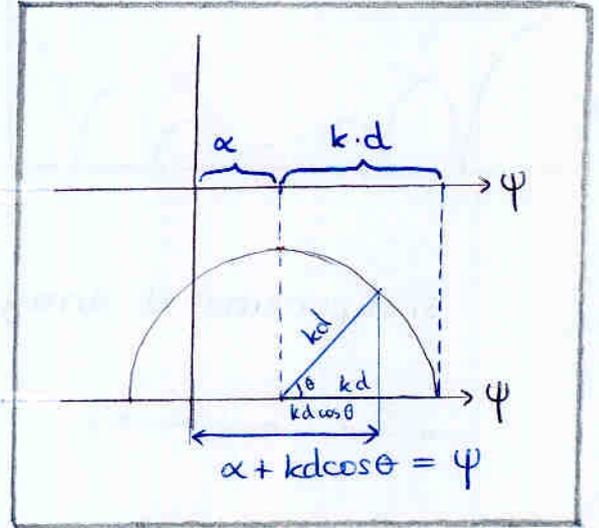
¡Muy fácil dibujar el diagrama!



Otro ejemplo:

array uniforme  $N=7$   
 $d = \lambda/2$   
 $\alpha = \pi/2$

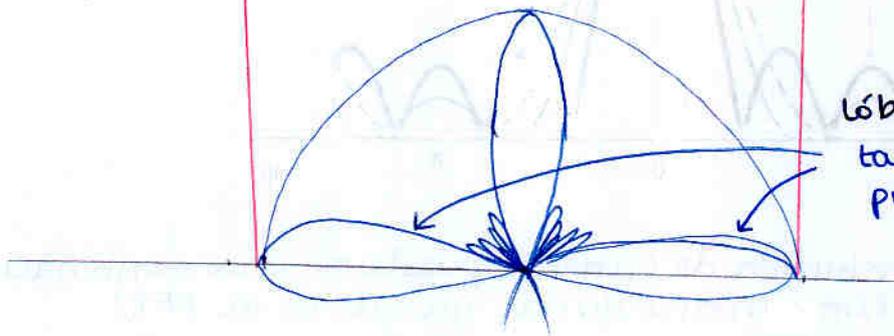
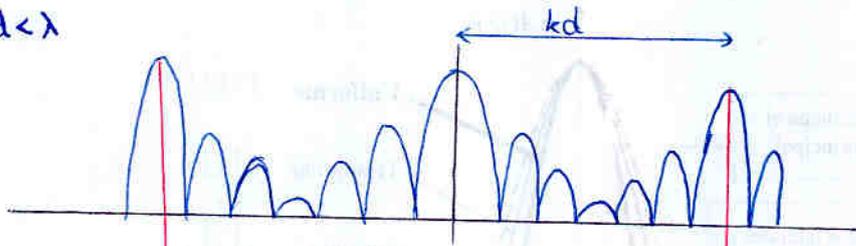
margen visible:  $\psi \in \left[-\pi + \frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2}\right]$   
 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$



¿Y si intento ahorrar antenas incrementando el espaciado entre ellas?

incremento  $d \rightarrow$  incremento  $k \cdot d \rightarrow$  margen visible

ej  $d < \lambda$

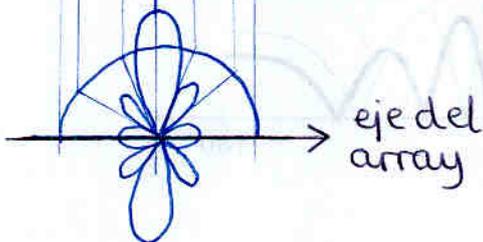
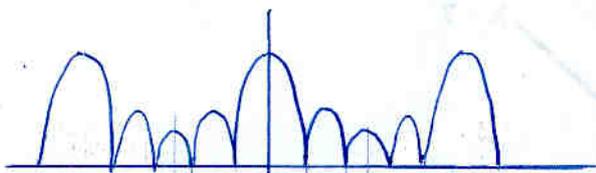


lóbulos de difracción tan grandes como el principal

Para evitar lóbulos de difracción:  $k \cdot d < 2\pi$   
 $d < \lambda$

Y además, si ajustamos mucho, estamos limitando el ángulo de barrido ( $\alpha$ )

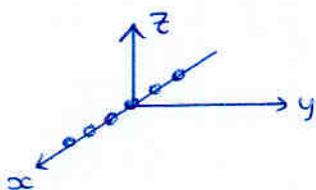
Colocando bien el diagrama de radiación



$$\begin{aligned} \psi_z &= kd \cos \theta + \alpha \\ \psi_x &= kd \sin \theta \cos \phi + \alpha \\ \psi_y &= kd \sin \theta \sin \phi + \alpha \end{aligned}$$

La proyección vale en cualquier eje

ejemplo: eje  $x$

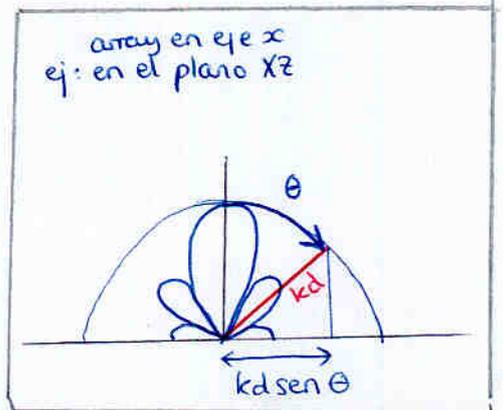


Dibujamos el diagrama en algún plano que incluya el eje  $x$   
 ejemplos

$$XY \Rightarrow \psi_x = kd \cos \phi + \alpha$$

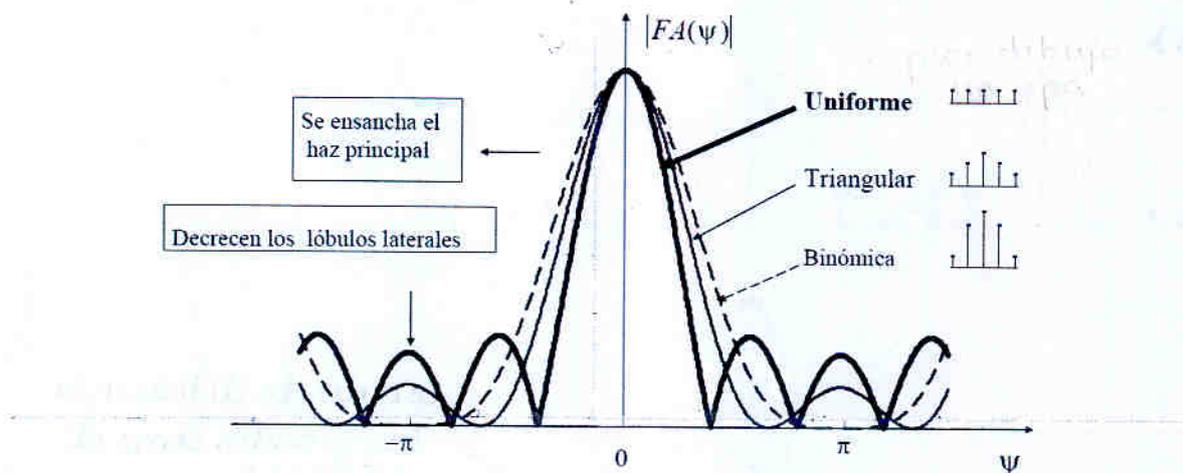
$$XZ \Rightarrow \psi_x = kd \sin \theta + \alpha$$

$\phi = 0$



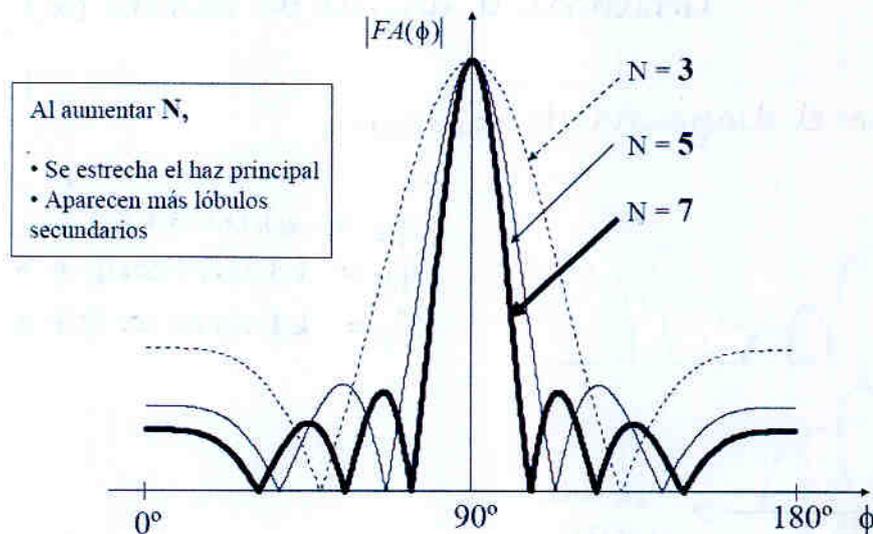
## 4.5 Influencia de los parámetros

→ Amplitud de la corriente

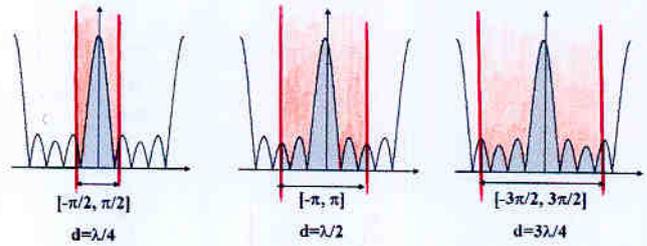
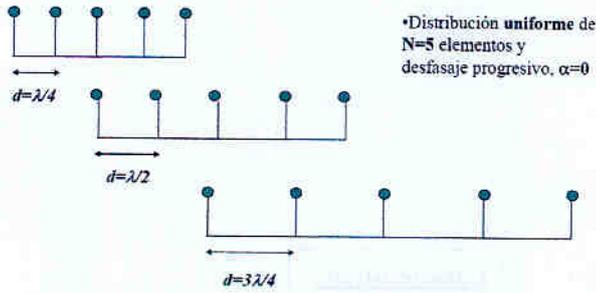


Además nuestra distribución de corriente puede ser una combinación lineal de las otras! (simplemente sumar, ya que es la DFT)

→ Número de elementos

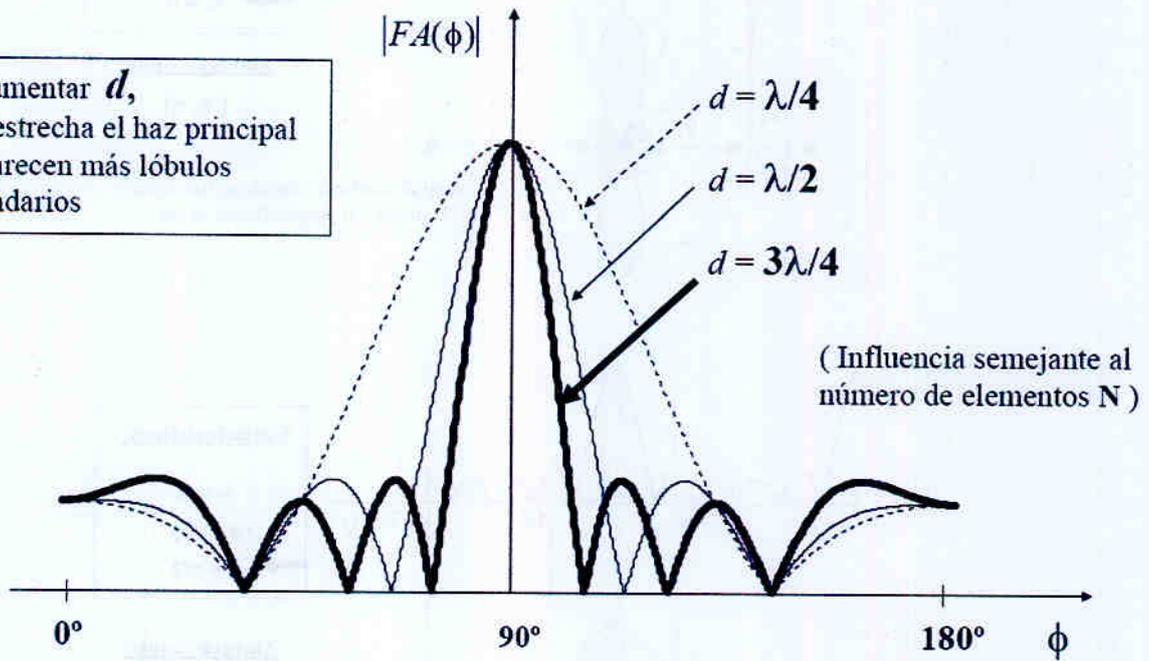


# → Espaciado entre elementos

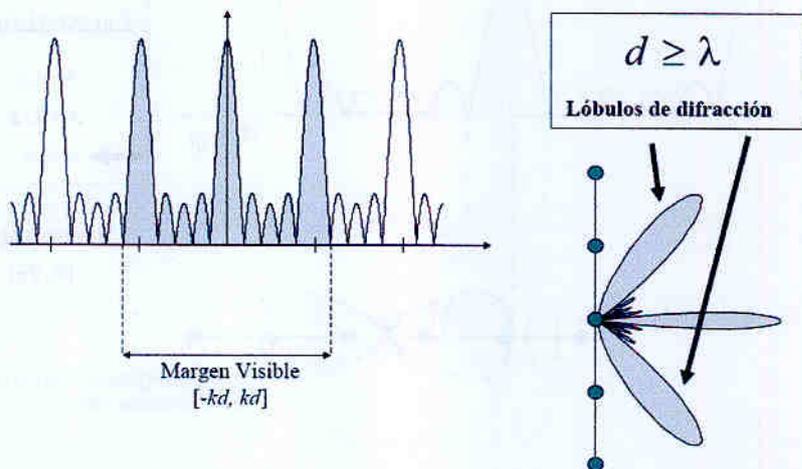


Al aumentar  $d$ ,

- Se estrecha el haz principal
- Aparecen más lóbulos secundarios

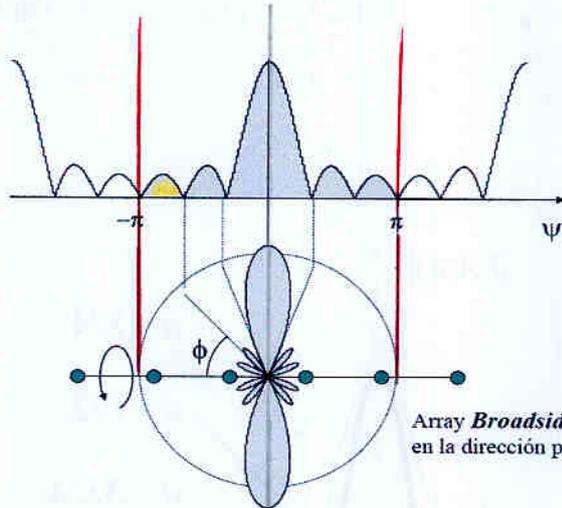
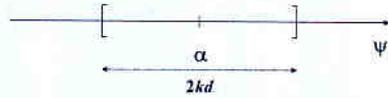


Un excesivo espaciado puede dar lugar a lóbulos de difracción



→ Desfase progresivo  $\alpha$

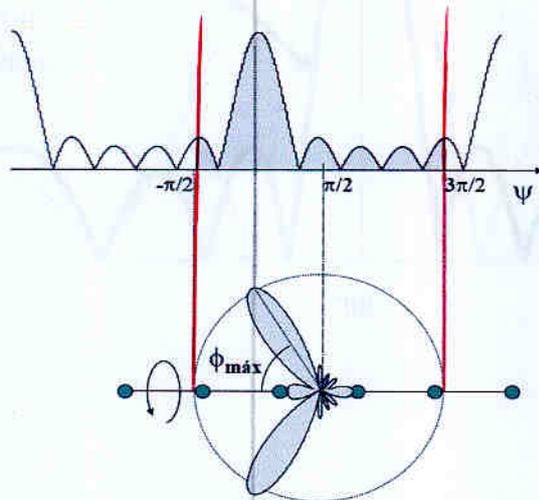
El margen visible abarca, M.V. =  $[-kd + \alpha, kd + \alpha]$



**Características:**  
 $N = 6$   
 $d = \lambda/2$   
 $\alpha = 0$

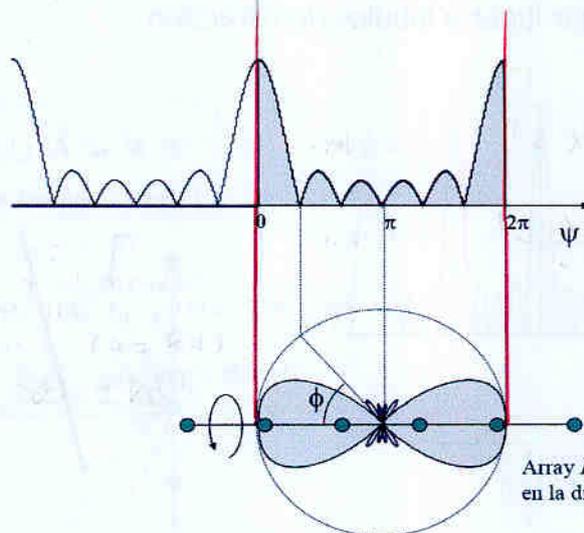
**Margen visible:**  
 $[-\pi, \pi]$

Array *Broadside* cuando el haz apunta en la dirección perpendicular al eje



**Características:**  
 $N = 6$   
 $d = \lambda/2$   
 $\alpha = \pi/2$

**Margen visible:**  
 $[-\pi/2, 3\pi/2]$

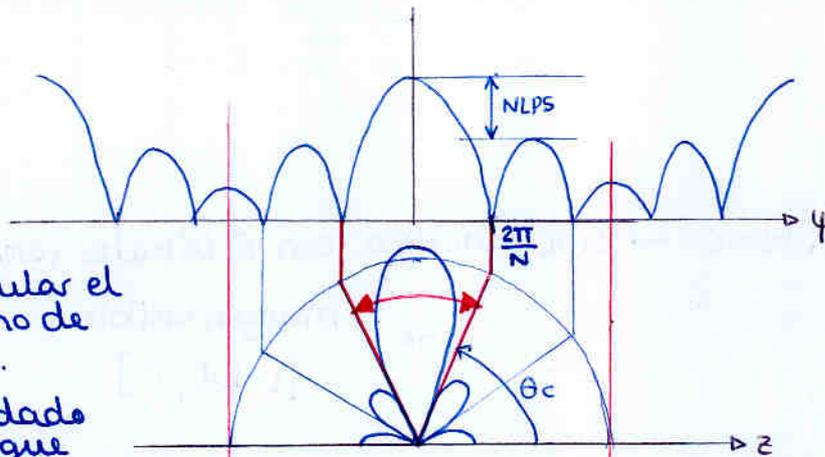


**Características:**  
 $N = 6$   
 $d = \lambda/2$   
 $\alpha = \pi$

**Margen visible:**  
 $[0, 2\pi]$

Array *Endfire* cuando el haz apunta en la dirección del eje

- Casos particulares
  - Array Broadside ( $\alpha = 0$ )



Calcular el ancho de haz.  
cuidado con que eje usamos

Por ej: si es el eje z  $\rightarrow \psi_c = kd \cos \theta = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \theta_c$   
 ancho de haz entre ceros:  

$$\Delta\theta_c = 2 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \theta_c \right)$$

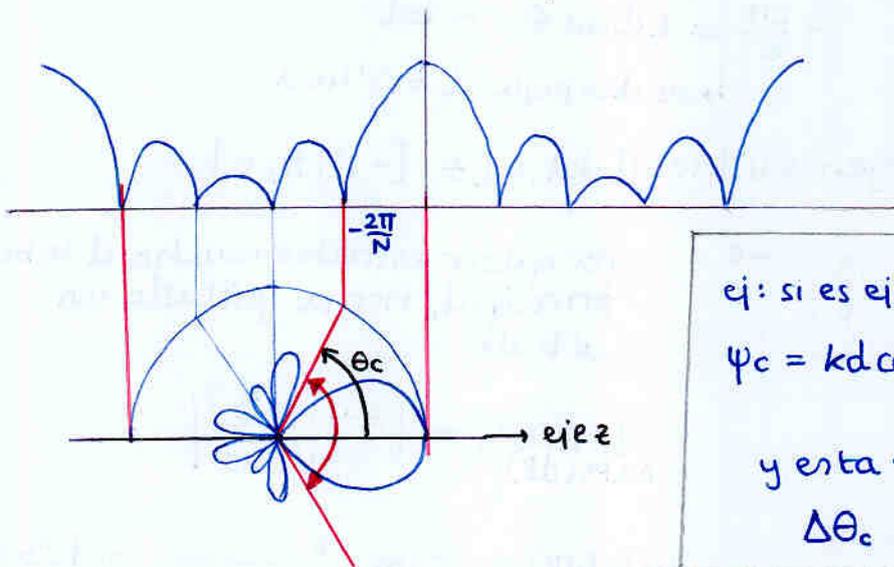
simplemente pensarlo bien

Hay fórmulas aproximadas para cuando  $N \uparrow \uparrow$

$$\Delta\theta_c \approx \frac{2\lambda}{Nd} \quad \Delta\theta_{-3dB} \approx 0.88 \frac{\lambda}{Nd}$$

se basan en aproximar cosas del tipo  $\sin x \approx x$

- Array Endfire ( $\alpha = \pm kd$ )



ej: si es eje z ! signos  

$$\psi_c = kd \cos \theta_c - k \cdot d = -\frac{2\pi}{N}$$

$$\downarrow$$

$$\theta_c$$
  
 y esta vez  

$$\Delta\theta_c = 2\theta_c$$

También hay fórmulas aproximadas

$$\Delta\theta_c \approx \sqrt{\frac{2\lambda}{Nd}} \quad \Delta\theta_{-3dB} \approx 2 \sqrt{0.88 \frac{\lambda}{Nd}}$$

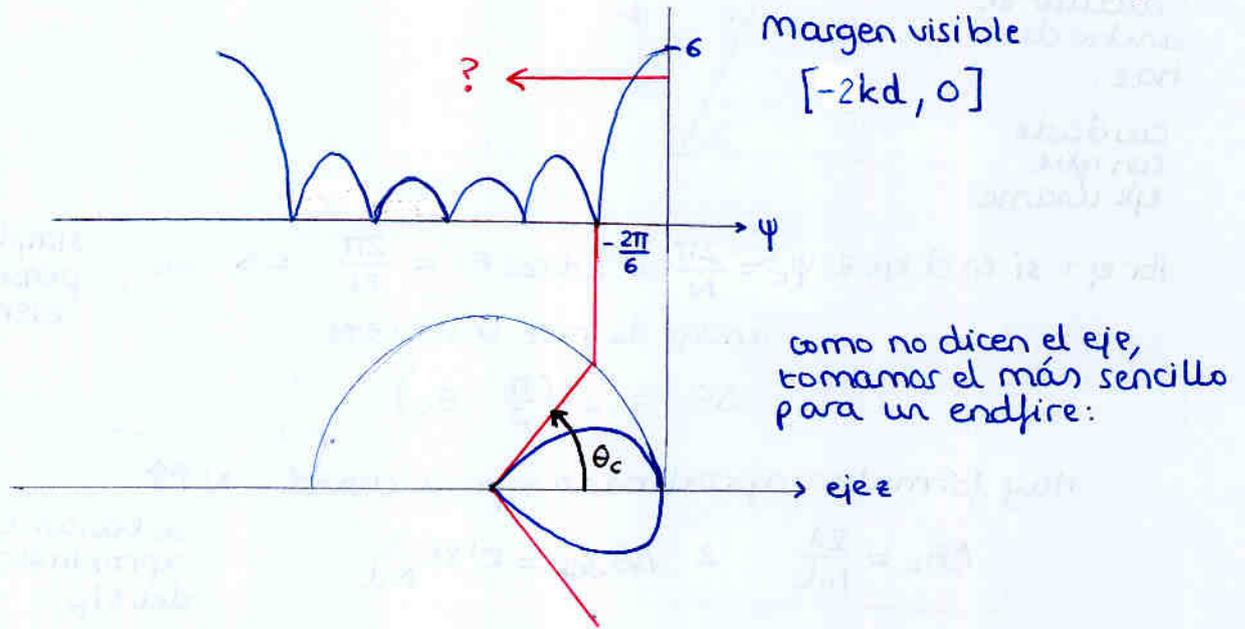
# Problema: agrupación uniforme endfire

Diseñar:

- endfire  $\rightarrow \alpha = -kd$
- $N = 6$
- uniforme
- $\Delta\theta_c = 100^\circ$

Tenemos:

- uniforme y con  $N = 6 \rightarrow$  sinc periódica con 6 lóbulos (ceros:  $\frac{2\pi}{6} \cdot n$ )

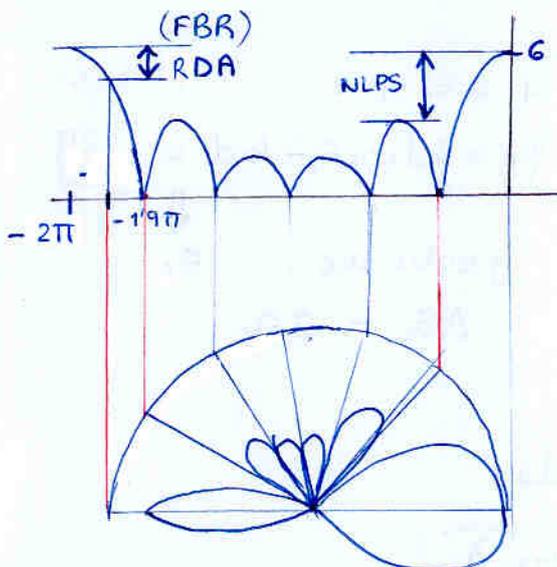


Buscamos  $\theta_c = 50^\circ$

$$-\frac{2\pi}{6} = kd \cos \theta_c - kd$$

$\hookrightarrow$  se despeja  $d = 0.46\lambda$

Por tanto: margen visible  $[-2kd, 0] = [-1.9\pi, 0]$



Por querer estrechar mucho el lóbulo principal, hemos pillado un lóbulo

$$|FA(\psi)| = \left| \frac{\text{sen}(6\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)} \right|$$

$$NLPS(\text{dB}) = 20 \log \frac{6}{|FA(\psi = -\frac{3\pi}{6})|} = 12.5 \text{ dB}$$

$$RDA(\text{dB}) = 20 \log \frac{6}{|FA(\psi = -1.9\pi)|} = 2.35 \text{ dB}$$

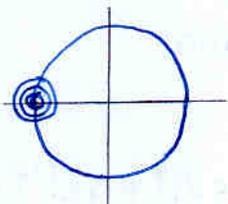
Problema:

$$d = 0.7\lambda$$

$$I = 1 : 4 : 6 : 4 : 1$$

a) ceros del polinomio

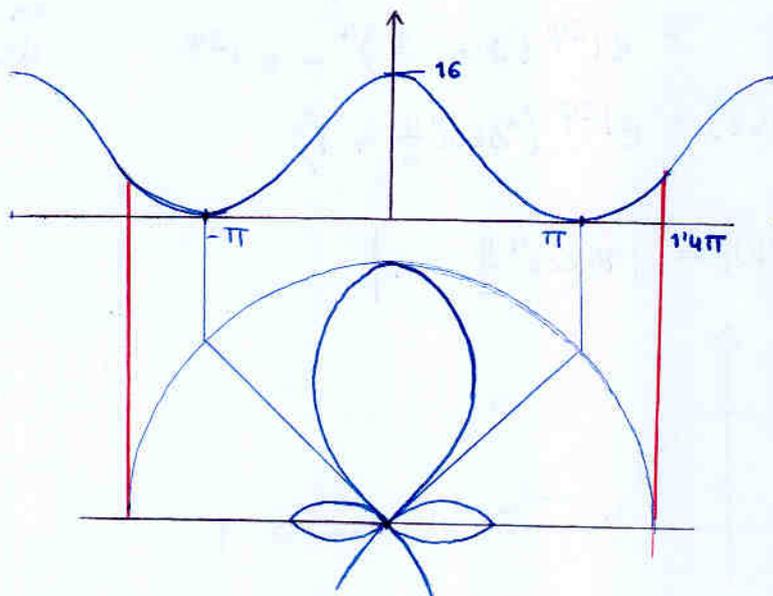
$$P(z) = 1 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4 = (z+1)^4$$



$$z_c = -1$$

b) Diagrama de radiación:

$$M.V. \in [-kd + \alpha, kd + \alpha]$$
$$[-1.4\pi, 1.4\pi]$$



c) Ancho de haz a -3dB y entre ceros

entre ceros:  $\Delta\theta_c = 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta_c\right)$

$$\Delta\theta_c = 91.2^\circ$$

$$\psi_c = kd \cos \theta_c = \pi \Rightarrow \theta_c = 44.4^\circ$$

$\uparrow$   
 $0.7\lambda$

a -3dB:

$$FA(\psi) = 2^4 \cos^4 \frac{\psi}{2}$$

en el punto a -3dB:  $\cos^4 \frac{\psi_{-3dB}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \psi_{-3dB} = 0.82$

$$kd \cos \theta_{-3dB} = 0.82 \Rightarrow \theta_{-3dB} = 80^\circ$$

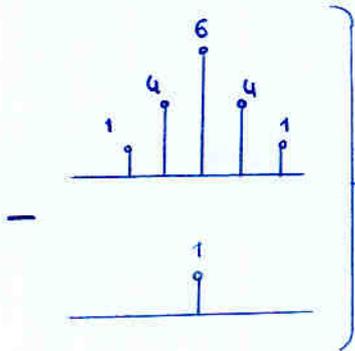
$$\Delta\theta_{-3dB} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{-3dB}\right) = 20^\circ$$

d) NLPS

$$NLPS = 20 \log \frac{16}{|FA(\psi = 1'4\pi)|} = 18'5 \text{ dB}$$

c) 1 : 4 : 5 : 4 : 1

simplemente hacer la superposición



$$FA(\psi) = 1 + 4e^{i\psi} + 5e^{2i\psi} + 4e^{3i\psi} + 1e^{4i\psi}$$

$$= 1 + 4e^{i\psi} + 6e^{2i\psi} + 4e^{3i\psi} + 1e^{4i\psi} - 1e^{2i\psi}$$

$$= (1 + e^{i\psi})^4 - e^{2i\psi}$$

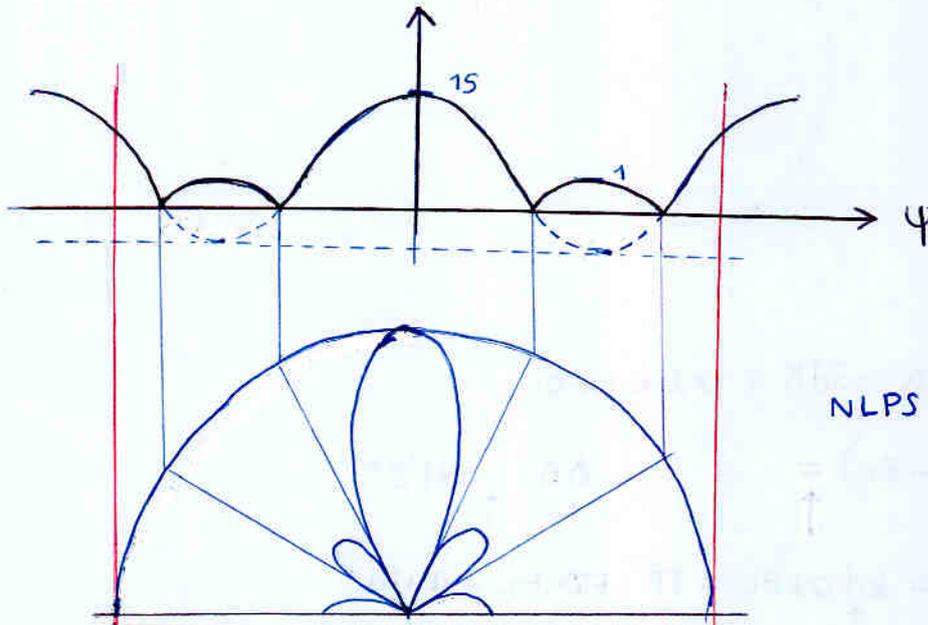
$$= (e^{i\frac{\psi}{2}})^4 (e^{-i\frac{\psi}{2}} + e^{i\frac{\psi}{2}})^4 - e^{2i\psi}$$

$$= e^{2i\psi} (2 \cos \frac{\psi}{2})^4 - e^{2i\psi}$$

$$FA(\psi) = e^{2i\psi} (16 \cos^4 \frac{\psi}{2} - 1)$$

cuidado, no es restar 1, nuestro origen de fase está en el primer elemento

$$|FA(\psi)| = |16 \cos^4 \frac{\psi}{2} - 1|$$



$$NLPS = 20 \log \frac{15}{1} = 23'5 \text{ dB}$$

# Directividad en agrupaciones

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} t_N(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi}$$

$$t_N(\theta, \phi) = \frac{FA^2(\psi(\theta, \phi))}{FA_{\max}^2}$$

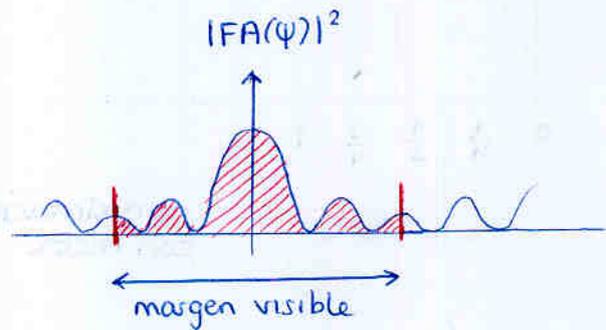
Hacemos un cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = kd \cos\theta + \alpha \\ d\psi = -kd \sin\theta \, d\theta \\ \theta = 0 \rightarrow \psi = kd + \alpha \\ \theta = \pi \rightarrow \psi = -kd + \alpha \end{array} \right.$$

Por tanto:

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-kd+\alpha}^{kd+\alpha} \frac{|FA(\psi)|^2}{FA_{\max}^2} \frac{d\psi}{(-kd)}$$

$$D_{\max} = \frac{2kd \, FA_{\max}^2}{\int_{-kd+\alpha}^{kd+\alpha} |FA(\psi)|^2 \, d\psi}$$



$$= \frac{2kd}{\int_{-kd+\alpha}^{kd+\alpha} \frac{|FA(\psi)|^2}{FA_{\max}^2} \, d\psi}$$

siendo  $FA(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\psi}$

casos particulares

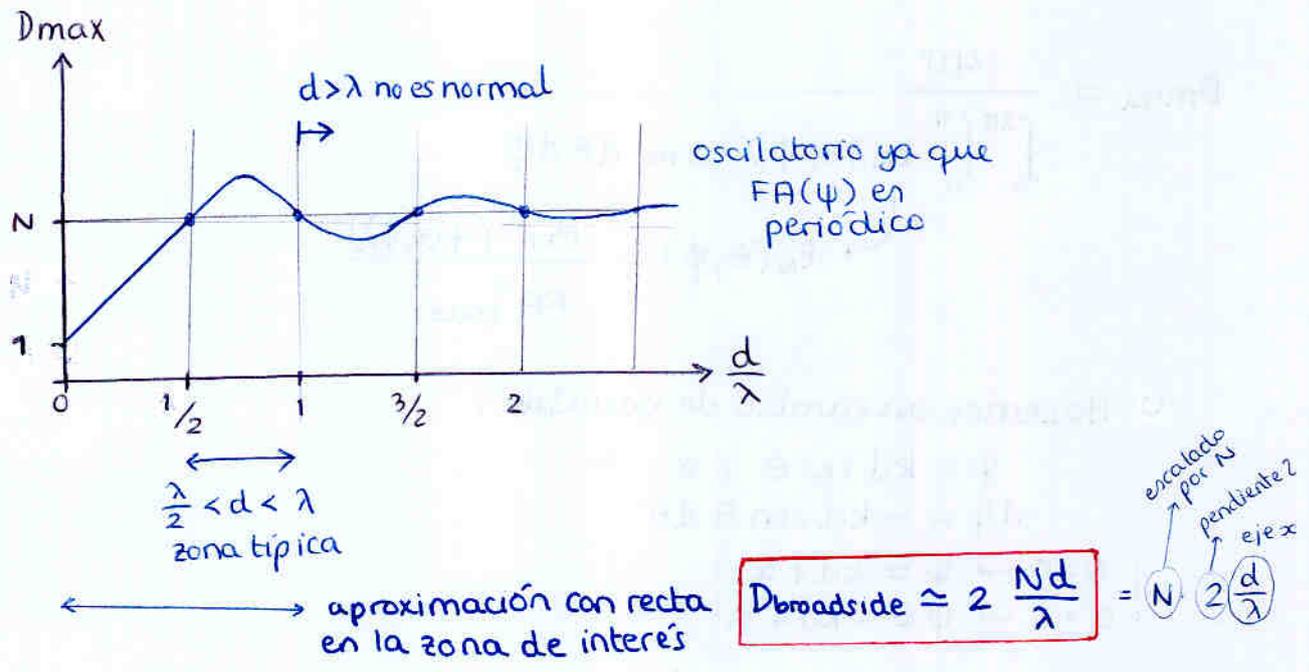
• Distribución uniforme:

$$D_{\max} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(N-n)}{nkd} 2 \cos(n\alpha) \sin(nkd)}$$

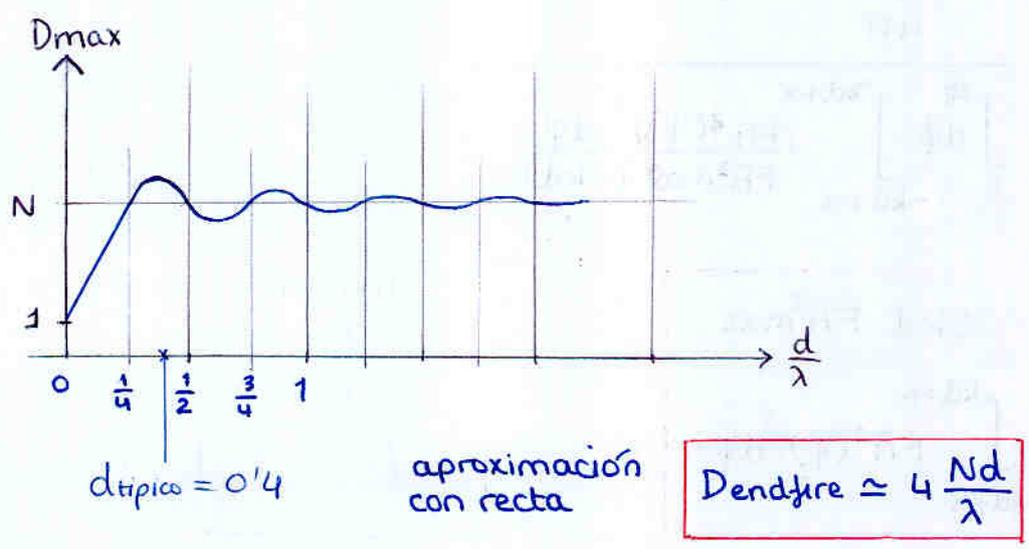
• Distribución arbitraria

con  $\left[ \begin{array}{l} d = \lambda/2 \\ \alpha = 0 \\ \text{M.V. } [-\pi, \pi] \end{array} \right.$   $D_{\max} = \frac{\left( \sum_{n=0}^{N-1} a_n \right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2} \stackrel{\text{uniforme } \begin{array}{l} d = \lambda/2 \\ \alpha = 0 \end{array}}{\downarrow} = N$

ejemplo: uniforme broadside ( $\alpha=0$ ) con N elementos



ejemplo: uniforme endfire ( $\alpha = \pm kd$ )



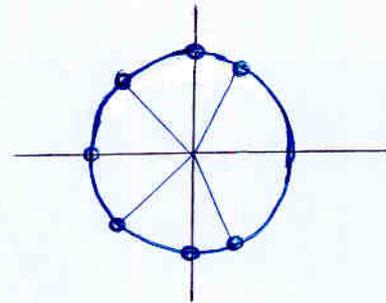
Síntesis de schelkunov

Hay muchos métodos de síntesis matemáticamente engorrosos que, jugando con la gran cantidad de grados de libertad que tenemos, nos permiten obtener el diagrama de radiación que queramos.

Nosotros vemos un caso simple:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = a_{N-1} \prod_{n=1}^{N-1} (z - z_n)$$

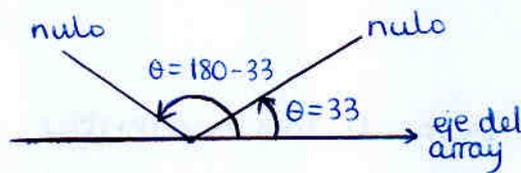
$\xrightarrow{\text{análisis}}$   
 $\xleftarrow{\text{síntesis}}$



ejercicio:

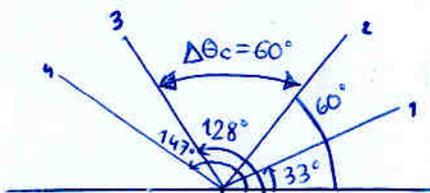
$N = 5$   
 $\alpha = 0$   
 $\Delta\theta_c = 60^\circ$

y además:



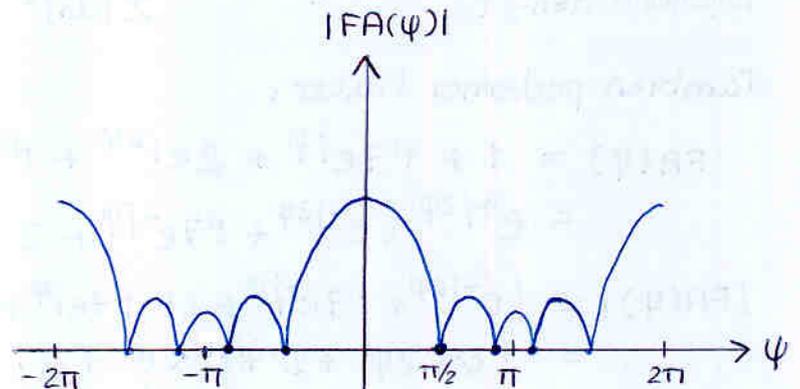
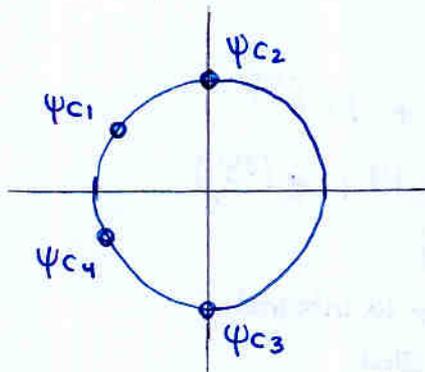
Necesitaremos por tanto:

$$\theta_c \rightarrow \psi_c \rightarrow z_0 = e^{-i\psi_c}$$



$\theta_{c1} = 33^\circ \rightarrow \psi_{c1} = kd \cos \theta_{c1} = 151^\circ$   
 $\theta_{c2} = 60^\circ \rightarrow \psi_{c2} = 90^\circ$   
 $\theta_{c3} = 120^\circ \rightarrow \psi_{c3} = -90^\circ$   
 $\theta_{c4} = 147^\circ \rightarrow \psi_{c4} = -151^\circ$

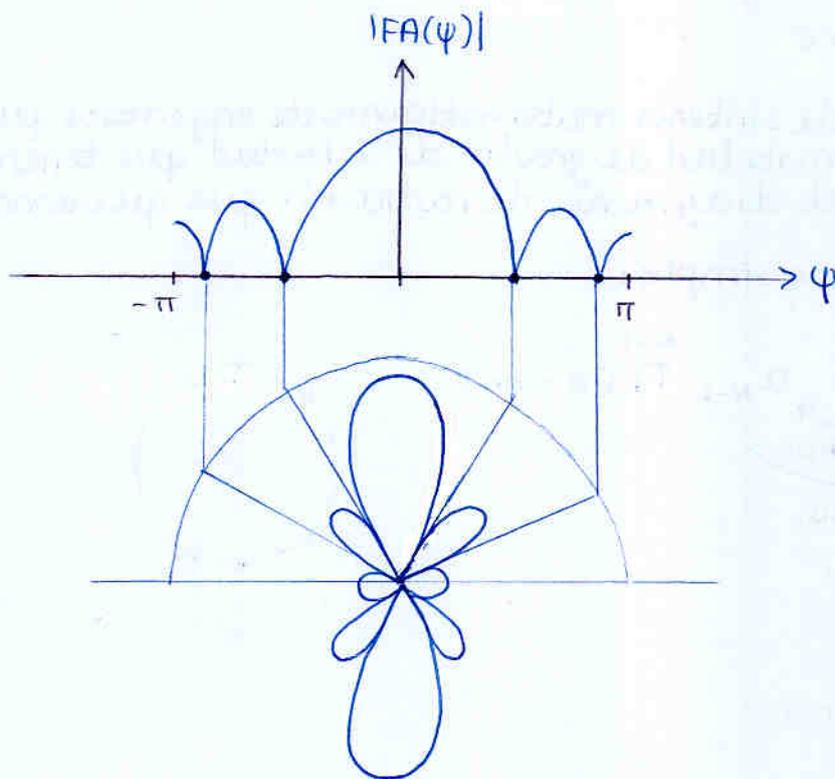
es decir; tenemos:



$$|P(z)| = \underbrace{|z - z_{c1}|}_{d_1} \cdot \underbrace{|z - z_{c2}|}_{d_2} \cdot \dots$$

el producto de las distancias a todos los ceros

Podemos hacernos una idea del diagrama aún sin conocer los pesos de las corrientes



Y podemos obtener los pesos de las corrientes

$$\begin{aligned}
 P(z) &= (z - e^{i\pi/2})(z - e^{-i\pi/2})(z - e^{i151^\circ})(z - e^{-i151^\circ}) \\
 &= (z^2 + 2\cos(\frac{\pi}{2})z + 1)(z^2 + 2\cos(151^\circ)z + 1) \\
 &= z^4 + 1.7z^3 + 2z^2 + 1.7z + 1
 \end{aligned}$$

corrientes:  $1 : 1.7 : 2 : 1.7 : 1$

Directividad:

Al ser broadside  $\Rightarrow D_{\max} = \frac{|\sum a_n|^2}{\sum |a_n|^2} = \frac{(1+1.7+2+1.7+1)^2}{1+1.7^2+2^2+1.7^2+1} = 4.64$   
(suponemos  $d = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ ?)

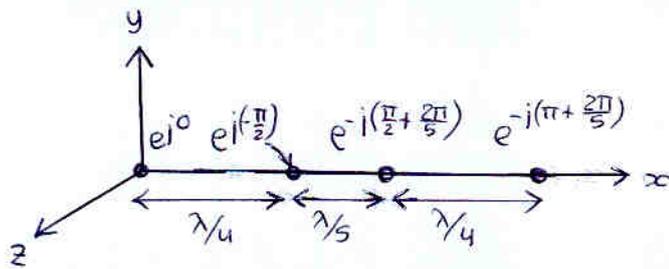
También podemos hacer:

$$\begin{aligned}
 FA(\psi) &= 1 + 1.7e^{i\psi} + 2e^{i2\psi} + 1.7e^{i3\psi} + 1e^{i4\psi} \\
 &= e^{+i2\psi} (e^{-i2\psi} + 1.7e^{-i\psi} + 2 + 1.7e^{i\psi} + e^{i2\psi})
 \end{aligned}$$

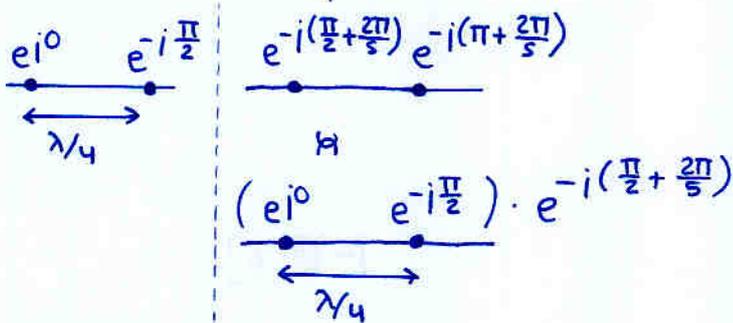
$$\begin{aligned}
 |FA(\psi)| &= |e^{-i2\psi} + 1.7e^{-i\psi} + 2 + 1.7e^{i\psi} + e^{i2\psi}| \\
 &= 2\cos 2\psi + 2 \cdot 1.7\cos \psi + 2 \quad \text{y hacer la integral}
 \end{aligned}$$

$$D_{\max} = \frac{2kd}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|FA(\psi)|^2}{FA_{\max}^2} d\psi}$$

# Problema



Son como dos bloques:



igual que

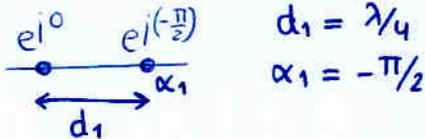
$$\bar{E} = \bar{E}_{\text{elemento}} \cdot FA$$

en este caso tenemos un array de arrays

$$FA = FA_1(\psi_1) \cdot FA_2(\psi_2)$$

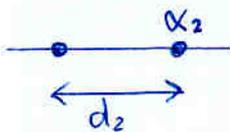
Por tanto:  $FA_1$

$$\text{sen } 2x = 2 \text{sen } x \text{ cos } x$$



$$FA_1(\psi_1) = \frac{\text{sen}(2 \frac{\psi_1}{2})}{\text{sen} \frac{\psi_1}{2}} = 2 \text{cos}(\frac{\psi_1}{2})$$

y el array de arrays  $FA_2$



Cuidado:

$$d_2 = \lambda/5 + \lambda/4 \quad \left( \begin{array}{l} \text{da igual que consideremos} \\ \text{el centro, la distancia} \\ \text{siempre será esa} \end{array} \right)$$

$$\alpha_2 = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$FA_2(\psi_2) = \frac{\text{sen}(2 \frac{\psi_2}{2})}{\text{sen} \frac{\psi_2}{2}} = 2 \text{cos}(\frac{\psi_2}{2})$$

Así que:

$$b) FA(\psi) = FA_1(\psi_1) \cdot FA_2(\psi_2) \quad \begin{cases} \psi_1 = \psi_{1x} = k \cdot d_1 \text{sen } \theta \text{ cos } \phi + \alpha_1 \\ \psi_2 = \psi_{2x} = k \cdot d_2 \text{sen } \theta \text{ cos } \phi + \alpha_2 \end{cases}$$

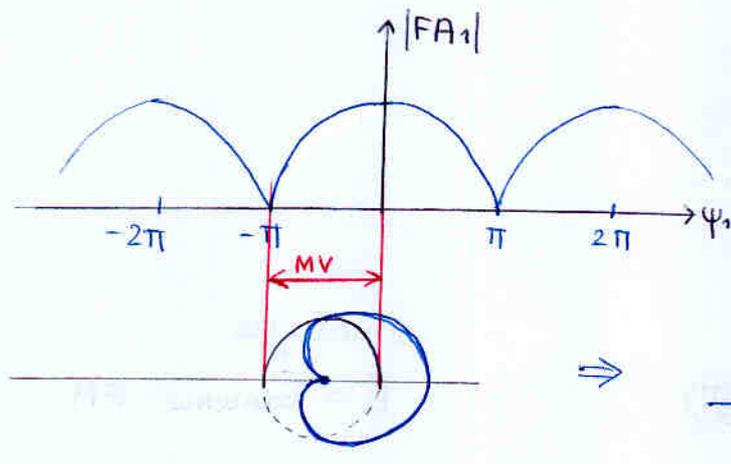
Particularizando para  $\theta = \pi/2$  (plano XY)

$$\psi_1 = k \cdot d_1 \cdot \text{cos } \phi + \alpha_1$$

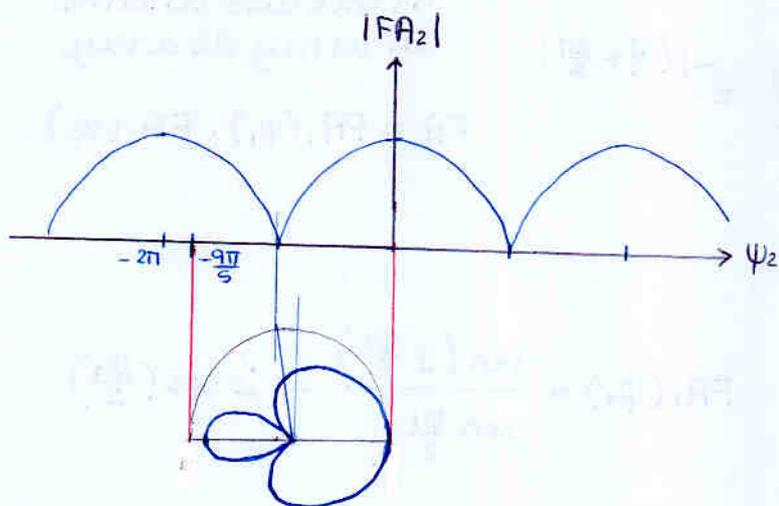
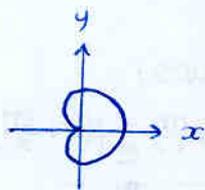
$$\psi_2 = k \cdot d_2 \cdot \text{cos } \phi + \alpha_2$$

$$FA(\psi) = 2 \cdot \text{cos}\left(\frac{k d_1 \text{cos } \phi + \alpha_1}{2}\right) \cdot 2 \text{cos}\left(\frac{k d_2 \text{cos } \phi + \alpha_2}{2}\right)$$

c) Diagrama de radiación de los arrays

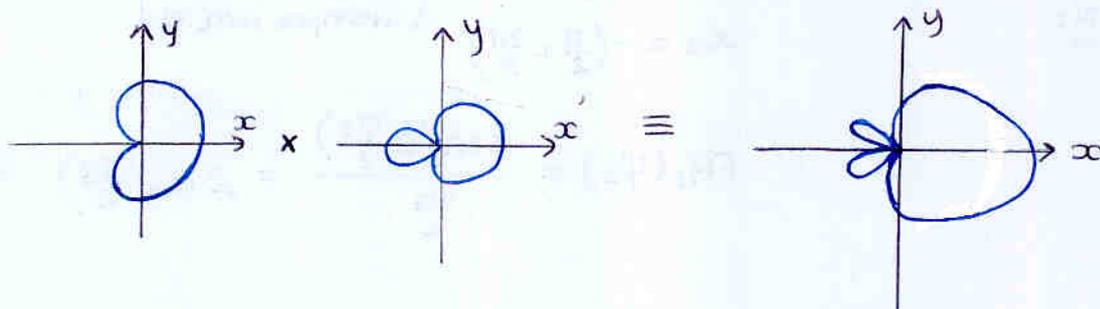


$$MV \equiv [-kd_1 + \alpha_1, kd_1 + \alpha_1] \\ [-\pi, 0]$$



$$MV \equiv [-kd_2 + \alpha_2, kd_2 + \alpha_2] \\ [-\frac{9\pi}{5}, 0]$$

Ya sólo queda multiplicar (asegurarnos de que los ejes coincidan)

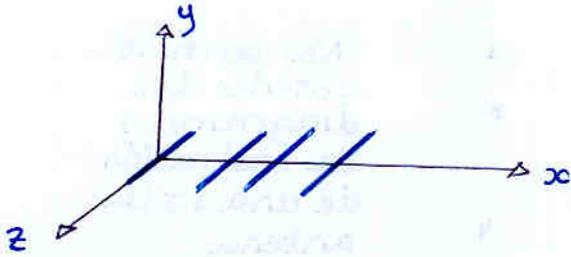


d) Y si los elementos son dipolos elementales en z ?  
 Dibujar plano E y plano H

Pensando :

Plano E : XZ

Plano H : XY



Plano E :

diagrama dipolo

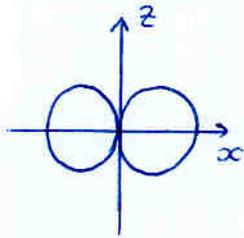
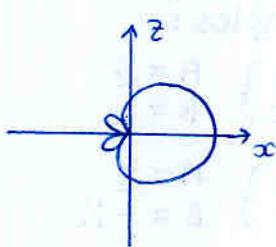
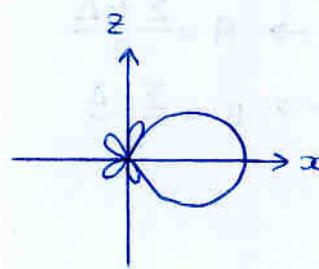


diagrama array



≡



Plano H :

diagrama dipolo

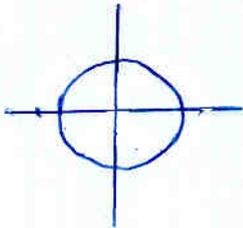
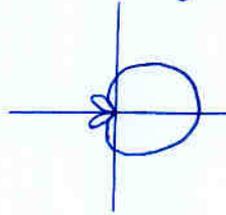


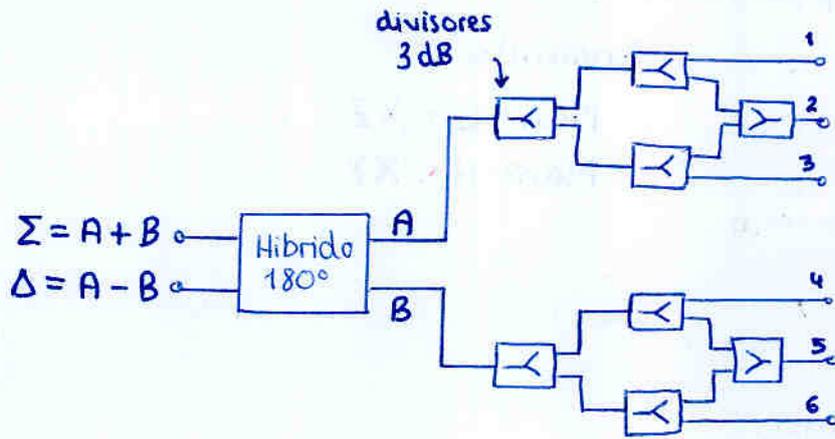
diagrama array



≡

el resultante queda igual que el del array

# Problema: Array suma y diferencia



Nos permite obtener dos diagramas de radiación de una sola antena

$$\Sigma + \Delta = 2A \rightarrow A = \frac{\Sigma + \Delta}{2}$$

$$\Sigma - \Delta = 2B \rightarrow B = \frac{\Sigma - \Delta}{2}$$

ejemplos:

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma = 1 \\ \Delta = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma = 0 \\ \Delta = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{array}$$

↑  
desfase

a) Obtener  $P_1(z)$  (suma) y  $P_2(z)$  (diferencia)

•  $P_1(z)$

tomamos: a las salidas:  
 $\Sigma = 1W$   
 $\Delta = 0W$

—	1/8	1
—	1/4	2
—	1/8	1
—	1/8	1
—	1/4	2
—	1/8	1

normalizar a los extremos

$$P_1(z) = 1 + 2z + z^2 + z^3 + 2z^4 + z^5 \quad \text{X falso}$$

potencia	corriente
1	1
2	$\sqrt{2}$
1	1
1	1
2	$\sqrt{2}$
1	1

falso ya que hemos medido potencias  
nos interesa la corriente:  $P \propto I^2$   
 $I \propto \sqrt{P}$

$$P_1(z) = 1 + \sqrt{2}z + z^2 + z^3 + \sqrt{2}z^4 + z^5$$

•  $P_2(z)$

1
$\sqrt{2}$
1
-1
$-\sqrt{2}$
-1

$$P_2(z) = 1 + \sqrt{2}z + z^2 - z^3 - \sqrt{2}z^4 - z^5$$

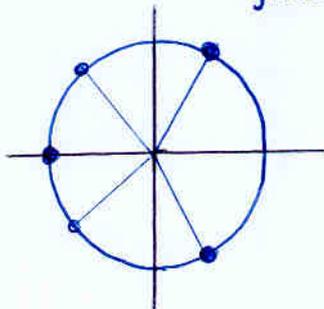
b) obtener polos y ceros de ambos casos:

$$P_1(z) = (1 + \sqrt{2}z + z^2) + z^3(1 + \sqrt{2}z + z^2)$$

$P_1(z) = (1 + z^3)(1 + \sqrt{2}z + z^2)$  → ha quedado como un array de arrays  
 similarmente  
 $P_2(z) = (1 - z^3)(1 + \sqrt{2}z + z^2)$  → (Lógico) (por eso multiplicamos)

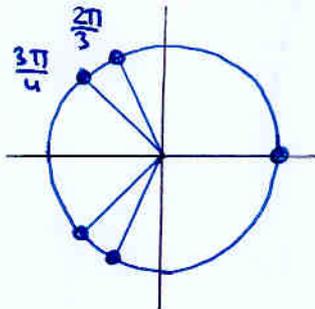
$P_1(z)$   $(1 + z^3) = 0 \Rightarrow z_c = \sqrt[3]{-1} = 1 \left| \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right.$

$(1 + \sqrt{2}z + z^2) = 0 \Rightarrow z_c = 1 \left| \pm \frac{3\pi}{4} \right.$   
2º grado



$P_2(z)$   $(1 - z^3) = 0 \Rightarrow z_c^3 = \sqrt{1} = 1 \left| \frac{2k\pi}{3} \right.$

$(1 + \sqrt{2}z + z^2) = 0 \Rightarrow z_c = 1 \left| \pm \frac{3\pi}{4} \right.$

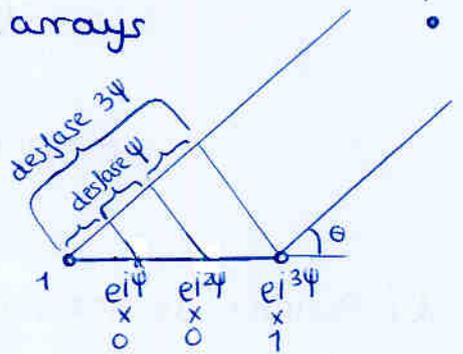


Parece lógico, en realidad es un array de arrays

$$(1 + z^3) \equiv (1 + e^{j3\psi})$$

↑  
array de referencia (origen de fases)

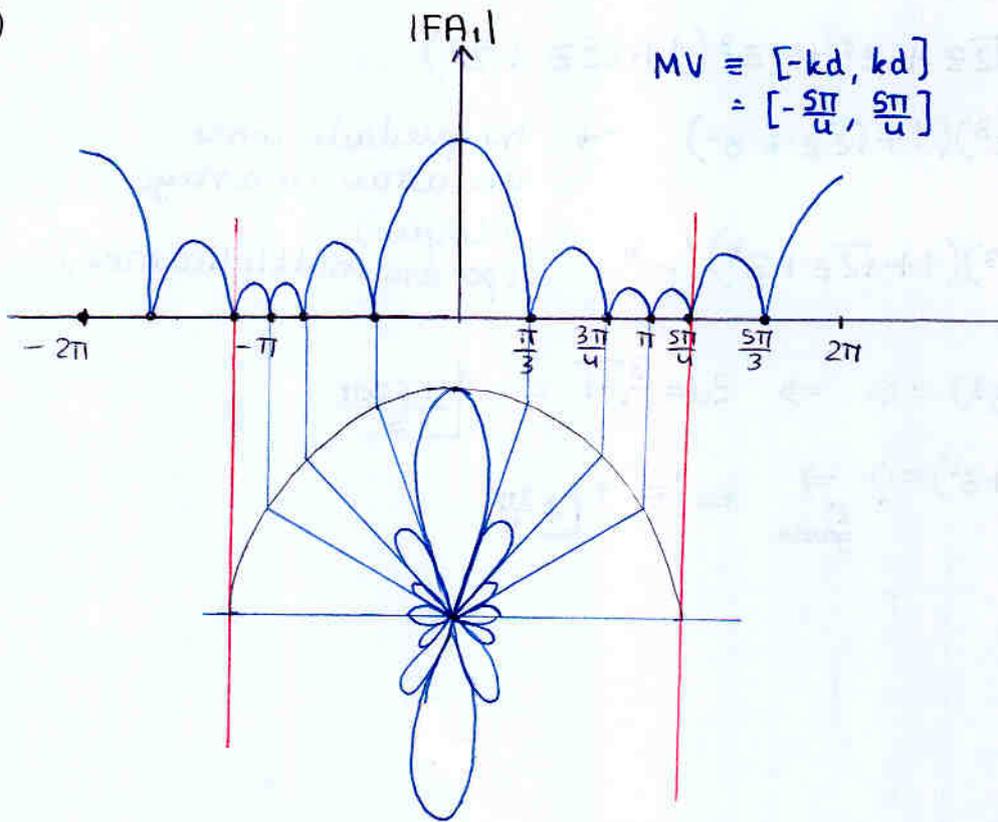
↑  
array de mismo módulo  $|e^{j3\psi}| = 1$  pero con desfase en las corrientes de  $3\psi$



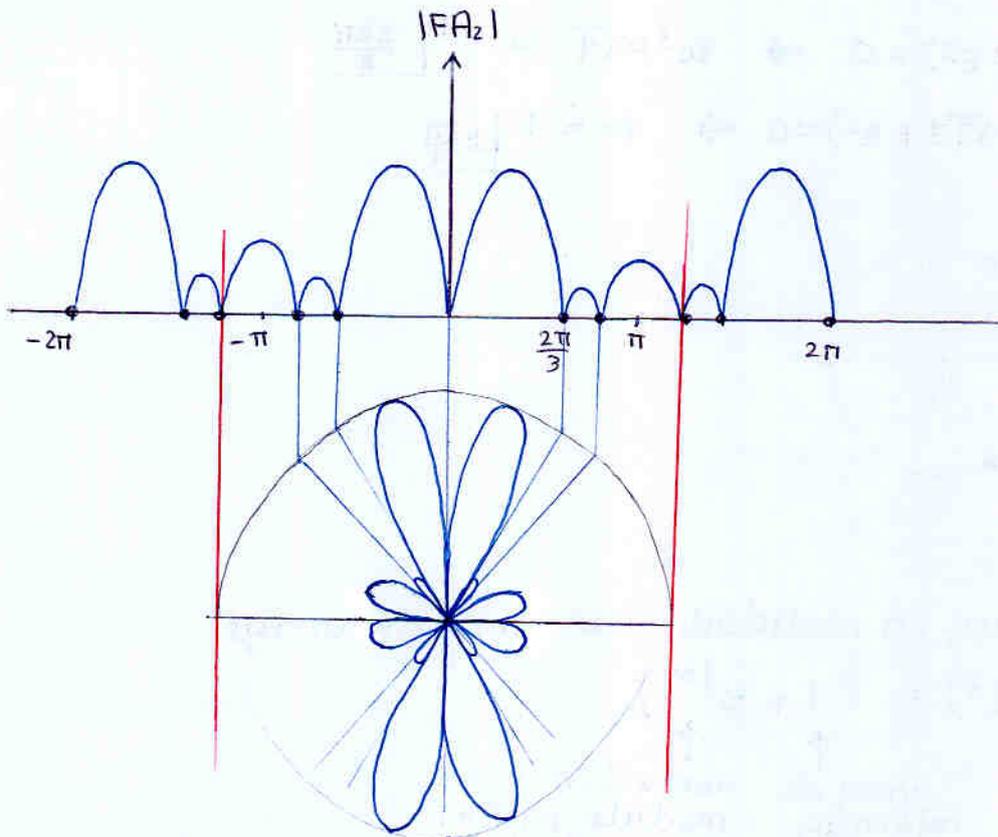
con  $\psi = \psi(\theta)$

c) Diagrama de radiación ( $d = \frac{5\lambda}{8}$ ,  $\alpha = 0$ )

⊕



⊖



d) Posición de los ceros:  $\psi = kd \cos \theta \Rightarrow \theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{\psi_c}{kd}\right)$

⊕

$$\theta_c \begin{cases} 0^\circ \\ 36'8'' \\ 53'13'' \\ 74'5'' \end{cases}$$

⊖

$$\theta_c \begin{cases} 0^\circ \\ 53'13'' \\ 57'8'' \\ 90^\circ \end{cases}$$

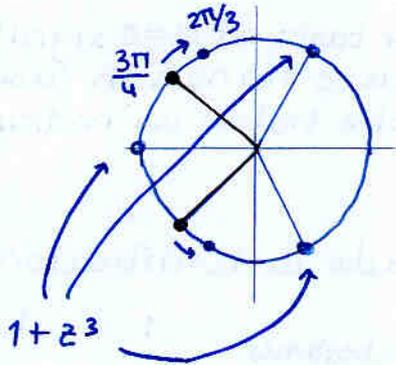
y los simétricos

e) Se desea que el diagrama  $\Sigma$  presente un nulo en  $57'8^\circ$  sin variar el ancho del lóbulo (asimétrico)

En el diagrama de  $\Delta$  vemos que tiene un cero en  $57'8^\circ$  (asociado a  $2\pi/3$ )

El diagrama  $\Sigma$  presenta un cero en  $53'13^\circ$  (equivale a  $\psi = 3\pi/4$ )

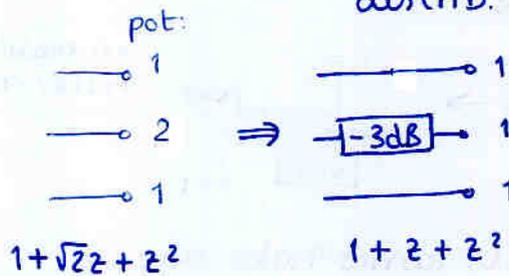
moveremos dicho nulo desde  $3\pi/4$  a  $2\pi/3$



nuevo  $P_1(z)$

$$\begin{aligned} P_1(z) &= (1+z^3)(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}})(z-e^{i\frac{2\pi}{3}}) \\ &= (1+z^3)(z^2-2\cos\frac{2\pi}{3}z+1) \\ &= (1+z^3)(z^2+z+1) \end{aligned}$$

distrib. uniforme



Obviamente el diagrama de  $\Delta$  se vería cambiado, pero el enunciado no dice nada

f) Hallar eficiencia de radiación en ese caso

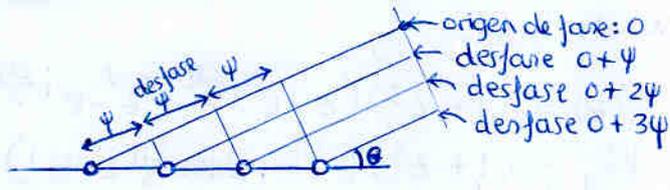
metiendo 8W se radian 6W  
(2W se pierden, uno en cada atenuador)

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{6}{8}$$

Nota: usar  $FA(z) = 1 - z^3$   
 $FA(\psi) = 1 - e^{i3\psi}$

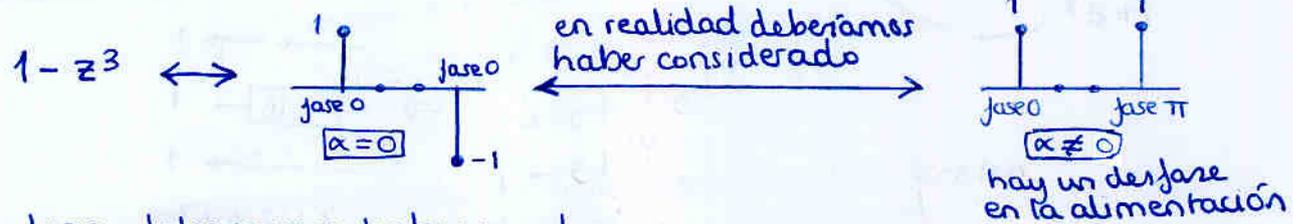
ha sido un truco 'vil' para simplificar, pero que puede confundirnos.

Por ejemplo, ha dado lugar a que  $FA(\psi)$  no tenga un máximo en  $\psi=0$ , lo cual es absurdo, ya que  $\psi$  representa el desfase total en el punto de observación (i.e. para una dirección dada) entre elementos consecutivos del array



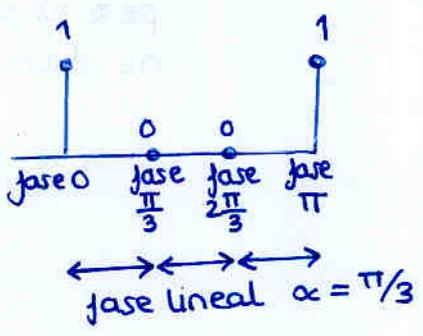
Por tanto en  $\psi=0$  significa que se suman en fase y debe haber un máximo

Lo que ha pasado es que hemos considerado la distribución de corrientes



es decir, deberiamos haber usado

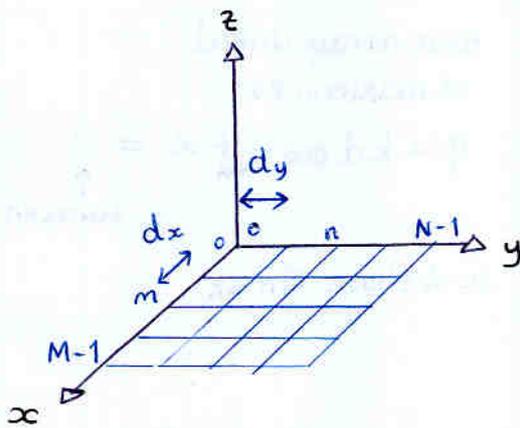
$1 + z^3 = 1 + e^{i3\psi} = 1 + e^{i3(kd \cos \theta + \alpha)}$   
 where  $3\alpha = \pi \rightarrow \alpha = \pi/3$   
 Labels:  $3(kd \cos \theta + \alpha)$  is split into  $3kd \cos \theta$  (desfase por dif. de caminos) and  $3\alpha$  (desfase por alimentacion)



$\psi = kd \cos \theta + \frac{\pi}{3}$

Y en este caso si que habria salido el FA correspondiente a  $1:0:0:1$   
 $1 + z^3$   
 con un máximo en  $\psi=0$   
 pero la semierfera que utilizamos para dibujar el diagrama de radiacion seria centrado en  $\alpha = \pi/3$

# 4.7 Arrays Planos



$$FA = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} I_{mn} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}_{mn}}$$

siendo

$$\vec{r}_{mn} = m dx \hat{x} + n dy \hat{y}$$

$$I_{mn} = a_{mn} e^{i \gamma_{mn}}$$

Nosotros nos limitamos a distribuciones separables:

$$\begin{cases} a_{mn} = a_m \cdot a_n \\ \gamma_{mn} = m \cdot \alpha + n \beta \end{cases}$$

Así podemos separar los dos sumatorios

$$FA = \sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{im\alpha} e^{imk_x dx} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{in\beta} e^{ink_y dy}$$

$$FA = FA_x(\Psi_x) \cdot FA_y(\Psi_y) \quad \text{es un array de arrays}$$

$$\begin{cases} \Psi_x = k dx \sin\theta \cos\phi + \alpha \\ \Psi_y = k dy \sin\theta \sin\phi + \beta \end{cases}$$

nota: precisamente  
 $k_x = k \sin\theta \cos\phi$   
 $k_y = k \sin\theta \sin\phi$

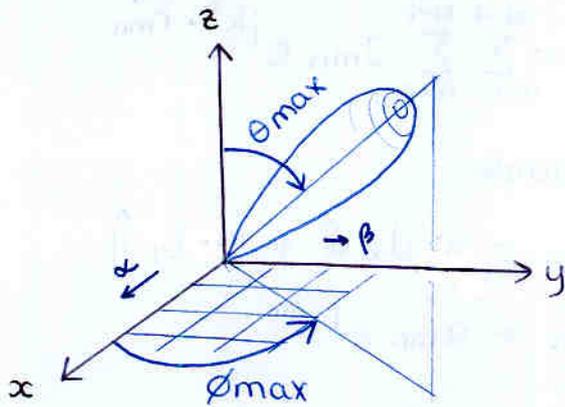
Concepto de array de arrays

ej: array triangular de arrays triangulares

fases:  $\rightarrow \beta$

	1	2	3	4	5
$\alpha \downarrow$	1	2	3	2	1
	2	4	6	4	2
	3	6	9	6	3
	4	4	6	4	2
	5	2	3	2	1

Logramos una dirección de apuntamiento (ya no hay simetría de revolución)



Para array lineal  
 el máximo es:  
 $\psi = kd \cos \theta_{\max} + \alpha = 0$   
 ↑  
 suma en fase!  
 se obtiene  $\theta_{\max}$

Para array plano:

$$(1) \quad \psi_x = 0 = k dx \sin \theta_{\max} \cos \phi_{\max} + \alpha$$

$$(2) \quad \psi_y = 0 = k dy \sin \theta_{\max} \sin \phi_{\max} + \beta$$

$$\frac{(2)}{(1)} : \quad \text{tg } \phi_{\max} = \frac{\frac{\beta}{k dy}}{\frac{\alpha}{k dx}} = \frac{\beta dx}{\alpha dy}$$

$$(1)^2 + (2)^2 : \quad \text{sen}^2(\theta_{\max}) = \left(\frac{\alpha}{k dx}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{k dy}\right)^2$$

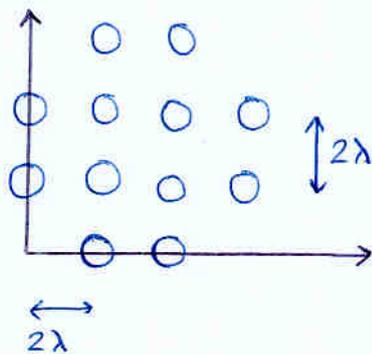
Es muy caro hacer un array con  $\alpha$  y  $\beta \neq 0$  (hay que controlar la fase de todos y cada uno de los elementos)

Normalmente se toma uno igual a cero y por tanto sólo hay que controlar el desfase de las filas (o columnas)

$\alpha = 0$   
 $\beta \neq 0$  } MAX:  
 $\phi_{\max} = 90^\circ$   
 $\theta_{\max}$  variable  
 se barre en el plano YZ

$\alpha \neq 0$   
 $\beta = 0$  } MAX:  
 $\phi_{\max} = 0^\circ$   
 $\theta_{\max}$  variable  
 se barre en el plano XZ

# Problema



$$FA = FA(\psi_x) \cdot FA(\psi_y)$$

$$P(z, w) = P(z) \cdot P(w)$$

$$z = e^{i\psi_x}$$

$$w = e^{i\psi_y}$$

Cada elemento tendrá una fase  
 $e^{i\psi_x} \cdot e^{i\psi_y}$   
 en plano polinomio }  $z^n \cdot w^m$

$$FA(\psi_x, \psi_y) = 0 + e^{i\psi_x} + e^{i2\psi_x} + 0e^{i3\psi_x}$$

$$+ e^{i\psi_y} + e^{i\psi_y}e^{i\psi_x} + e^{i\psi_y} \cdot e^{i2\psi_x} + e^{i\psi_y} \cdot e^{i3\psi_x}$$

$$+ e^{i2\psi_y} + e^{i2\psi_y}e^{i\psi_x} + e^{i2\psi_y} \cdot e^{i2\psi_x} + e^{i2\psi_y} \cdot e^{i3\psi_x}$$

$$+ 0e^{i3\psi_y} + e^{i3\psi_y}e^{i\psi_x} + e^{i3\psi_y}e^{i2\psi_x} + 0 \cdot e^{i3\psi_y} \cdot e^{i3\psi_x}$$

$$P(z, w) = 0 \cdot 1 + z + z^2 + 0z^3$$

$$+ w + wz + wz^2 + wz^3$$

$$+ w^2 + w^2z + w^2z^2 + w^2z^3$$

$$+ 0w^3 + w^3z + w^3z^2 + 0w^3z^3$$

$$P(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$P(x) = x^4 - 1$$

$$P'(x) = 4x^3$$

$$P''(x) = 12x^2$$

Using Taylor's theorem with remainder

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + R_3$$

$$R_3 = \frac{P'''(\xi)}{3!}(x-a)^3$$

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(\xi)}{3!}x^3$$

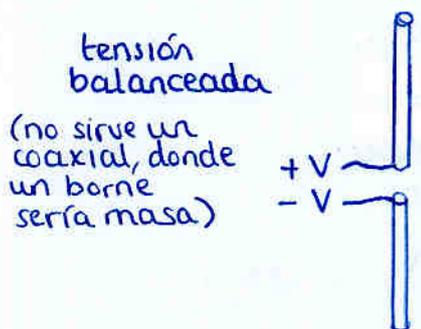
$$= 1 + 0x + \frac{12(0)}{2}x^2 + \frac{48\xi^3}{6}x^3$$

$$= 1 + 0x + 0x^2 + 8\xi^3x^3$$

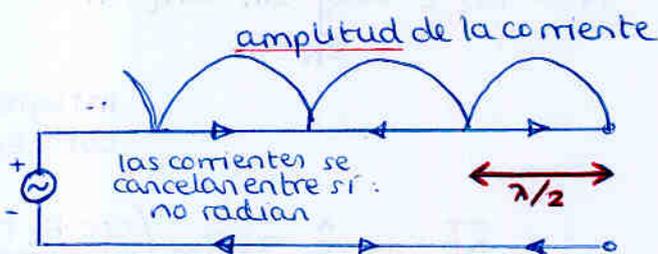
# Tema 5. Radiación de dipolos

- 5.1. Distribuciones de corriente
- 5.2. Vector de radiación
- 5.3. Campos radiados
- 5.4. Longitud efectiva
- 5.5. Potencia y resistencia de radiación
- 5.6. Casos particulares
  - Dipolo  $\lambda/2$
  - Dipolo corto
- 5.7. Teoría de las imágenes
- 5.8. Monopolos

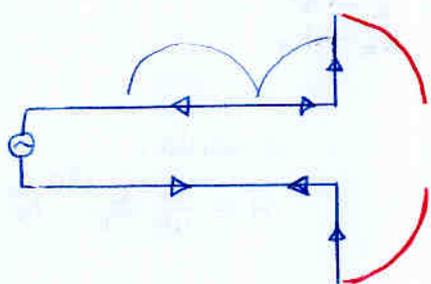
## 1. Distribuciones de corriente



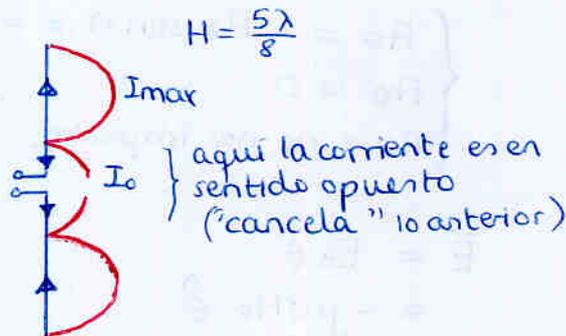
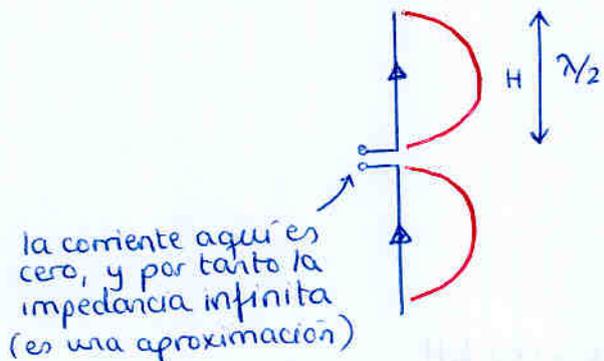
Se recurre a una l. de tx.



Si doblamos la l. de tx (una aproximación)



Doblando distintas longitudes:



- Podríamos asumir que los bornes están infinitamente juntos y por tanto la distribución de corriente es continua
- En los extremos la corriente siempre es nula

Podemos obtener una expresión general:

$$I(z') = \begin{cases} I_m \operatorname{sen}[k(H-z')] & z' > 0 \\ I_m \operatorname{sen}[k(H+z')] & z' < 0 \end{cases}$$

$$I(z') = I_m \cdot \operatorname{sen}[k(H-|z'|)]$$

Nota:  $I_m$  es la corriente máxima. No tiene porque coincidir con la del punto de alimentación.

## 2. Vector de radiación

$$\vec{N} = N_z \hat{z} = \hat{z} \int_{-H}^H I_m \cdot \operatorname{sen}[k(H-|z'|)] e^{jk_z z'} dz'$$

Integral fácil de hacer; está en los apuntes

$$\vec{N} = \hat{z} 2k I_m \left( \frac{\cos k_z H - \cos kH}{k^2 - k_z^2} \right)$$

Nota: si el dipolo está orientado en  $\hat{v}$  en lugar de  $\hat{z}$ , se cambia  $\hat{z} \rightarrow \hat{v}$   
 $k_z \rightarrow k_v$

## 3. Campos radiados

recuerda:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{N}$$

Pasar a esféricas:

$$\begin{cases} A_\theta = -A_z \operatorname{sen} \theta = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} N_z \operatorname{sen} \theta \\ A_\phi = 0 \\ A_r : \text{no nos importa} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_\theta \hat{\theta} \\ &= -j\omega A_\theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

$$E_\theta = j \frac{k\eta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} 2k I_m \frac{\cos k_z - \cos kH}{k^2 - k_z^2} \cdot \operatorname{sen} \theta$$

$$k^2 - k_z^2 = k^2(1 - \cos^2 \theta) = k^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta$$

queda:

$$\vec{E} = j \frac{\eta}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \frac{\cos k_z H - \cos kH}{\sin \theta} \hat{\theta}$$

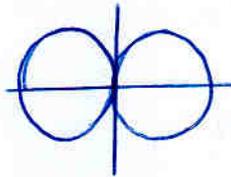
campo producido por un dipolo orientado en  $\hat{z}$

(nota: esta vez no basta con cambiar  $k_z \rightarrow k_v$  para dipolo orientado en  $\hat{v}$ )

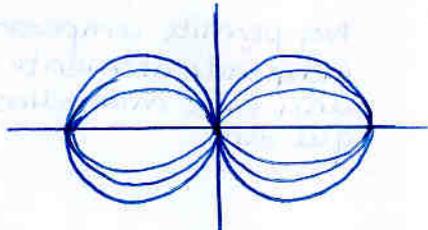
Diagrama de radiación:

Caso  $H \ll \lambda$

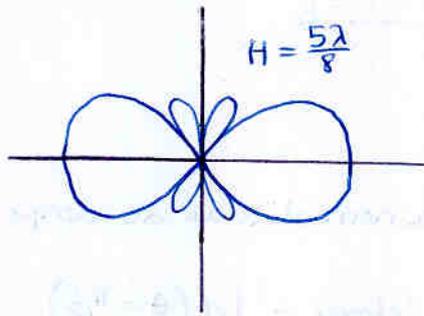
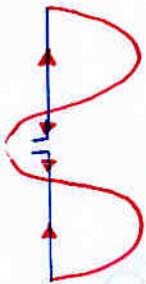
Se tiene el inicio de un seno  $\rightarrow$  una recta  
Resultado idéntico al dipolo elemental



Según va aumentando  $H$ , el toroide se va modificando muy poco



En el momento en que empiezan a aparecer corrientes en el sentido opuesto, aparecen lóbulos secundarios

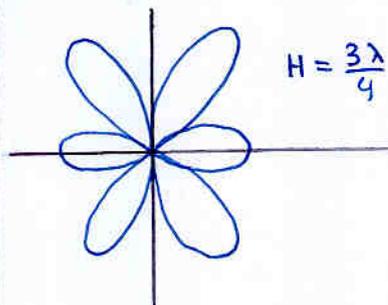


Aquí se obtiene un máximo en la directividad

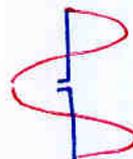
Si seguimos aumentando, los lóbulos secundarios van creciendo y se van convirtiendo en el lóbulo principal:



Puede marear el hecho de que al convertirse los LS en LP, cambian los planos E y H (q incluyen al máximo) y por tanto D, etc...



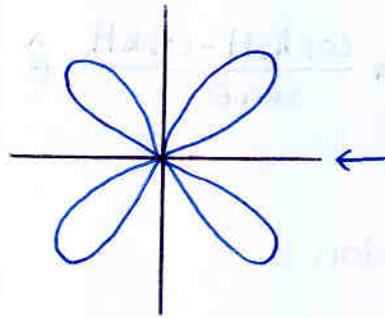
En la práctica no hay aplicaciones con  $H$  mayor



## Caso curioso



$$H = \lambda$$



Las corrientes se anulan entre ellas en dirección broadside

### 4. Longitud efectiva

Recuerda:

$$l_{ej} = \frac{N_0 \hat{\theta} + N_0 \hat{\phi}}{I(0)}$$

$$\vec{l}_{ej} = \frac{N_0 \hat{\theta}}{I(0)}$$

← corriente en bornes (la que ve el circuito)

#### Dipolo elemental



$$\vec{l}_{ej} = \frac{-Ih \sin \theta}{I} \hat{\theta} = -h \sin \theta \hat{\theta}$$

sale independiente de la corriente

$$|l_{ej}|_{max} = h$$

Nos permite comparar antenas independientemente de que una esté más alimentada que otra

#### Dipolo

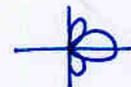
expresión general

$$\vec{l}_{ej} = -2 \frac{\cos(kH \cos \theta) - \cos(kH)}{k \sin kH \sin \theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{l}_{ej} = |l_{ej}|_{max} \cdot d_n(\theta) \cdot \hat{\theta}$$

↳ diagrama normalizado de campo

$|l_{ej}|_{max}$  en los casos prácticos  $\Rightarrow |l_{ej}|_{max} = l_{ej}(\theta = \pi/2)$



$$l_{ej}(\theta = \frac{\pi}{2}) = -\frac{\lambda}{\pi} \frac{1 - \cos kH}{\sin kH}$$

i.e. siempre consideramos  $\theta = \pi/2$  como la dirección del máximo, lo cual es cierto para  $H \downarrow$

Si aplicamos la otra definición

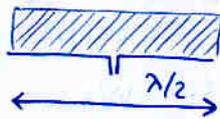
$$\vec{I}(\theta) = \frac{1}{I(0)} \int I(z') e^{ik_z z'} dz'$$

$\downarrow$   
 1 al particularizar en dirección del máximo

$$I_{\theta \text{ max}} = \frac{1}{I(0)} \int I(z) dz$$



Si distribución de corriente uniforme :



$$I_{\theta \text{ max}} = \frac{\lambda}{2}$$

Para  $H = \lambda/4$  caso real :



$$I_{\theta \text{ max}} = \frac{\lambda}{\pi} = \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

Podemos intentar jugar con la distribución de corriente para aumentar  $I_{\theta}$

ejemplo:



placas para que no se anule la corriente en el extremo

### 5. Potencia radiada y resistencia de radiación

$$P = \frac{|E_{\theta}|^2}{\eta} = \frac{\eta \cdot I_m^2}{4\pi^2 r^2} \left( \frac{\cos(kH \cos \theta) - \cos(kH)}{\sin \theta} \right)^2$$

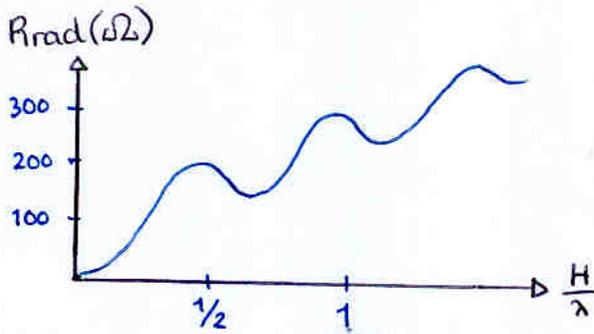
$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= I_m^2 \cdot \frac{\eta}{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{\cos(kH \cos \theta) - \cos kH}{\sin \theta} \right)^2 d\theta$$

$R_{\text{rad}}$  (referida al punto de corriente máxima  $I_m$ ) (i.e.  $W = I_m^2 R_{\text{rad}}$ )

$$R_{rad} = \frac{\eta}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(\cos(kH \cos\theta) - \cos kH)^2}{\sin\theta} d\theta$$

No tiene solución analítica.  
Hay que usar métodos numéricos



La resistencia que se ve en bornes de la antena

$$R_{in} = \frac{I_m^2 R_{rad}}{I(0)^2}$$

i.e. Resistencia de radiación referida a los bornes  
i.e.  $W_{rad} = I(0)^2 \cdot R_{in}$

$$R_{in} = \frac{R_{rad}}{\sin^2 kH}$$

$$I(0) = I_m \sin kH$$

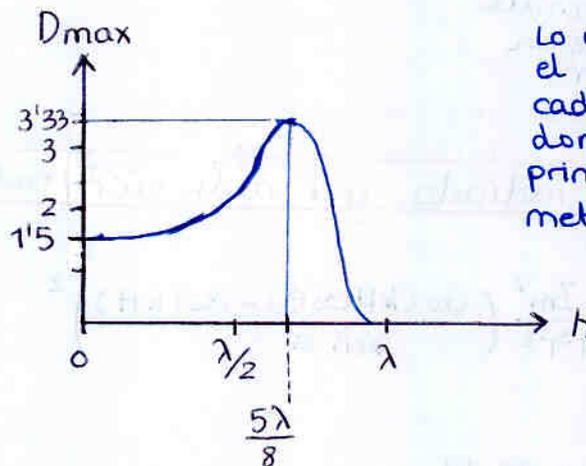
• Directividad

$$D_{max} = \frac{P_{max}}{W_{rad}/4\pi r^2}$$

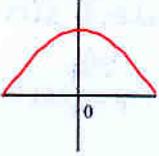
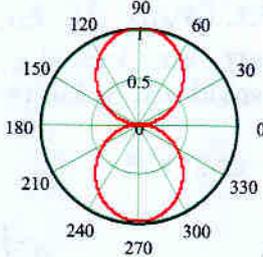
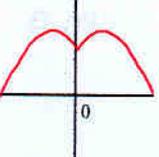
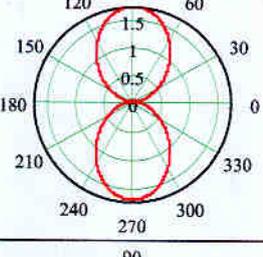
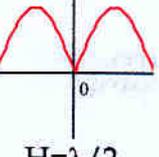
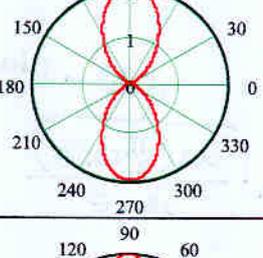
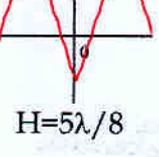
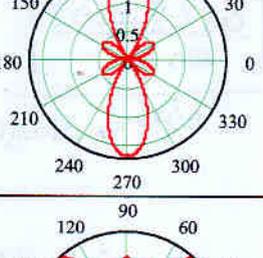
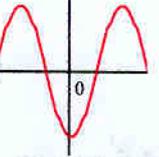
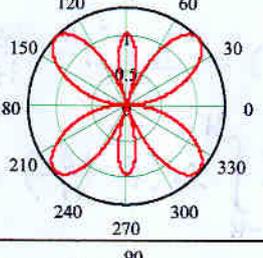
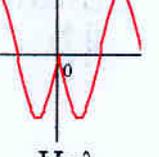
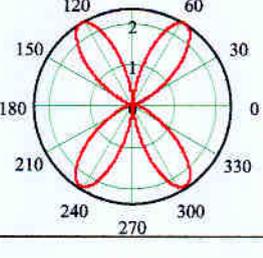
Tomando

$$P_{max} = P(\theta = \pi/2)$$

lo cual es válido hasta que el lóbulo secundario supera al principal



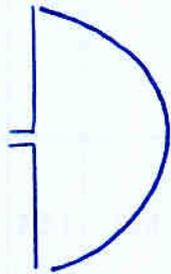
Lo correcto sería elegir el  $\theta$  adecuado para cada  $H$  según hacia donde esté el lóbulo principal; pero no nos metemos en eso.

TABLA COMPARATIVA DE DIPOLOS						
Corrientes	Corte Plano E	Diagrama	ancho	D	$R_r$	$R_{in}$
 $H=\lambda/4$			78°	1.64	73Ω	73Ω
 $H=3\lambda/8$			62°	1.94	180Ω	360Ω
 $H=\lambda/2$			47°	2.41	199Ω	∞ Ω
 $H=5\lambda/8$			31°	3.33	105Ω	210 Ω
 $H=3\lambda/4$			32°	2.17	99.5Ω	99.5Ω
 $H=\lambda$			27°	2.52	260Ω	∞ Ω

## 6. Casos particulares

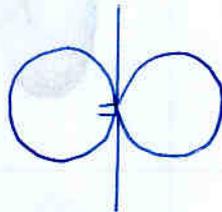
### • Dipolo resonante ( $H = \lambda/4$ )

se logra resonancia (parte imag de  $Z_a$  nula) sin hacer nada; por el mero hecho de ser  $\lambda/4$  (en realidad debe ser un poquito menos)



$$I(z) = I_m \cdot \cos kz$$

$$\vec{E} = E_0 \hat{\theta} = j60 I_m \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\theta}$$



Plano E



plano H

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{rad} = R_{in} = 73 \Omega \\ l_{e/max} = \frac{\lambda}{\pi} \\ D_{max} = 1.64 \end{array} \right.$$

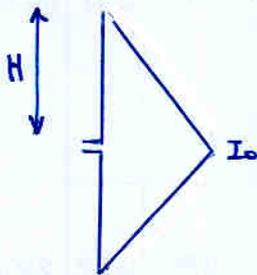
$$d(\theta) \rightarrow \text{diagrama de campo}$$

$$l_e(\theta) = l_{e/max} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}$$

$$D(\theta) = D_{max} \cdot \left[ \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right]^2$$

$t(\theta) \rightarrow \text{diagrama de potencia}$

### • Dipolo corto



$$I(z) = I_0 \cdot \left(1 - \frac{|z|}{H}\right) \quad \text{ya que } \frac{z}{\lambda} \ll 1$$

$$\vec{N} = \hat{z} \int_{-H}^H I_0 \left(1 - \frac{|z|}{H}\right) e^{jk_z z'} dz' = \hat{z} I_0 H$$

recuerda: dipolo elemental  
 $\updownarrow$   $\vec{N} = I_0 l \hat{z}$

$$\vec{N} = \hat{z} I_0 H$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -j\omega A_0 \hat{\theta} = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 H (-\sin\theta) \hat{\theta} \\ &= j \frac{k\eta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 H \sin\theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

$$D_{\max} = 1.5$$

$$I_{\text{ejmax}} = \frac{1}{I_0} \int_{-H}^H I_0 \left(1 - \frac{|z|}{H}\right) dz$$

$$= H$$

$$R_{\text{rad}} = 20 \pi^2 \left(\frac{2H}{\lambda}\right)^2$$

recuerda  
I<sub>ejmax</sub> es  $\vec{N}$  en esféricas  
particularizado en el  
máximo y dividido  
entre  $I_0$

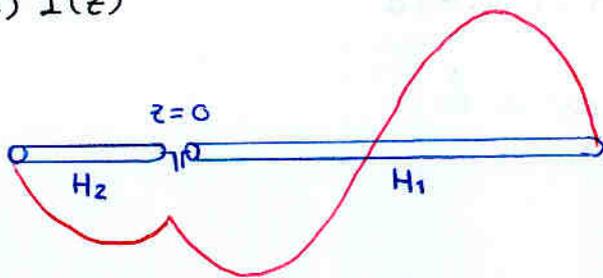
recuerda: dipolo elemental

$$R_{\text{rad}} = 80 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

El dipolo corto es 4 veces peor,  
por eso se intenta uniformizar  
la corriente  
(ejemplo: cargas capacitivas  
en los extremos)

Problema: dipolo con alimentación asimétrica

a)  $I(z)$



Forzas tres cosas:

- estacionariedad de la corriente
- corriente nula en los extremos
- continuidad en el punto de alimentación

$$I(z) = \begin{cases} I_{m1} \operatorname{sen}[k(H_1 - z)] & z > 0 \\ I_{m2} \operatorname{sen}[k(H_2 - z)] & z < 0 \end{cases}$$

forzando continuidad:  $I_{m1} \operatorname{sen}(kH_1) = I_{m2} \operatorname{sen}(kH_2) = I_0$

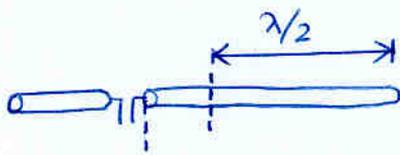
$$I(z) = \begin{cases} \frac{I_0}{\operatorname{sen}(kH_1)} \operatorname{sen}[k(H_1 - z)] & z > 0 \\ \frac{I_0}{\operatorname{sen}(kH_2)} \operatorname{sen}[k(H_2 - z)] & z < 0 \end{cases}$$

b) caso particular  $H_1 + H_2 = \lambda$

$$I(z) = \begin{cases} \frac{I_0}{\operatorname{sen}(kH_1)} \operatorname{sen}[k(H_1 - z)] & z > 0 \\ \frac{I_0}{\operatorname{sen}(k\lambda - kH_1)} \operatorname{sen}\left[\underbrace{k\lambda}_{2\pi} - \underbrace{kH_1}_{z\pi} + kz\right] & z < 0 \end{cases}$$

$$I(z) = \begin{cases} \frac{I_0}{\operatorname{sen}(kH_1)} \operatorname{sen}[k(H_1 - z)] & z > 0 \\ -\frac{I_0}{\operatorname{sen}(kH_1)} [-\operatorname{sen}[k(H_1 - z)]] & z < 0 \end{cases}$$

$$I(z) = \frac{I_0}{\operatorname{sen}(kH_1)} \operatorname{sen}[k(H_1 - z)]$$



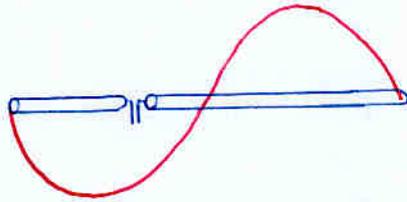
haciendo una traslación:

$$z' = z - \left(H_1 - \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$I(z') = I_m \sin \left[ kH_1 - kz' - kH_1 + k \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$I(z') = I_m \sin kz'$$

da igual  $H_1$  y  $H_2$ , lo que importa es  $H_1 + H_2 = \lambda$



Nota: no es habitual el dipolo con  $H = \lambda/2$



que tiene  $Z_{in} = \infty$



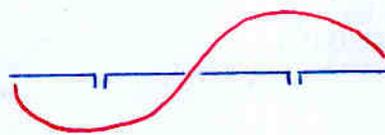
El campo radiado depende sólo de  $I(z')$  sin importar dónde alimentemos.  $W_r = I_m^2 \cdot R_{rad}$   
El punto de alimentación sólo afecta a  $R_{in}$   $W_r = I(0)^2 \cdot R_{in}$

c) obtener el campo

• obtenemos el vector de radiación

1ª opción • Integrar  $I(z')$  que es un seno  $\rightarrow$  dos exponenciales

2ª opción: no hay NINGUNA diferencia con



Array de 2 dipolos en  $\lambda/2$

1ª opción:

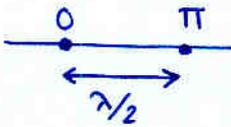
- Ya nos olvidamos de los bornes
- sólo nos interesa la corriente

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \hat{z} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \sin kz' e^{ik_z z'} dz' = \hat{z} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \frac{e^{ik_z z'} - e^{-ik_z z'}}{2j} \cdot e^{ik_z z'} dz' \\ &= \hat{z} \frac{1}{2j} \left[ \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} e^{i(k+k_z)z'} dz' + \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} e^{i(k_z-k)z'} dz' \right] \end{aligned}$$

2ª opción

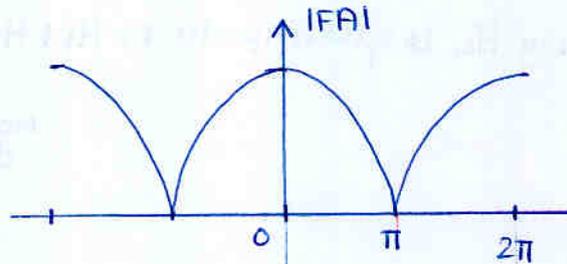


$$\vec{E}_{\lambda/2}$$



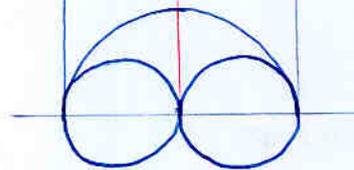
$$\vec{E} = \vec{E}_{\lambda/2} \cdot FA$$

- Distribución uniforme (N=2)
- $\alpha = \pi$



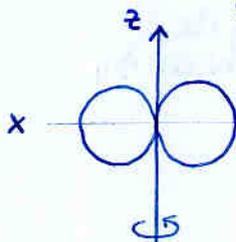
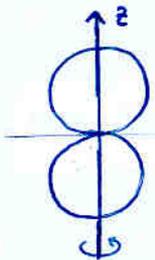
$$[\alpha - kd, \alpha + kd]$$

$$[0, 2\pi]$$



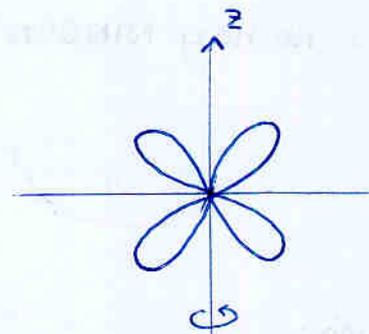
Por tanto:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\lambda/2} \cdot FA$$

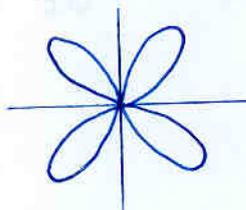
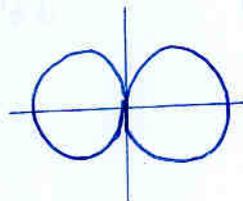
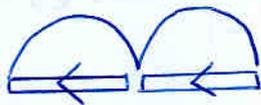


por fortuna tienen la misma simetría de revolución, por tanto la multiplicación es trivial

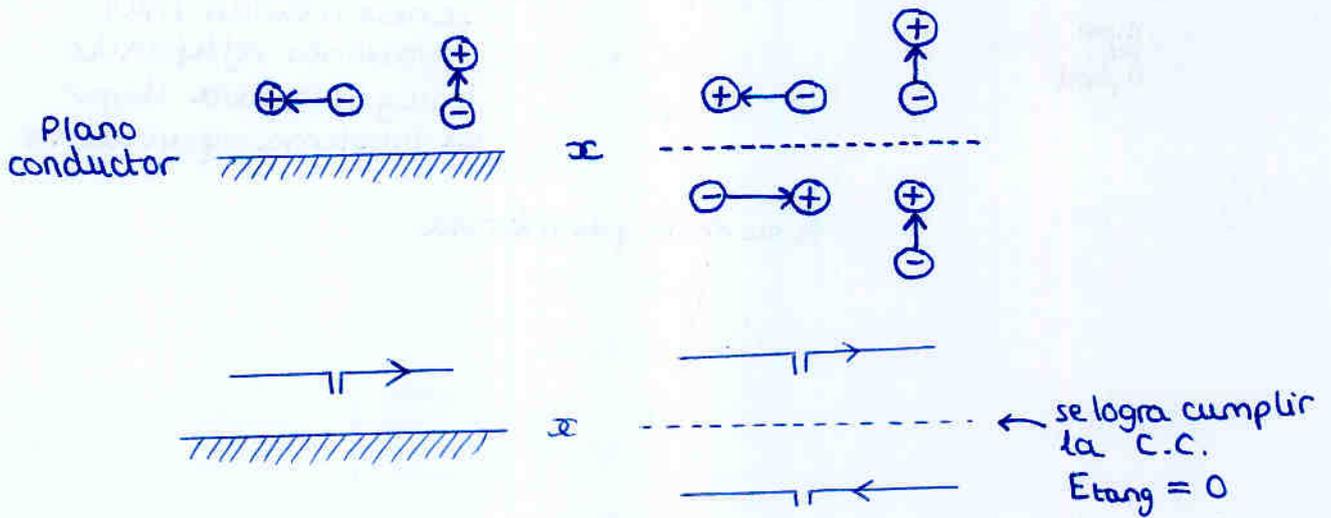
=



Vemos que han salido muy diferentes:



# 7. Teoría de las imágenes

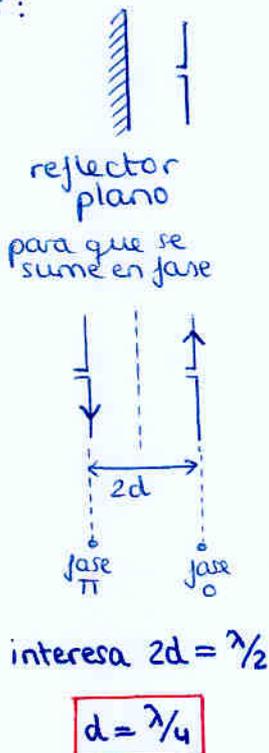


Intuitivamente tiene sentido

tiene lógica que el dipolo imagen tenga la corriente en el sentido opuesto

Podemos aprovechar esto para aumentar la directividad

ejemplos:



¿Cuánto mejora la directividad?

Estimación suponiendo misma  $W_{rad}$

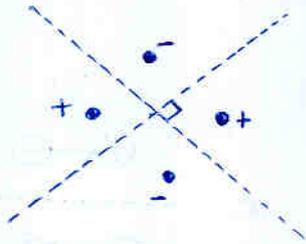
$$\frac{1}{2} \rightarrow E_{max} \quad D_{max} = \frac{|E_{max}|^2}{W_{rad}/4\pi r^2}$$

$$2E_{max} \quad D_{max} = 4 \cdot D_{max}$$

en realidad no será así porque  $Z_{in}$  cambiará y entonces  $W_{rad}$  también: ya lo veremos en tema 6

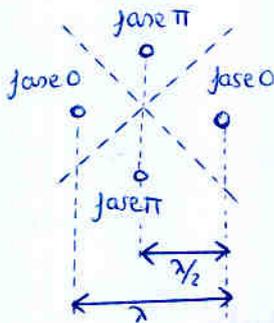


reflector  
dihedrico



Parece obvio que interesa

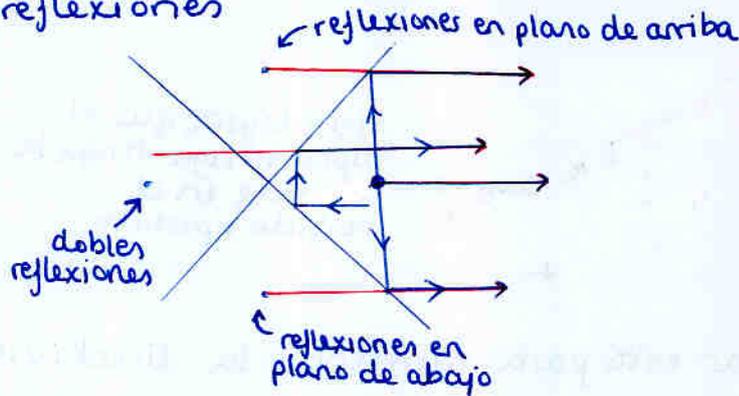
Si el ángulo no fuera  $90^\circ$ ,  
se necesitarían más  
iteraciones reflejando  
imágenes para llegar  
al problema equivalente



$$d = \frac{\lambda}{2}$$

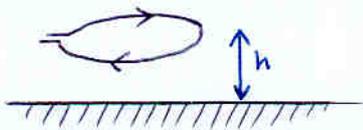
Es curioso ver como  
ciertas reflexiones

cada imagen tiene en cuenta

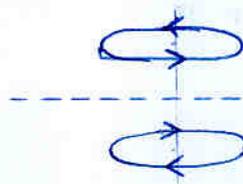


Problema: Espira sobre el plano de masa

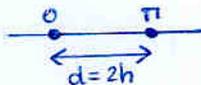
a) campo radiado



$x$



$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{espira}} \cdot FA$$



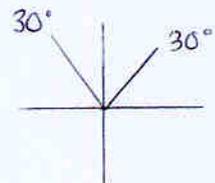
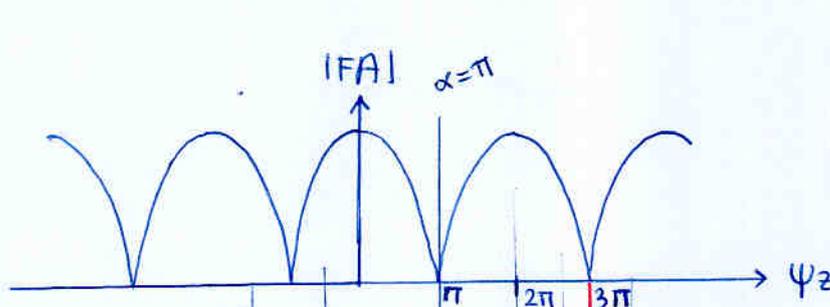
$$\vec{E}_{\text{espira}} = \frac{\pi I_0}{\lambda^2} \pi a^2 \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \cdot \hat{\theta}$$

$$FA = \frac{\text{sen}(2 \frac{\psi_z}{2})}{\text{sen}(\frac{\psi_z}{2})}$$

$$\psi_z = kd \cos \theta + \alpha$$

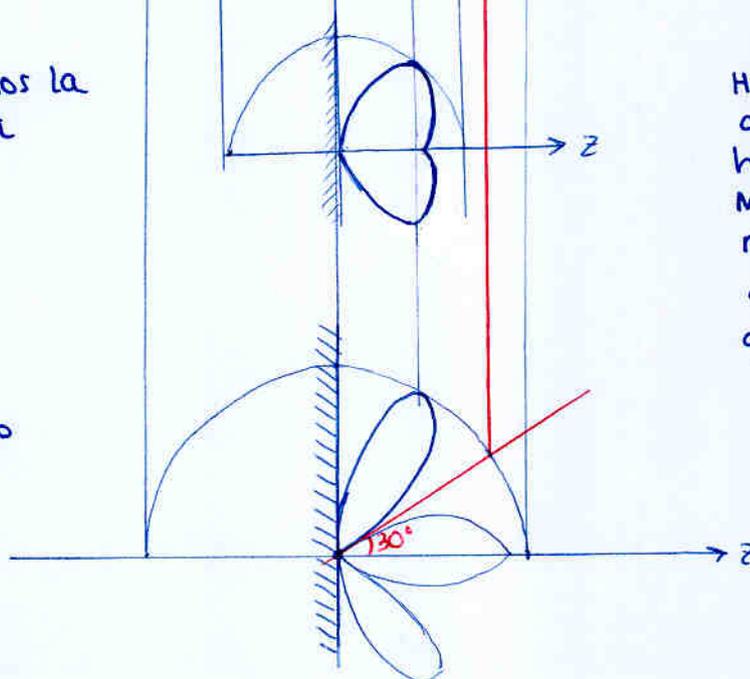
$\uparrow$   $\uparrow$   
 $d=2h$   $\alpha=\pi$

b) h mínima tal que exista un nulo en 30° con el eje de la espira



veamos la pinta

lo que yo quiero:



$\alpha$  está fijo en  $\pi$   
 Habrá que ir agrandando  $h$  hasta que el M.V. abarque un nulo, y seguir agrandando hasta que el nulo quede en 30°

Hay que forzar que  $\psi_z = 3\pi$  esté asociado a  $\theta = 30^\circ$

$$\psi_z = kd \cos \theta + \alpha$$

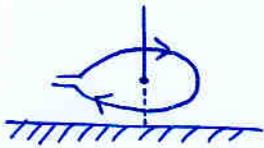
$$3\pi = k(2h) \cos 30^\circ + \pi$$

$$2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} 2h \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{\lambda}{\sqrt{3}}$$

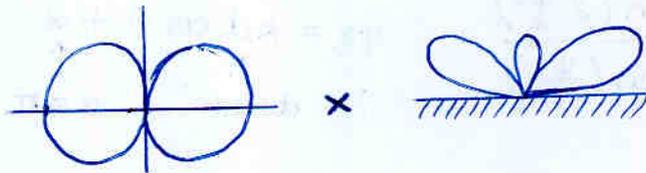
! Cuidado  $d = 2h$

c) Diagrama en plano perpendicular al plano de masa



Pensar porque corresponde al plano H  
( $\vec{E}$  va en dirección  $\hat{z}$ , así que imaginar  $\vec{E}$  en el máximo)

Diagrama plano H

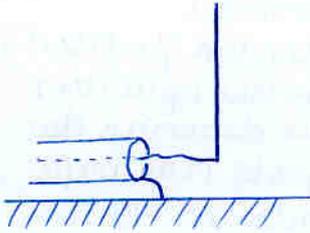


III

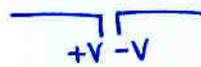


• Monopolos

El monopolo se puede alimentar con coaxial



Recuerda que un dipolo hay que alimentarlo en simétrico



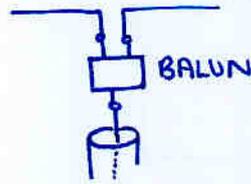
alimentación balanceada

no sirve conectar un coaxial tal cual



alimentación no balanceada

hay que usar un balun



unbalanced  
↑  
balanced

En antenas los Balun son dispositivos muy curiosos

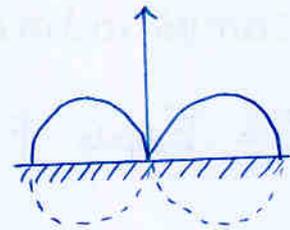
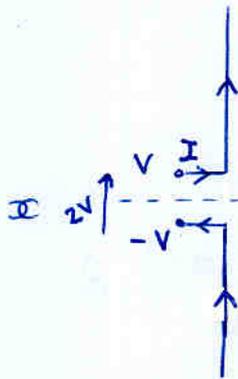
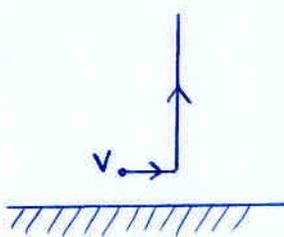


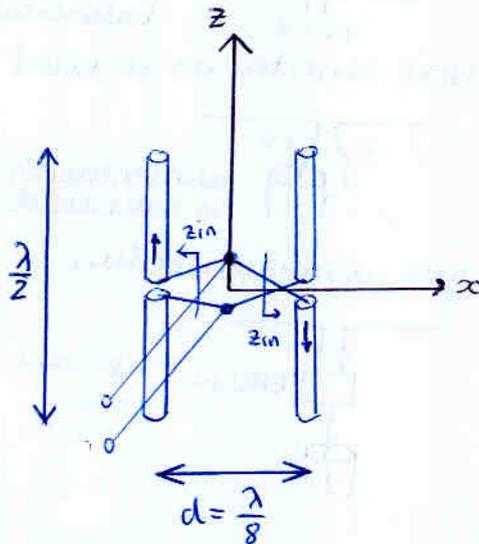
Tabla comparativa

	Dipolo	Monopolo
Corriente	I	I
Tensión	2V	V
↓		
Potencia	2W	W
↓		
R <sub>rad</sub>	Z	Z/2
Directividad	D	2D
l <sub>ef</sub>	l	l/2

← es I·V  
además se ve que solo radia la mitad

← misma I con distinta W  
2V = IR<sub>dipolo</sub>  
V = IR<sub>monopolo</sub>

← (pensar lógicamente, recuerda que D se calcula normalizando a la pot radiada)



$$Z_{in} = 9 + j40 \Omega$$

Intuitivamente:  
 dos dipolos tan 'juntitos' y  
 con corrientes opuestas  
 parece que deberían dar  
 $Z_{in}$  de parte real baja  
 (comparado con  $73 \Omega$   
 del dipolo)

a) Campo radiado

$$\vec{E} = \vec{E}_{dipolo} \cdot FA_x(\psi_x)$$

$$\vec{E}_{dipolo} = j60 I_m \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\theta}$$

$$FA_x(\psi_x) = \frac{\sin(2\frac{\psi_x}{2})}{\sin(\frac{\psi_x}{2})}$$

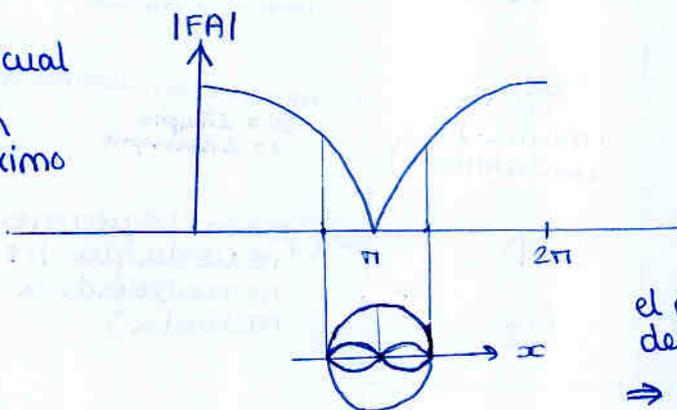
$$\psi_x = kd \sin \theta \cos \phi + \alpha$$

$d = \frac{\lambda}{8}$       $\alpha = \pi$   
array en x

$$kd = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$$

b) Identificar plano E y dibujarlo

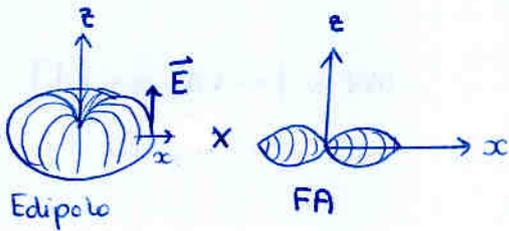
veamos cual  
 es la  
 dirección  
 del máximo



$$MV \in [-kd + \alpha, kd + \alpha]$$

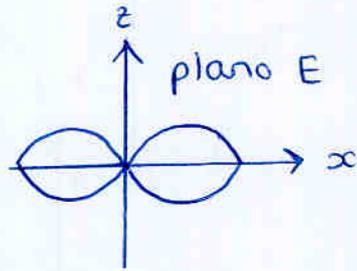
$$[\pi - \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}]$$

el máximo del FA no está dentro  
 del MV  
 $\Rightarrow$  no hay ninguna dirección  
 en la que los campos se  
 sumen en fase

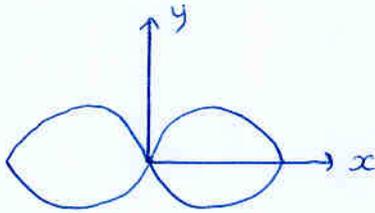


El máximo estará en dirección  $x$

El plano E será XZ



El plano H será XY



### d) Directividad

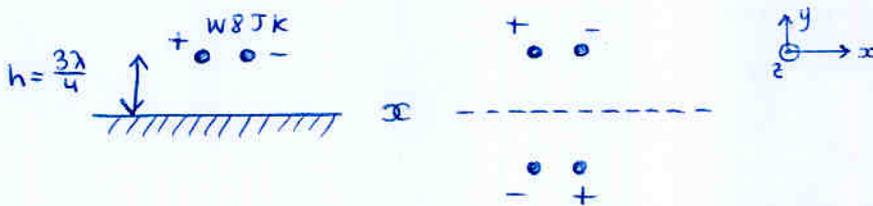
Si me dan la impedancia  $\rightarrow$  no integremos el diagrama de radiación para obtener directividad

$$D_{max} = \frac{P_{max}}{\frac{W_{rad}}{4\pi r^2}} = \frac{\frac{|E_{max}|^2}{2}}{W_{rad}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{1}{7} \left(\frac{60}{r} I\right)^2 \cdot \left[2 \cos \frac{(\pi + \pi/4)}{2}\right]^2}{W_{rad}} \cdot 4\pi r^2$$

$$W_{rad} = 2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parte real} \\ \text{de } Z_{in}}}{9} \cdot I^2$$

$\uparrow$   
parte real de  $Z_{total}$

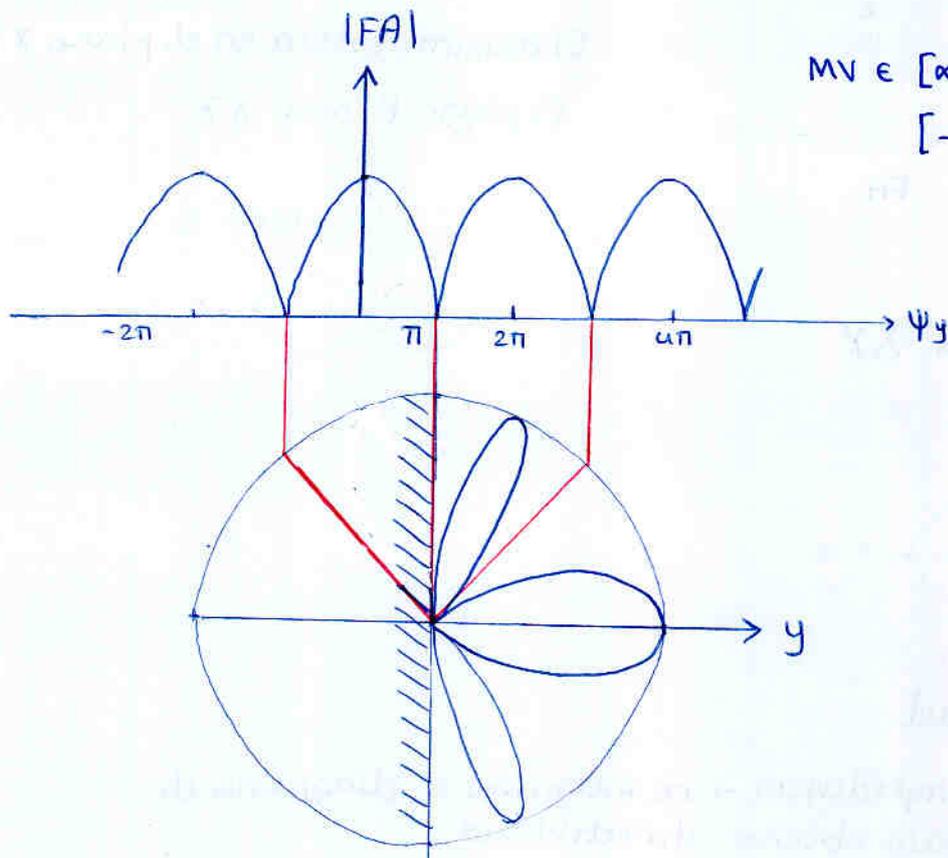
### e) Lo ponemos sobre masa a cierta distancia



$$\vec{E} = \vec{E}_{W8JK} \cdot FA_y(\psi_y) \quad \text{array uniforme} \quad \begin{matrix} \alpha = \pi \\ d = 2 \cdot \frac{3\lambda}{4} \end{matrix}$$

$$FA_y(\psi_y) = \frac{\sin\left(2 \frac{\psi_y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_y}{2}\right)}$$

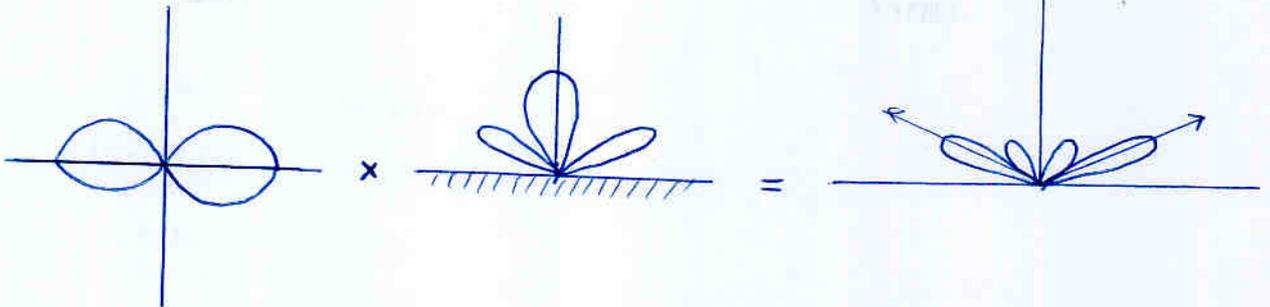
$$\psi_y = \underset{\substack{\uparrow \\ kd = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 \cdot \frac{3\lambda}{4} \\ = 3\pi}}{kd \sin \theta \sin \phi} + \alpha \quad \uparrow \quad \alpha = \pi$$



$$MV \in [\alpha - kd, \alpha + kd]$$

$$[-2\pi, 4\pi]$$

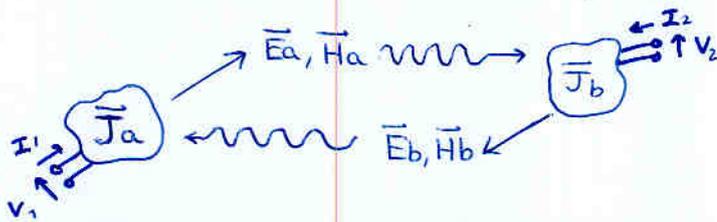
En el plano XY queda



# Tema 6. Interacción entre antenas. Impedancias

- 6.1 Teorema de reciprocidad
- 6.2 Aplicaciones (consecuencias) del T<sup>a</sup>
  - Igualdad de impedancias mutuas
  - Igualdad de los diagramas en tx y rx
  - Igualdad de Z<sub>in</sub> en tx y rx
  - Cálculo de la V<sub>ca</sub>
- 6.3 Longitud efectiva en recepción
- 6.4 Desacople de polarización: C<sub>p</sub>
- 6.5 Impedancia de dipolos
  - Impedancia mutua
  - Autoimpedancia
  - Impedancia frente a planos conductores
- 6.6 Antenas Yagi
- 6.7 Dipolo doblado

## 1. Teorema de reciprocidad



$$\iiint_{V_a} \vec{E}_b \cdot \vec{J}_a \, dV_a' = \iiint_{V_b} \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b \, dV_b'$$

Identidad matemática  
(no ley física)  
que relaciona  
campos y corrientes

## 2. Aplicaciones del teorema



$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

• Igualdad de impedancias mutuas

Aplicando el teorema de reciprocidad se obtiene:

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = Z_{12} \Rightarrow \boxed{Z_{12} = Z_{21} \text{ SIEMPRE}}$$

• Igualdad de diagramas en tx y rx

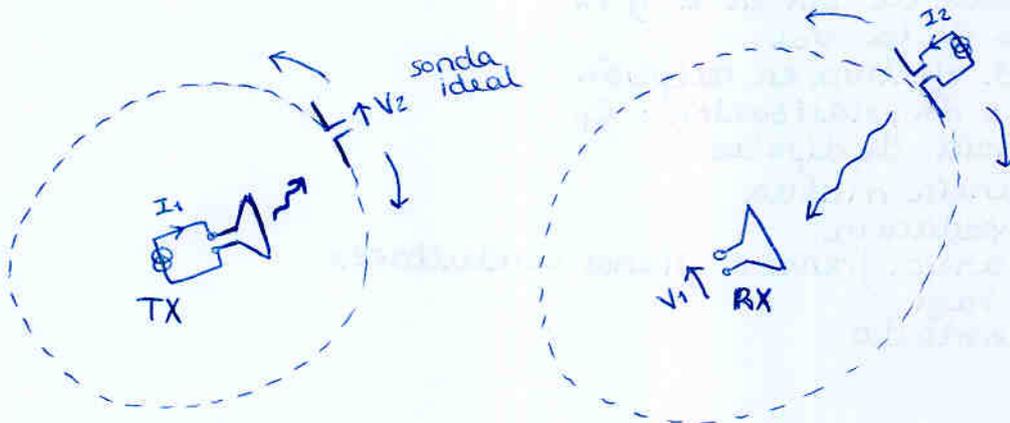
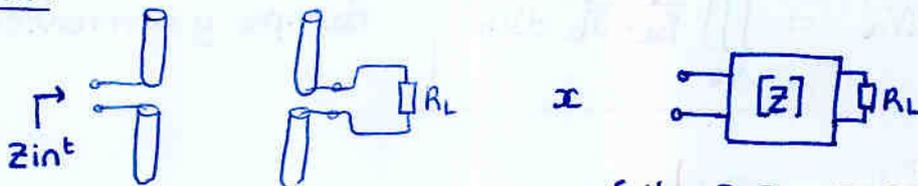


Diagrama:  $\frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$

$\uparrow$   
 $Z_{12} = Z_{21}$

• Igualdad de Zin en tx y rx

en tx:



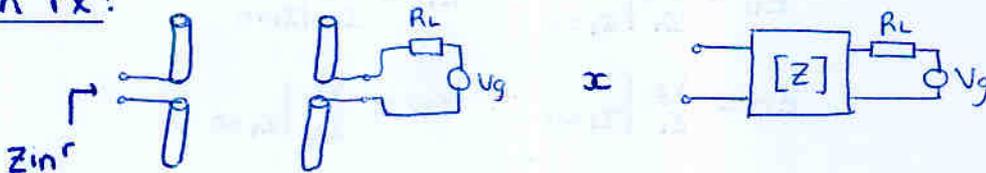
Zin se ve afectada por la presencia de la otra antena

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \\ V_2 = -R_L I_2 \end{cases}$$

$$Z_{in}^t = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{R_L + Z_{22}}$$

despreciable si las antenas estan lejos. Es util en arrays

en rx:



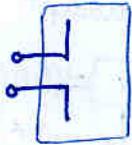
se obtiene

$$Z_{in}^r = -\frac{V_{ca}}{I_{cc}} = Z_{in}^t$$

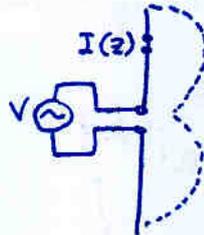
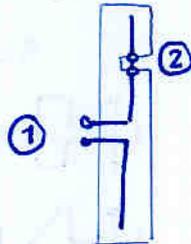
$\uparrow$   
thevenin

• cálculo de la  $V_{ca}$

Hasta ahora los dipolos los considerábamos como un único puerto



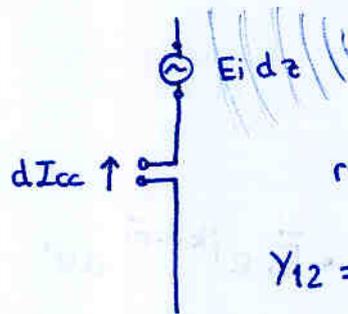
pero sería más justo añadir un puerto de salida que son los campos electromagnéticos (sin bornes definidos) (usamos "diferencial de bornes" distribuidos por todo el dipolo)



transmisión

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{I(z)}{V}$$

Además un campo electromagnético incidente lo podemos modelar como generador de tensión en el puerto 2



recepción

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} = \frac{dI_{cc}}{E_i dz}$$

Ya que:

$$Y_{21} = Y_{12}$$

$$\frac{I(z)}{V} = \frac{dI_{cc}}{E_i \cdot dz}$$

$$dI_{cc} = \frac{1}{V} I(z) E_i(z) dz$$

$$I_{cc} = \frac{1}{V} \int I(z) E_i(z) dz$$

Y como lo que nos interesa es  $V_{ca}$

$$Z_{in} = \frac{V}{I(0)} \stackrel{\text{cortocircuito}}{=} - \frac{V_{ca}}{I_{cc}}$$

$$V \cdot I_{cc} = -V_{ca} \cdot I(0)$$

entonces

$$V_{ca} = - \frac{1}{I(0)} \int_{\text{dipolo}} I(z) E_i(z) dz$$

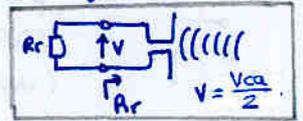
ⓘ

$I(z)$  es la corriente en la antena cuando transmite

En general para cualquier antena (no sólo dipolo)

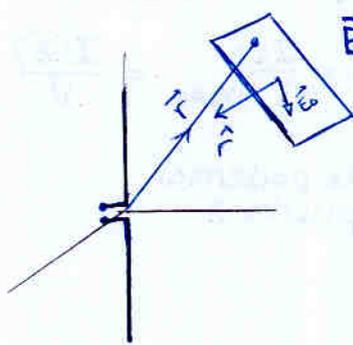
$$V_{ca} = -\frac{1}{I(0)} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{E}_i(\vec{r}') \cdot dV'$$

y la potencia recibida  
 $W = \frac{|V_{ca}|^2}{4 R_r}$  si hay adapt



3. Longitud efectiva en recepción

→ onda plana incidente:



$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{jk \hat{r} \cdot \vec{r}}$$

es  $\vec{r}$  y no  $\vec{r}'$

$E_i$  en los puntos de la antena si que es  $\vec{r}$

Recuerda

- $l \ll \lambda$   $l_{effmax} = l$   
 $\vec{f}(\theta) = l \text{ sen } \theta \hat{\theta}$
- $l \approx \lambda/2$   $l_{effmax} = \frac{l}{2}$   
 $\vec{f}(\theta) = \frac{l}{2} \text{ sen } \theta \hat{\theta}$
- $l = \frac{\lambda}{2}$   $l_{effmax} = \frac{\lambda}{\pi}$   
 $\vec{f}(\theta) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\text{sen } \theta} \hat{\theta}$

$$V_{ca} = -\frac{1}{I(0)} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{E}_0 e^{jk \hat{r} \cdot \vec{r}} dV'$$

$$= -\vec{E}_0 \cdot \left[ \frac{1}{I(0)} \int_{V'} \vec{J} \cdot e^{jk \hat{r} \cdot \vec{r}} dV' \right]$$

$\vec{N}$

componente radial

$$V_{ca} = -\vec{E}_0 \cdot \frac{\vec{N}}{I(0)} = -\vec{E}_0 \cdot \frac{\vec{N}_r + \vec{N}_{transv}}{I(0)}$$

pero como  $\vec{E}_0 \cdot \vec{N}_r = 0$

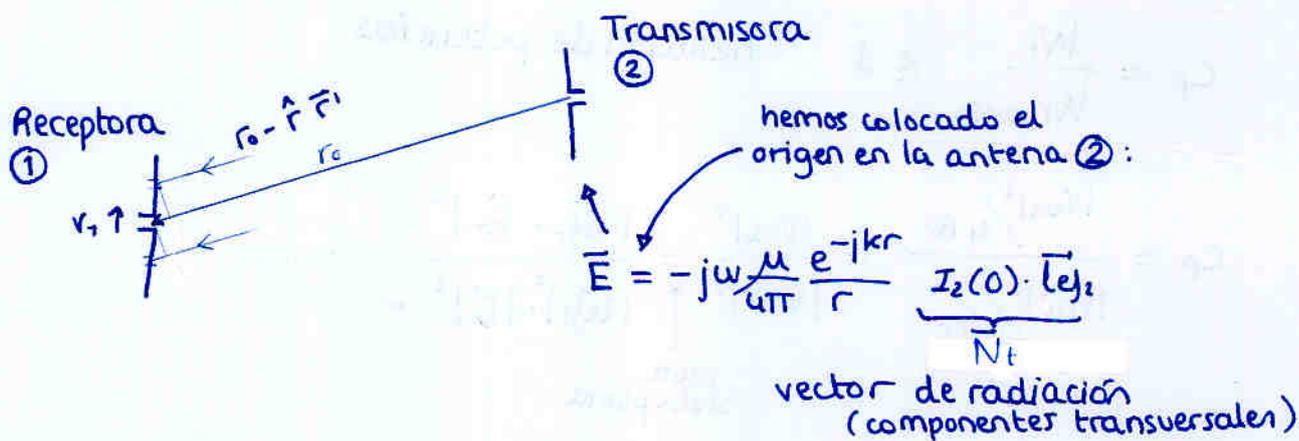
$$V_{ca} = -\vec{E}_0 \cdot \frac{\vec{N}_{transv}}{I(0)}$$

$l_{ef} !!$

$$V_{ca} = -\vec{E}_0 \cdot \vec{l}_{ef}$$

para una onda plana incidente

→ para una onda producida por otra antena



$$V_1 = -\frac{1}{I_1} \int_{V_1} \vec{J}_1(\vec{r}_1) \cdot \left[ -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_2(0) \cdot \vec{e}_{j_2} \right] dV_1$$

a cada dV le incidirá un campo con cierto desfase (aproximamos mismo módulo) (aprox. rayos paralelos)

$$= j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I_1} \int J_1(\vec{r}_1) \cdot \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} e^{jk \hat{r} \cdot \vec{r}_1} I_2(0) \cdot \vec{e}_{j_2} dV_1$$

$\vec{r} \rightarrow (\vec{r}_0 - \hat{r} \cdot \vec{r}_1)$  con  $r'$  tomando origen en ① / se tiene en cuenta luego  
 tomando como origen ②

$$= j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} I_2(0) \cdot \vec{e}_{j_2} \frac{1}{I_1} \int \vec{J}_1(\vec{r}_1) e^{jk \hat{r} \cdot \vec{r}_1} dV_1$$

origen en ①

$$\vec{N}_1 = \vec{N}_{1r} + \vec{N}_{1t} \leftarrow \text{transversal}$$

radial

pero  $\vec{e}_{j_2} \cdot \vec{N}_{1r} = 0$  y  $\frac{\vec{N}_{1t}}{I_1} = \vec{e}_{j_1}$

$$-\vec{E}_{12}$$

$$V_{ca} = j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} I_2(0) \cdot \vec{e}_{j_2} \cdot \vec{e}_{j_1}$$

$$V_{ca} = -\vec{E}_{12} \cdot \vec{e}_{j_1}^*$$

calculado y expresado en sistema de coord ②

$$\hat{\theta}', \hat{\phi}'$$

calculado y expresado en sist coord ①

$$\hat{\theta}, \hat{\phi}$$

El producto escalar no se puede hacer sin más. Afortunadamente en la dirección que une los dipolos

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}' \quad \hat{\phi} = -\hat{\phi}' \quad \left. \vphantom{\hat{\theta} = \hat{\theta}'}$$

se puede expresar como

$$\vec{e}_{j_1} \cdot \vec{e}_{j_2}^*$$

#### 4. Desacople de polarización

$$C_p = \frac{W_r}{W_{\text{acoplo}}} \leq 1 \quad \text{Relación de potencias}$$

$$C_p = \frac{|V_{ca}|^2 / 4R_r}{|V_{ca}^a|^2 / 4R_r} = \frac{|V_{ca}|^2}{|V_{ca}^a|^2} = \frac{|\vec{t}_{ej_r} \cdot \vec{E}_0|^2}{|\vec{t}_{ej_r}|^2 |\vec{E}_0|^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{suponiendo} \\ \vec{t}_{ej} \parallel \vec{E}_0 \end{array} \right.$$

para onda plana

para dos antenas

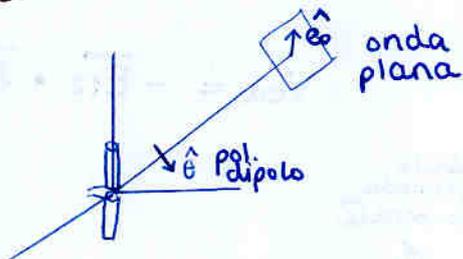
$$C_p = \frac{|\vec{t}_{ej_1} \cdot \vec{t}_{ej_2}^*|^2}{|\vec{t}_{ej_1}|^2 \cdot |\vec{t}_{ej_2}|^2}$$

que son los vectores de la polarización normalizados (i.e. vector unitario en dirección de la polarización)

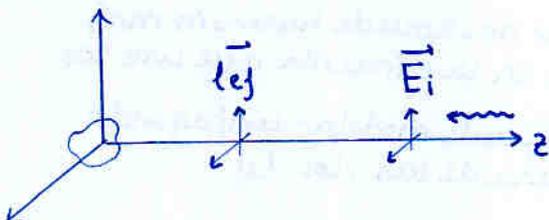
$$C_p = |\hat{P}_T \cdot \hat{P}_R^*|^2 \quad \text{para 2 antenas}$$

$$= |\hat{E}_0 \cdot \hat{P}_R|^2 \quad \text{para onda plana}$$

ejemplo:

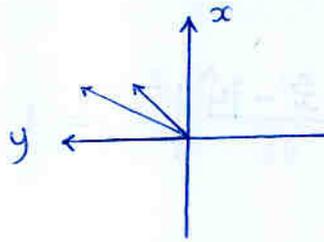


ejemplos por sencillez en el eje z:



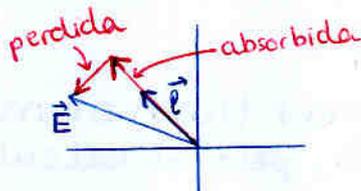
$$a) \quad \vec{E} = (\hat{x} + \hat{y}) e^{+jkz}$$

$$\vec{l} = \hat{x} + 2\hat{y}$$



El campo me llega con una polarización que no es la que la antena desearía.

Sólo captará la proporción de potencia que se acopla



$$C_p = \left| \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{x} + 2\hat{y}}{\sqrt{5}} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{9}{10} = 0.9$$

$$b) \quad \vec{E} = (\hat{x} + j\hat{y}) e^{ikz}$$

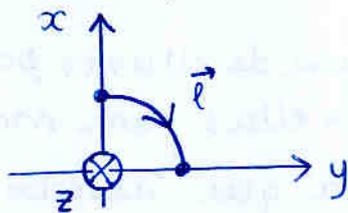
$$\vec{l} = (\hat{x} - j\hat{y})$$

Es una polarización circular. Para l tenemos:

$$\text{Re}[(\hat{x} - j\hat{y}) \cdot e^{i\omega t}] = \text{Re}[\hat{x} e^{i\omega t} + \hat{y} e^{i\omega t - \frac{\pi}{2}}]$$

$$= \hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Para ver si es a derechas o a izquierdas la miramos según se aleja de nosotros (verlo dando valores)  $\omega t = 0$   
(desde la antena)  $\omega t = \frac{\pi}{2}$

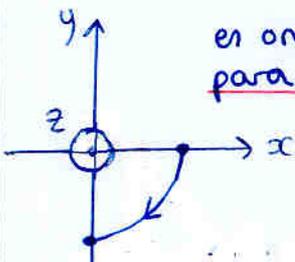


$\Rightarrow$  a derechas

$$\text{Para } \vec{E}: \quad \text{Re}[(\hat{x} + j\hat{y}) e^{ikz}] = \text{Re}[\hat{x} e^{ikz} e^{i\omega t} + \hat{y} e^{ikz} e^{i\omega t + \frac{\pi}{2}}]$$

$$= \hat{x} \cos(\omega t + kz) + \hat{y} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2} + kz)$$

es onda regresiva; hay que verla con z hacia fuera del papel  
para verla alejarse



$\Rightarrow$  a derechas

en efecto

$$C_p = \left| \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} \right|^2 = 1$$

con onda plana no hace falta conjugar ya que  $\hat{e}_s$  está dado en el mismo sistema de coordenadas que  $\hat{i}$

si en lugar de onda plana tuvieramos campo generado por otra antena  $\vec{E}_2 = \hat{x} - j\hat{y}$

Esta  $\vec{E}_2$  está calculada usando el sistema de referencia de la antena 2. Entonces:

$$\vec{E}_1 = \hat{x} - j\hat{y}$$

$$\vec{E}_2 = \hat{x} - j\hat{y}$$

ambas antenas tienen misma polarización, pero al calcular  $C_p$  hay que tener en cuenta que los sistemas de coordenadas son distintos, y conjugamos una de ellas (modela que

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 1 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = -1 \end{pmatrix}$$

$$C_p = \left| \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} \cdot \left( \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} \right)^* \right|^2 = 1$$

c)  $\vec{E} = (\hat{x} + 2j\hat{y}) e^{ikz} \rightarrow$  elíptica

$$\vec{E} = \hat{x} + \hat{y} \rightarrow \text{lineal}$$

$$C_p = \left| \frac{\hat{x} + 2j\hat{y}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \frac{1 + 2j}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{5}{10} = 0.5$$

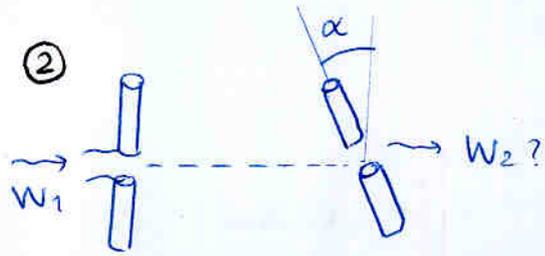
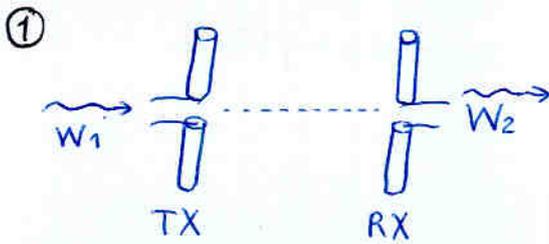
↑

cuando tratemos con dos antenas, si una de ellas es polarización lineal, no hace falta conjugar una de ellas para modelar que  $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = -1$ , ya que la potencia que 'absorbe' una polarización lineal cuando incide una polarización circular es independiente de si es a izquierdas o a derechas

si es circular igual

$$C_p = \left| \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \frac{1 + j}{2} \right|^2 = 0.5$$

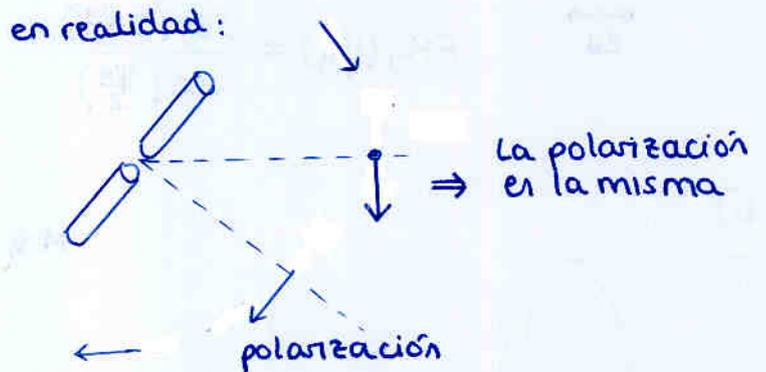
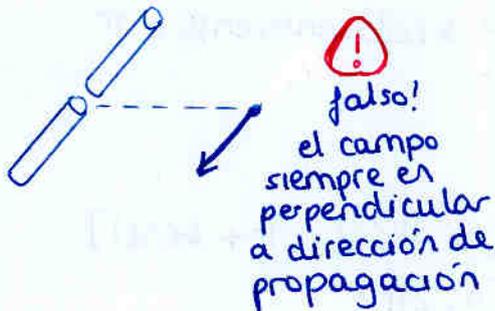
# Pregunta



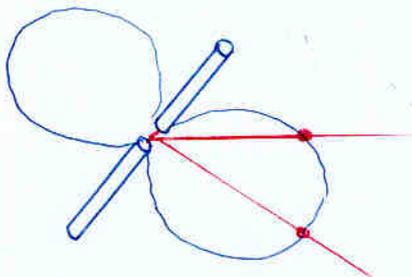
En el caso ②,  $W_2$  será menor. ¿Porqué?

- a) Pérdidas por  $C_p$
- b) Pérdidas de ganancia (diagrama radiación)

a) Cuidado

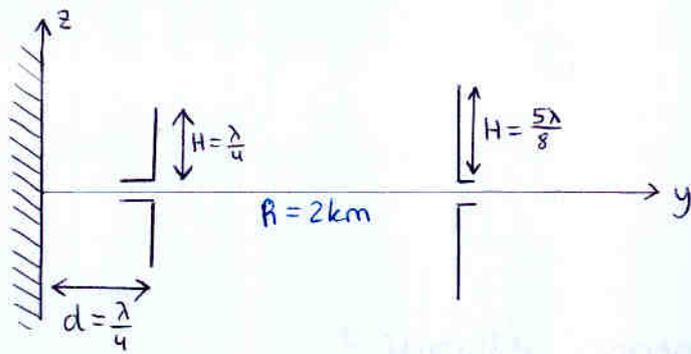


b) La razón es b



Habría pérdidas por polarización si girásemos el dipolo sacándolo del plano del papel

# Problema



$$Z_{in} = 60 + j10 \Omega$$

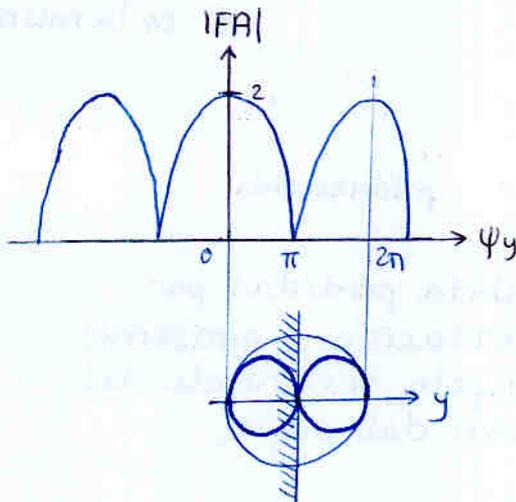
a)  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot FA_y(\psi_y)$



$$\vec{E}_0 = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\theta}$$

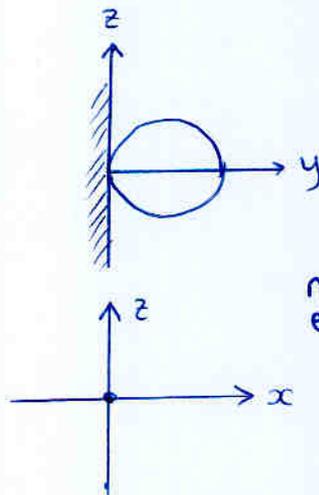
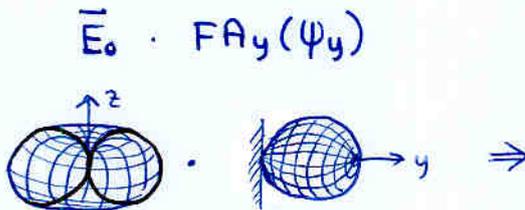
$$FA_y(\psi_y) = \frac{\sin(2 \frac{\psi_y}{2})}{\sin(\frac{\psi_y}{2})} \quad \psi_y = k(2d) \sin \theta \sin \phi + \pi$$

b)



$$M.V. \in [\pi - k(2d), \pi + k(2d)]$$

$$[0, 2\pi]$$



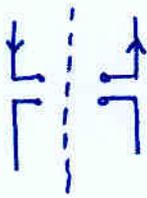
no hay campo en el plano XZ (de hecho es el conductor)

# Directividad

$$D_{\max} = \frac{P_{\max}}{W_{\text{rad}}} \cdot 4\pi r^2$$

$$\begin{aligned} \text{con } P_{\max} &= \frac{|E|^2}{\eta} = \frac{|E_{\text{omax}}|^2 |FA_{\text{max}}|^2}{\eta} \\ &= \frac{|\frac{60 I_m}{r}|^2 \cdot |2|^2}{120\pi} \end{aligned}$$

y con  $W_{\text{rad}}$



$$W_{\text{rad}} = I_m \cdot R_{\text{in}}^2$$

el hecho de que hayan dos dipolos no nos hace multiplicar por dos.

Ya se tiene en cuenta al tener  $R_{\text{in}} = 60$  en lugar de  $R_{\text{in}} = 73 \Omega$

$$D_{\max} = 8 \quad (9 \text{ dB})$$

c) sabiendo  $R = 2 \text{ km}$   
 $\lambda = 2.1 \text{ m}$   
 $I_m = 2.5 \text{ A}$

calcular  $V_{\text{ca}}$  del dipolo receptor

$$V_{\text{ca}} = - \vec{E}_i \cdot \vec{e}_{jR}$$

$\vec{e}_{jR}$  la calculamos comodamente centrando nuestro origen en la receptora



$$e_{j\text{max}} = \frac{1}{I(0)} \int_{-H}^H I(z) dz$$



$$I(z) = I_m \sin [k(H - |z|)]$$

$$\begin{aligned} kH &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{5\lambda}{8} = \frac{5\pi}{4} \\ \sin kH &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$e_{j\text{max}} = \frac{1}{I(0)} \int_{-H}^H I_m \sin (k(H - |z|)) dz$$

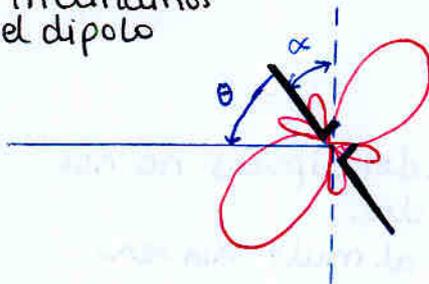
$$|\vec{e}|_{\max} = \frac{2}{\sin kH} \int_0^H \sin \left[ \frac{5\pi}{4} - z \right] dz = \frac{\lambda}{\pi} \cdot (\sqrt{2} + 1)$$

por tanto:

$$V_{ca} = -\vec{E}_i \cdot \vec{e}_{jR} \quad \text{en este caso } C_p = 1$$

$$= -|E_i| \cdot |\vec{e}_j| = -\frac{2 \cdot 60 I}{r} \cdot \frac{\lambda}{\pi} (\sqrt{2} + 1) = -0'24 V$$

d) Inclinaamos el dipolo



$$\text{Hallar } V_{ca}(\alpha) = V_{ca} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

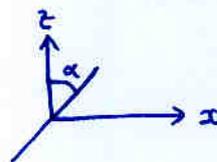
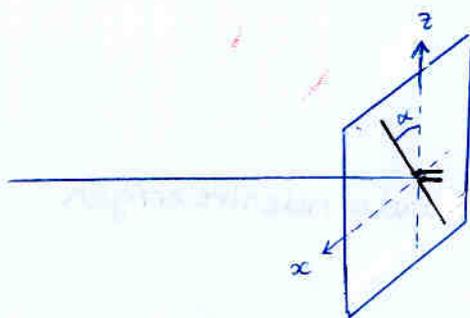
$$V_{ca}(\theta) = -\vec{E}_i \cdot \vec{e}_j \quad \text{sigue siendo } C_p = 1$$

$$= -|E_i| \cdot |\vec{e}_j(\theta)|$$

$$= -|E_i| \cdot |\vec{e}_{j\max} \cdot d\omega(\theta)|$$

$V_{ca}$  es proporcional al diagrama de radiación (campo)

e) Giramos el dipolo (estando paralelo a XZ)



cambia el vector de polarización

$$\vec{e}_j = \vec{e}_{j\max} \cdot (\sin \alpha \hat{x} + \cos \alpha \hat{z})$$

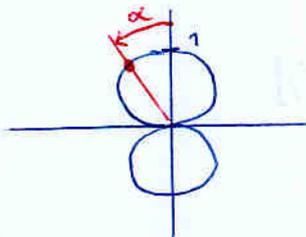
entonces:

$$V_{ca} = -\vec{E}_i \cdot \vec{e}_j$$

$$= |E_i| \hat{z} \cdot (\vec{e}_{j\max} (\sin \alpha \hat{x} + \cos \alpha \hat{z}))$$

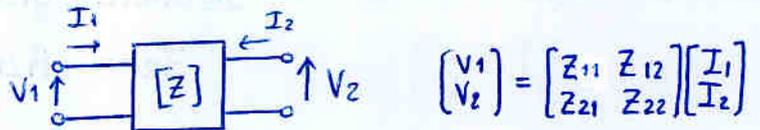
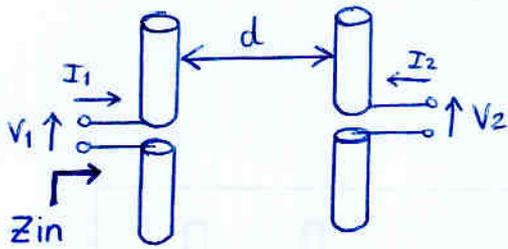
$$= |E_i| \cdot \vec{e}_{j\max} \cdot \cos \alpha$$

$V_{ca}$  es proporcional al coseno de alfa



$V_{ca}$  es proporcional al coeficiente de desacoplo de polarización; el cual es proporcional a  $\cos \alpha$

# 5. Impedancia



$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1}$$

autoimpedancia  
(=  $Z_{in}$  si la antena está aislada)

impedancia mutua  
(muy importante conocerla para tener  $Z_{in}$  en arrays)

## 5.1 Impedancia mutua

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$\uparrow$  Reciproc.       $\uparrow$  Def.

nota:  $V_2 |_{I_2=0} = V_{2ca}$   
tensión en circuito abierto

recuerda:

$$V_{ca} = -\frac{1}{I(0)} \int \vec{J} \cdot \vec{E}^i dz$$

Por tanto

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{V_{2ca}}{I_1}$$

$$Z_{21} = -\frac{1}{I_1(0) \cdot I_2(0)} \int_{V_2'} \vec{J}_2 \cdot \vec{E}_{21} dV_2'$$

ejemplo, para un dipolo:  $I_2(z) = I_m \sin[k(H-|z|)]$

La impedancia mutua sólo se calcula para antenas cercanas, ya que si consideramos antenas lejanas estaríamos haciendo un problema de transmisión

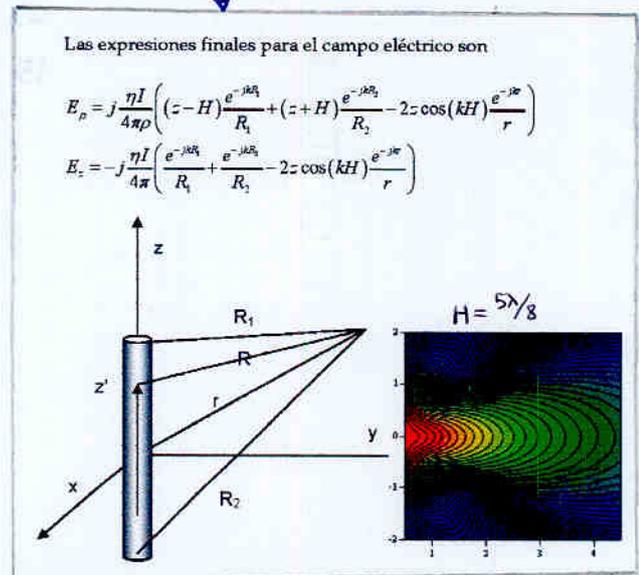
Expresión de los campos cercanos de un dipolo (está desarrollado en los apuntes de la web)

La integral se resuelve numéricamente.

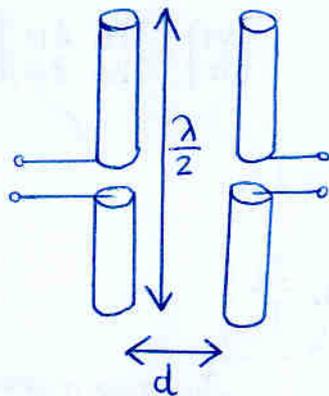
Nosotros podemos usar gráficas que se dan para situaciones típicas (que ahora veremos)

$$Z_{21} = R_{21} + jX_{21} \quad (\text{por de gráficas})$$

↓  
no tiene porqué ser positivo ya que no tiene interpretación de potencia.



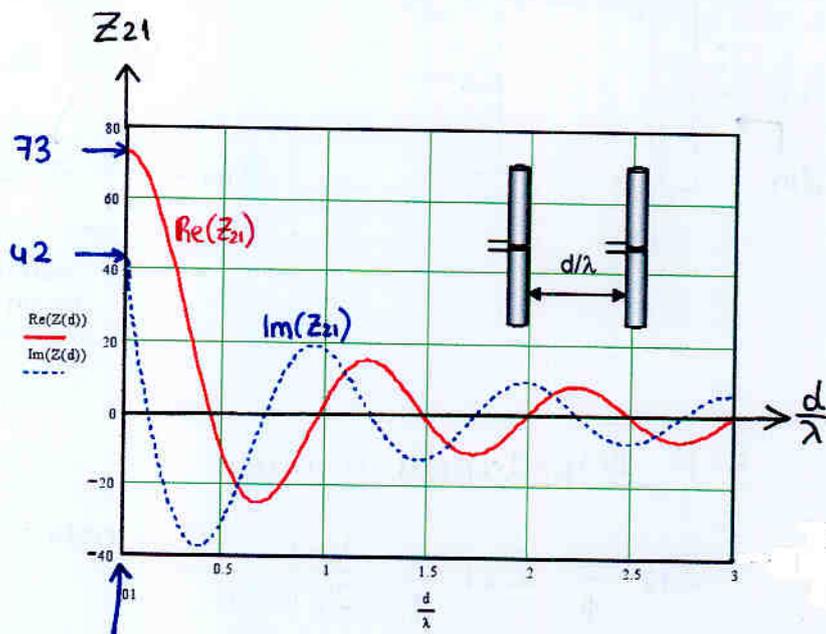
### Caso 1. Dipolos paralelos



Cuando uno es mínimo o máximo, el otro es nulo.

Se obtiene gráfica de:

$$Z_{21} = R_{21}(d) + jX_{21}(d)$$

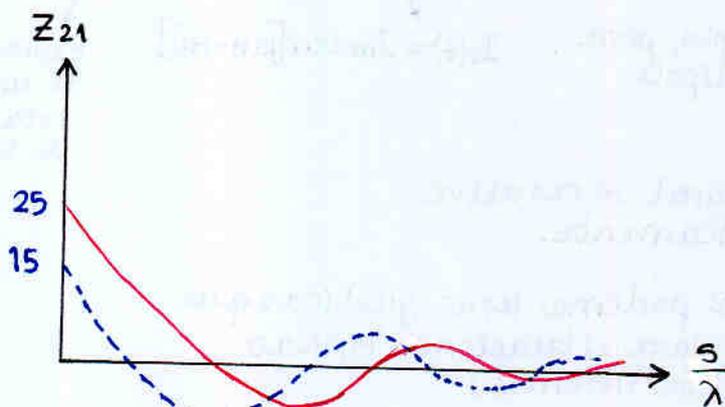
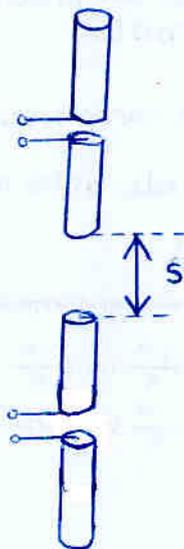


$$Z_{21} \xrightarrow{d \rightarrow 0} Z_{11}$$

La impedancia mutua tiende a la autoimpedancia cuando juntamos los dipolos

En algunos problemas donde se requiere Z<sub>11</sub>, dan Z<sub>21</sub> y no hay más que particularizar para d=0

### Caso 2. Dipolos colineales



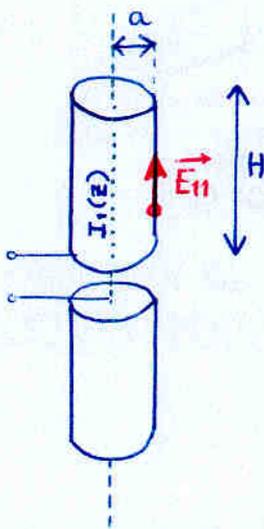
## 5.2 Autoimpedancia

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad \left. \begin{array}{l} V_1|_{I_2=0} = V_{1c.a.} \text{ ¿Por qué?} \\ = \frac{V_{1c.a.}}{I_1} \end{array} \right\}$$

$$= - \frac{1}{I_1(0) \cdot I_1(0)} \int_{V_1'} \vec{J} \cdot \vec{E}_{11} dV_1'$$

↓  
¡campo que la antena hace sobre ella misma!

Para los dipolos tendremos que hacer la siguiente suposición



- Consideramos radio  $a$
- Consideramos la corriente distribuida en un hilo infinitamente delgado por el centro del dipolo.  $I(z)$
- Consideramos el campo creado por ese hilo sobre la superficie del dipolo

$$Z_{11} = - \frac{1}{I_1(0) I_1(0)} \int_{-H}^H I_1(z) \cdot E_{11}(z) dz$$

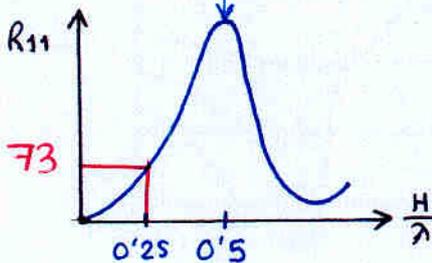
Se resuelve numéricamente (ver cara de atrás)

$a \rightarrow 0 \Rightarrow Z_{11} \rightarrow \infty$   
en la práctica  $a \neq 0 \Rightarrow I(0) \neq 0$

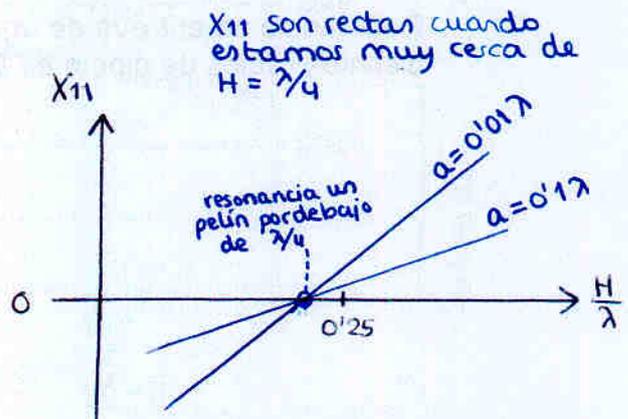


$$Z_{11} = R_{11}(H, a) + j X_{11}(H, a)$$

↓  
debe ser siempre positiva ya que está asociada a una potencia



$R_{11}$  cambia poco con  $a$



$X_{11}$  son rectas cuando estamos muy cerca de  $H = \lambda/4$

Vemos que  $X_{11}$  varía menos con  $\lambda$  para 'a's bajos

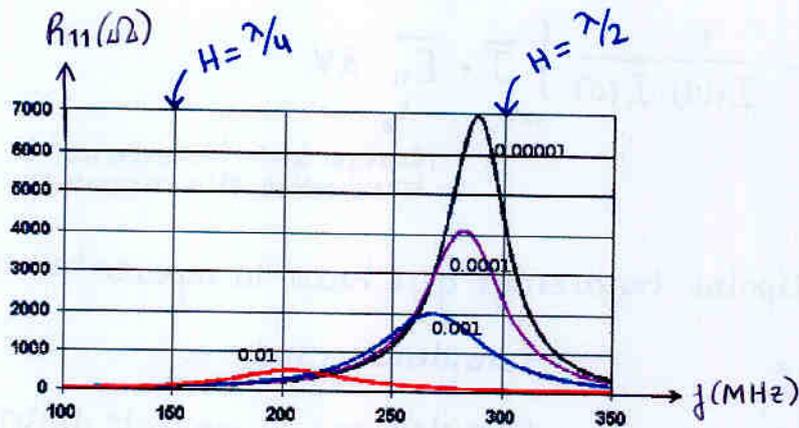
Ancho de banda = rango de frecuencias en el cual ciertos parámetros (ej: impedancia) varía menos de cierto margen

$H < \lambda/4$   $X_{11} < 0$  capacitivo  
 $H > \lambda/4$   $X_{11} > 0$  inductivo

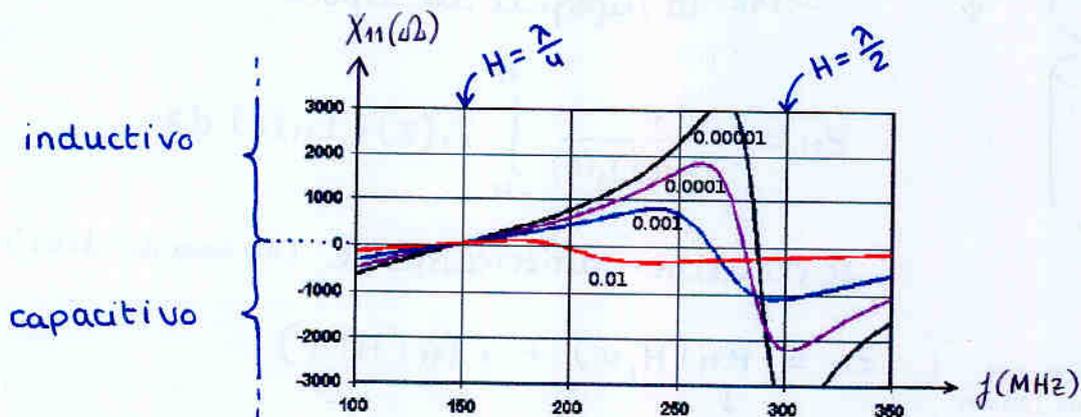
Dipolo grueso  $a \uparrow \Rightarrow$  mayor AB

$$Z_{11} = R_{11}(a, H) + j X_{11}(a, H)$$

Resolviendo la integral numericamente



Resistencia de entrada de un dipolo de 1 m de longitud para distintos radios de dipolo  $a = 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$  m.

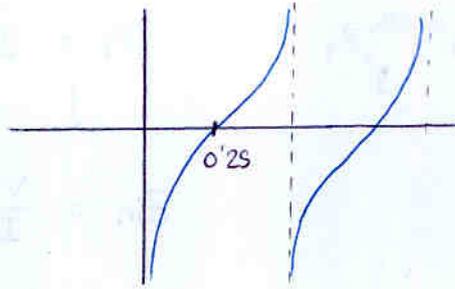


Reactancia de entrada de un dipolo de 1 m de longitud para distintos radios de dipolo  $a = 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$  m.

La parte imaginaria se parece al del modelo de l. de tx



$$X_{in} = -j Z_0 \cotg(kH)$$

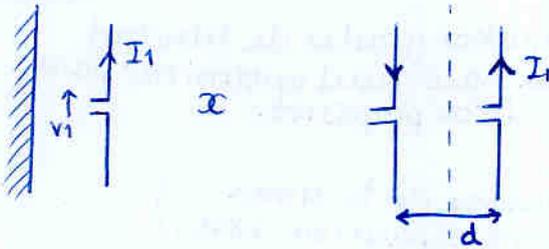


Se parece mucho al dipolo.

cuando  $H = \lambda/4$ , el c.a. se ve como c.c. ( $X_{in} = 0$ )

### 5.3. Impedancia junto a planos conductores

• Caso 1:



De la teoría de cuadripolos:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

y como  $I_2 = -I_1$

$$V_1 = Z_{11} I_1 - Z_{12} I_1$$

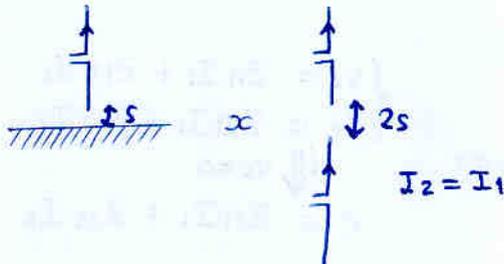
por tanto

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$$

$$Z_{in} = Z_{11} - Z_{12}(2d) \quad \text{influencia muy fuerte}$$

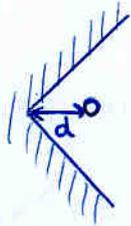
cuando  $d \rightarrow 0$   
 $Z_{12} \rightarrow Z_{11}$   
 por tanto  
 si acercamos el dipolo al plano  $\rightarrow Z_{in} = 0$

• Caso 2

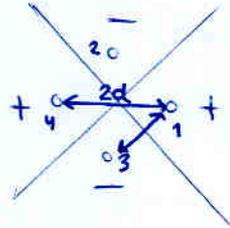


$$Z_{in} = Z_{11} + Z_{12}(2s)$$

• caso 3



$\infty$



$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3 + Z_{14} I_4$$

con  $I_1 = I_4 = -I_2 = -I_3$

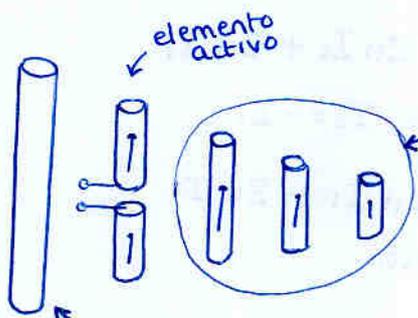
$$V_1 = I_1 (Z_{11} + Z_{14} - Z_{13} - Z_{12})$$

↓

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$$

$$= Z_{11} + Z_{14}(2d) - 2 \cdot Z_{12}(d\sqrt{2})$$

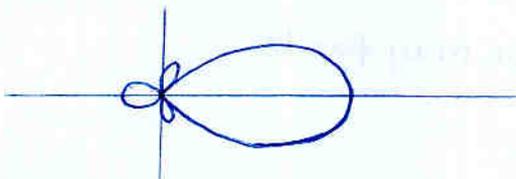
6. Antena Yagi



Hay muchos grados de libertad lo que hace facil optimizar para cierto propósito.

Directores (al ser menores de  $\lambda/2$  tienen impedancia capacitiva ( $X < 0$ ))

Reflectores (mayor de  $\lambda/2$  - impedancia inductiva)



comportamiento endfire  $\leftrightarrow \alpha = \pm kd$

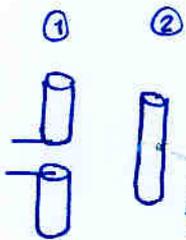
(aunque no es un array tipico ya que los elementos no son iguales y la separación entre ellos puede variar)

endfire

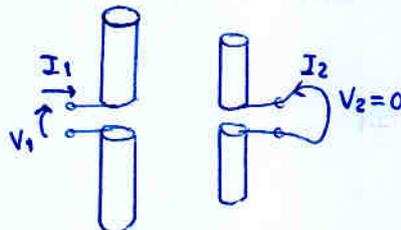


Se consigue que  $\alpha \approx \pm kd$  sin tener que alimentarlo de ese modo; solo haciendo uso de los efectos parásitos

ejemplo:



es como tener bornes cortocircuitados



$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

↓  $V_2 = 0$

$$0 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$I_2 = - \frac{Z_{21}}{Z_{22}} I_1$$

Usando las gráficas  $Z_{21}(d)$  y  $Z_{22}(H, a)$  ajustamos  $I_2/I_1$

relación entre las corrientes (módulo y fase)

se obtendrá:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_0 \left( 1 + \left( -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \right) e^{i\psi_x} \right)$$

Es decir, un array con:

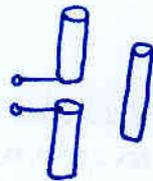
$$\psi_x = kd \sin\theta \cos\phi$$

$$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = A \cdot e^{j\alpha}$$

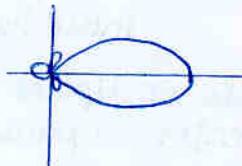
el desfase lineal del array viene dado directamente por el juego de impedancias

Es fácil conseguir  $\alpha \approx \pm kd$  para que sea endfire

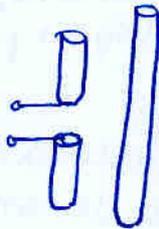
Parásito Capacitivo  
( $H < \frac{\lambda}{4} \rightarrow X_{11} < 0$ )



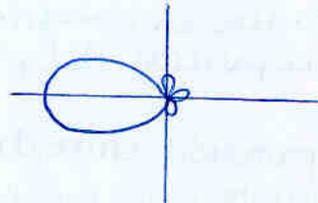
$$\Rightarrow \alpha \approx -kd$$



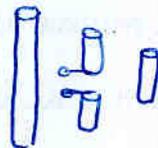
Parásito Inductivo  
( $H > \frac{\lambda}{4} \rightarrow X_{11} > 0$ )



$$\Rightarrow \alpha \approx kd$$



Por eso tiene sentido hacer



Impedancia de entrada de la Yagi

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$$

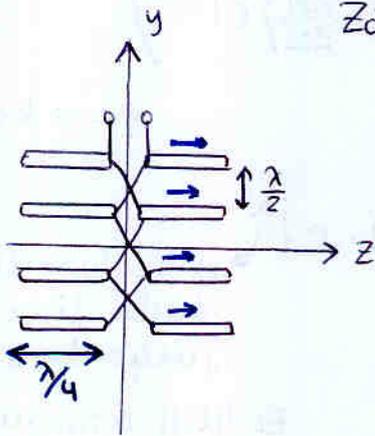
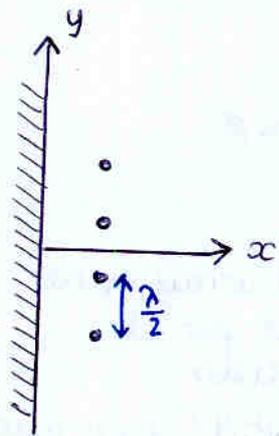
$$Z_{in} = Z_{11} - Z_{12} \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$$

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$$

Resulta que los elementos parásitos reducen  $Z_{in}$ ;

logramos aumentarla tomando un  $Z_{11}$  grande (usamos dipolo doblado)

# Problema Enero 2002



$$Z_{\text{dipolo}} = 80 \Omega$$

impedancia de cada dipolo (teniendo en cuenta el efecto de los demas y del plano de masa)  
(en realidad no serian iguales, pero lo suponemos)

Intuitivamente:

- cuando los dipolos van alternando su sentido de las corrientes es para radiar endfire (casi siempre)
- con todos los dipolos, mismo sentido de corriente, se radia en broadside, lo cual tiene logica pensando en la posición del plano de masa.

La separación entre dipolos es  $\lambda/2$ , por tanto la corriente se invierte; por eso hay que alimentar de forma alternada para que la corriente (y la tensión) sean la misma en todos (i.e. misma dirección de corriente → broadside)

ii Piensa que las conexiones entre bornes de dipolos son líneas de tx de long  $\lambda/2$  !!

! al igual se me habría ocurrido tenerlo en cuenta

## a) Distribución de corriente

- Puesto que la tensión en todos los dipolos es la misma y  $Z_{\text{dipolo}}$  es la misma, deducimos que es un array uniforme (ya que  $I$  será la misma).

## b) Campo radiado sin considerar el plano conductor

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot F_{Ay}(\psi_y) \quad \text{siendo} \quad F_{Ay}(\psi_y) = \frac{\sin(4 \frac{\psi_y}{2})}{\sin(\psi_y/2)}$$

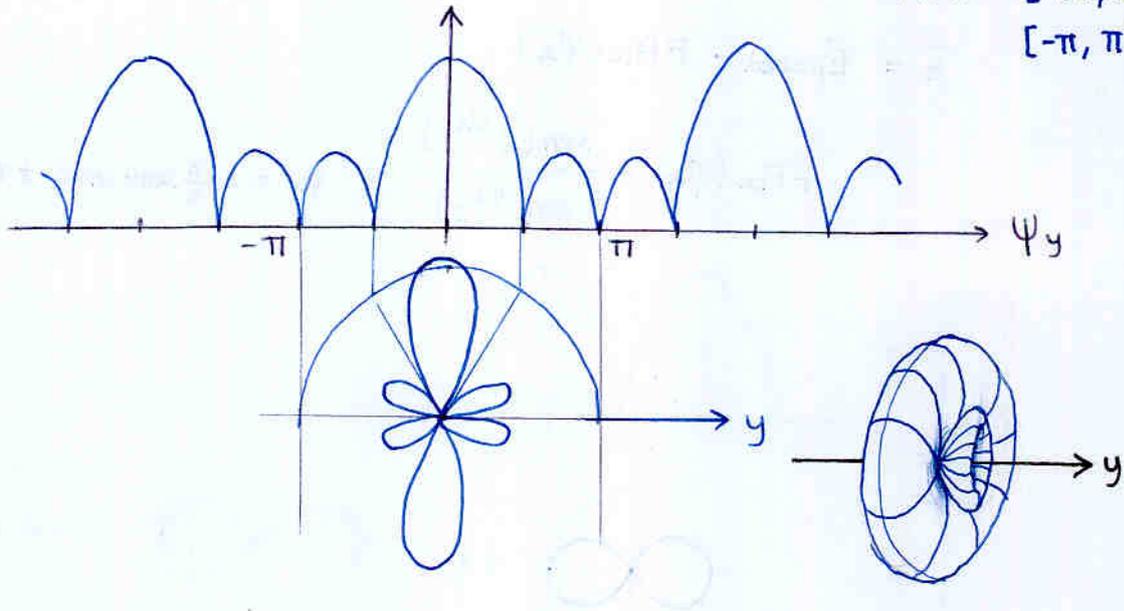
$$\psi_y = kd \sin \theta \sin \phi$$

siendo

$$\vec{E}_0 = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\theta}$$

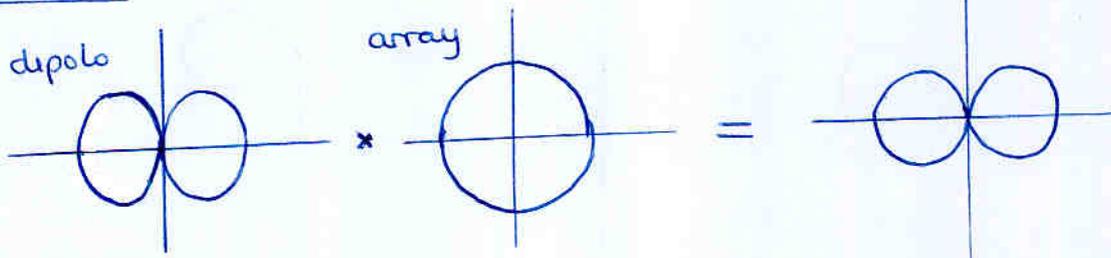
Dibujemos el factor de array:

$$M.V. = [-kd, kd] \\ [-\pi, \pi]$$

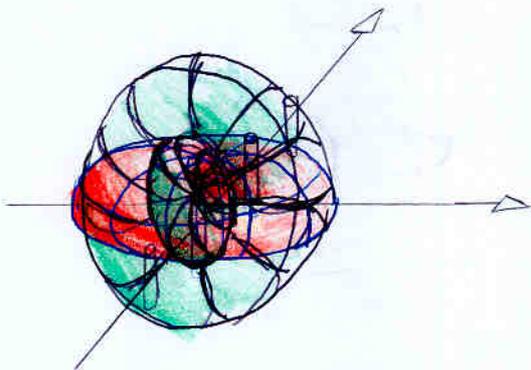
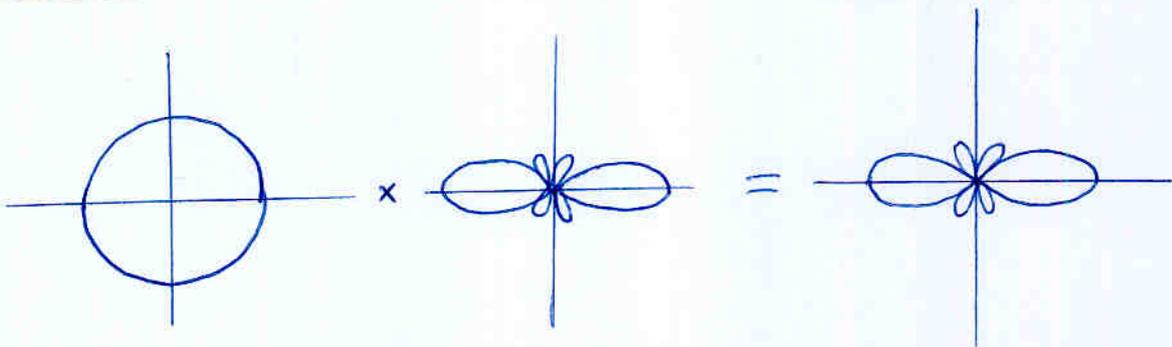


Dibujando el campo sin incluir efecto del plano conductor

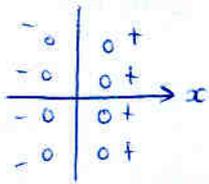
Plano E



Plano H



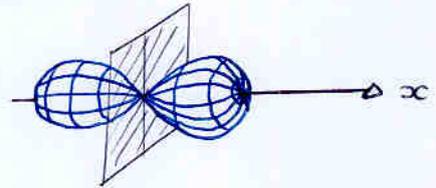
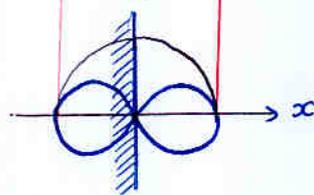
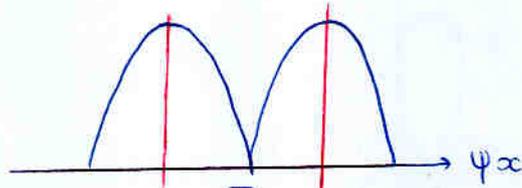
c) Incluyendo el plano conductor



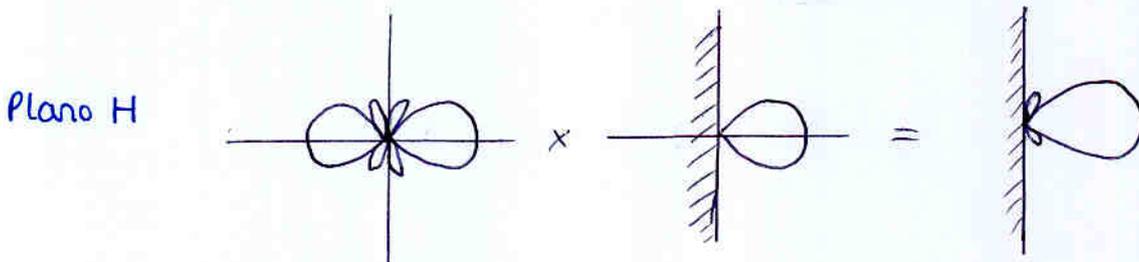
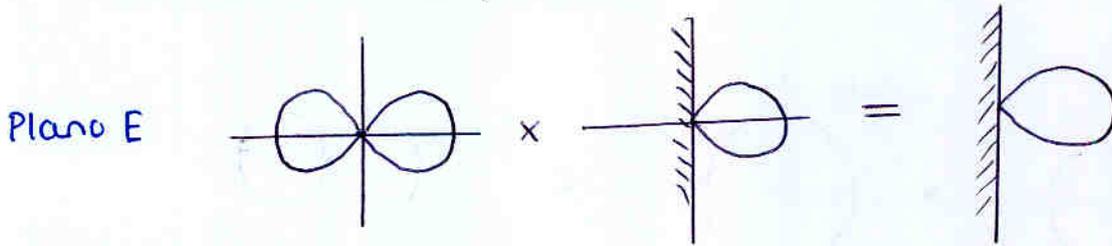
$$\bar{E} = \bar{E}_{\text{panel}} \cdot FA_x(\psi_x)$$

$$FA_x(\psi_x) = \frac{\sin(2\psi_x/2)}{\sin(\psi_x/2)}$$

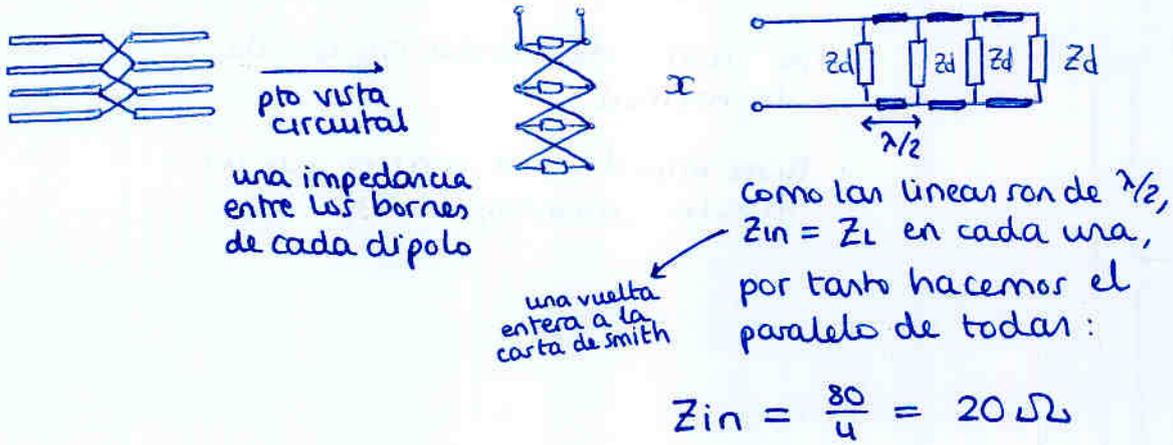
$$\psi_x = k \cdot \frac{\lambda}{2} \sin\theta \cos\phi \pm \pi$$



Haciendo la multiplicacion



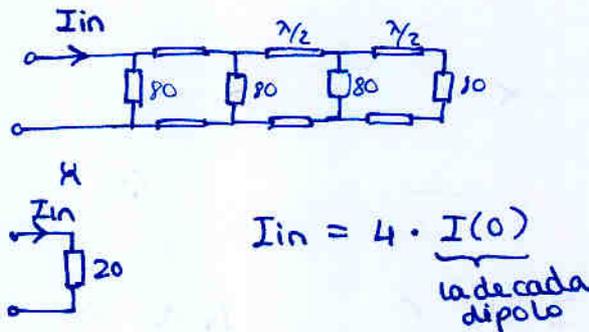
d) Impedancia de entrada  $Z_{in}$



e)  $l_{ejmax}$  (i)

$$l_{ejmax} = \frac{N_{max}}{I_{in}} = \frac{N_0 \cdot FA_{max}^y \cdot FA_{max}^x}{I_{in}}$$

ya que coinciden las direcciones de los máximos



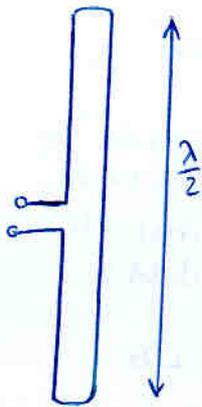
$$l_{ejmax} = \frac{N_0}{I(0)} \cdot \frac{FA_{max}^y \cdot FA_{max}^x}{4} = 2 \frac{\lambda}{\pi}$$

$l_{ejmax \text{ dipolo}} \frac{\lambda}{4}$   
 $= \frac{\lambda}{\pi}$

f)  $D_{max} = \frac{P_{max}}{W_{rad}/4\pi r^2} = \begin{cases} P_{max} = \frac{|E_{max}|^2}{\eta} = \frac{(60 \frac{I(0)}{r} \cdot 4 \cdot 2)^2}{\eta} \\ W_{rad} = R \cdot I_{in}^2 \\ = 20 \cdot (4I(0))^2 \\ = 4 \cdot 80 I(0)^2 \end{cases}$

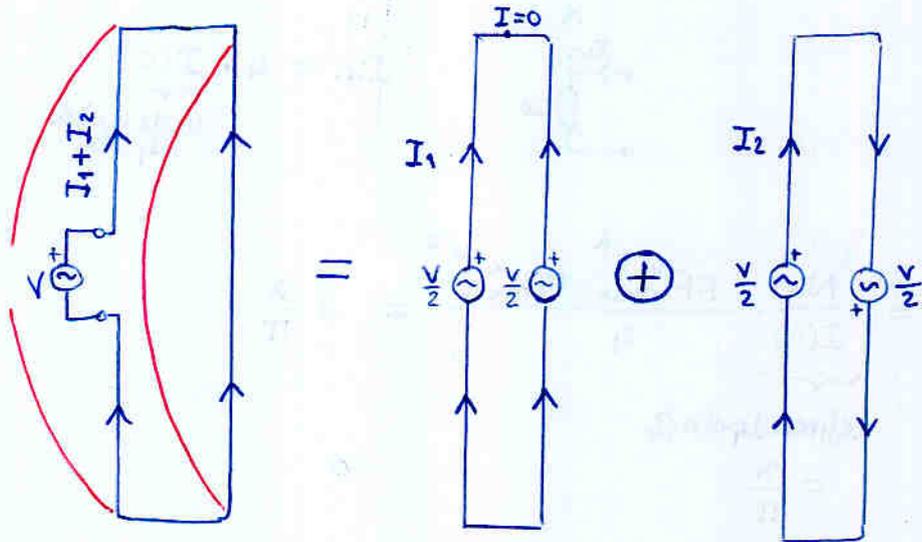
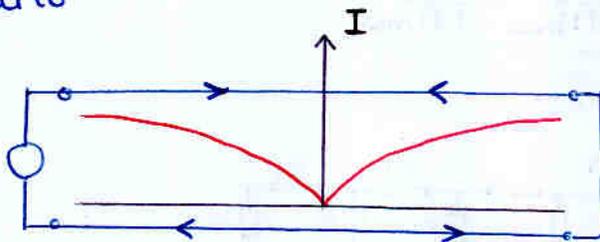
$$= \frac{(60 I(0) \cdot 4 \cdot 2)^2}{4 \cdot 80 \cdot I(0)^2} \cdot 4\pi r^2$$

# 7 Dipolo doblado



- Tiene ancho de banda mayor de lo normal
- Tiene impedancia mayor que un dipolo (300 en lugar de 75)

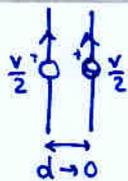
Para estudiarlo partimos de una l. de tx acabada en cortocircuito



$$Z_{in} = \frac{V}{I_1 + I_2}$$

modo línea de transmisión  
(las corrientes se cancelan y no radia)

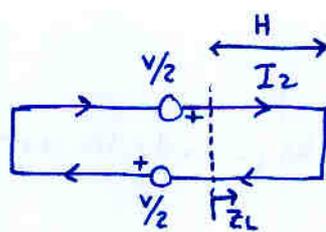
Modo antena equivale a dos dipolos muy juntos



$$\left. \begin{aligned} \frac{V}{2} &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ \frac{V}{2} &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} I_1 &= I_2 \\ Z_{21} &= Z_{12} \end{aligned} \xrightarrow{d \rightarrow 0} Z_{11}$$

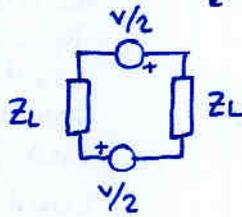
$$\left. \begin{aligned} \frac{V}{2} &= Z_{11}I_1 + Z_{11}I_1 \\ \frac{V}{2} &= Z_{11}I_1 + Z_{11}I_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow I_1 = \frac{V}{4Z_{11}}$$

modo linea de transmision



$Z_L$  de l. de tx acabada en cortocircuito de longitud H

$$Z_L = j Z_0 \operatorname{tg} kH$$



$$I_2 = \frac{V}{2Z_L}$$

Entonces

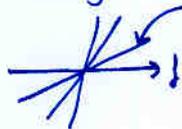
$$Z_{in} = \frac{V}{I_1 + I_2} = \frac{V}{\frac{V}{4Z_{11}} + \frac{V}{2jZ_0 \operatorname{tg} kH}} = 4Z_{11} \text{ para } H = \lambda/4$$

impedancia imaginaria (corriente dando vueltas)

$$Z_L = \infty \text{ si } H = \lambda/4 \Rightarrow I_2 = 0$$

$$Z_{in} = 4Z_{11}$$

parte real + parte imag



interesa variación suave para tener gran ancho de banda

En el caso general

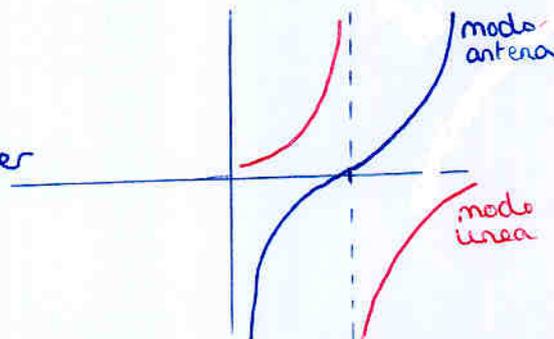
$$Z_{in} = \frac{1}{\frac{1}{4Z_{11}} + \frac{1}{2jZ_0 \operatorname{tg} kH}}$$

es el paralelo entre  $4Z_{11}$  (tipo polo) y  $2jZ_0 \operatorname{tg} kH$  (tipo linea)

la parte imaginaria

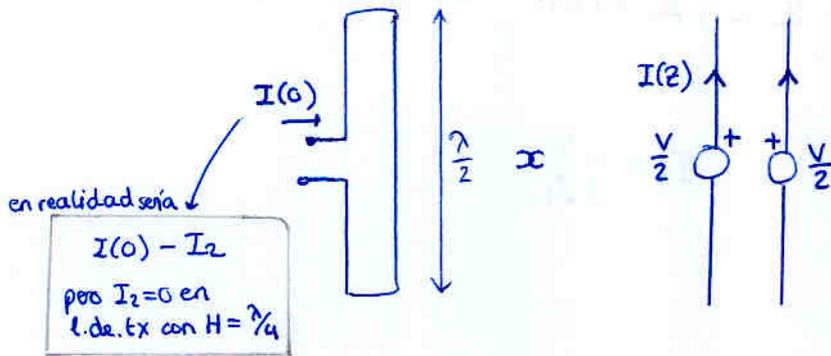
Cuando modo antena quiere ser capacitivo, modo linea es inductivo  $\rightarrow$  y viceversa

↓  
gran ancho de banda



# Directividad

Consideramos sólo el modo antena (la parte de la corriente que se radia)



$$D_{\text{doblado}} = D_{\text{dipolo}}$$

Los diagramas de radiación son iguales a los de un dipolo, porque son dos dipolos MUY juntos (casi en el mismo sitio)

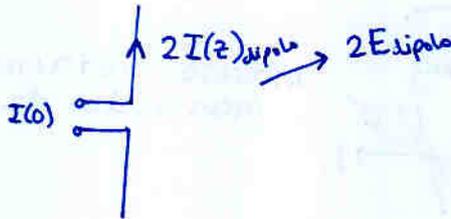
aunque radien más o menos, en el diagrama lo que importa es la RELACION entre direcciones

## Longitud efectiva

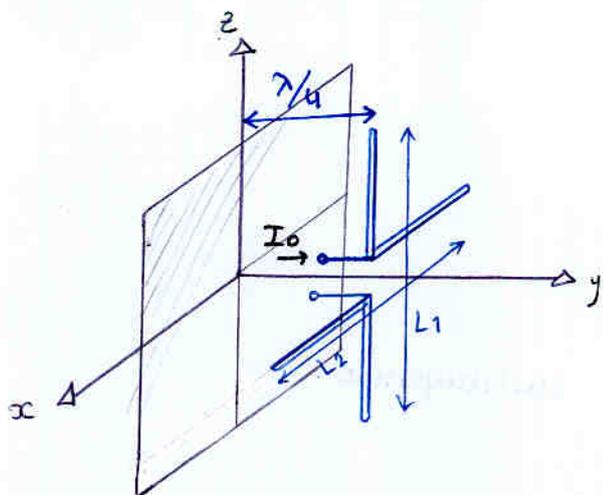
$$l_{\text{efmax}} = \frac{1}{I(0)} \left[ \int I(z) dz + \int I(z) e^{i k \cdot \vec{r}'} dz \right] = \frac{1}{I(0)} \cdot 2 \cdot \int_{-H}^H I(z) dz$$

$$l_{\text{efmax}}^{\text{doblado}} = 2 \cdot l_{\text{efmax}}^{\text{dipolo}}$$

es como si para una misma corriente de entrada lográramos el doble de corriente en la antena (y el doble de campo que un dipolo normal)



Problema Enero 2001



$$I_0 = I_1 + I_2$$

$$I_1 = I_0 \cdot e^{j\pi/4}$$

$$I_2 = I_0 \cdot e^{-j\pi/4}$$

} viene determinado por la impedancia de cada antena

a) supongamos  $L_1 = L_2 = \lambda/2$   
Hallar  $E_\theta$ ,  $E_\phi$

$$\vec{E}_t = (\vec{E}^v + \vec{E}^h) \cdot F A_y(\psi_y)$$

$E^v$ : dipolo en  $z$

$$\begin{cases} E_\theta^v = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_1 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \\ E_\phi^v = 0 \end{cases}$$

$E^h$ : dipolo en  $x$  (calculamos usando  $N$ )

$$\begin{aligned} \vec{N}_2 &= N_{2x} \hat{x} \\ &= 2kI_2 \cdot \frac{\cos(kx \frac{L_2}{2})}{k^2 - k_x^2} \hat{x} \end{aligned}$$

$$N_{2\theta} = \vec{N}_2 \cdot \hat{\theta} \quad E_\theta^h = -j\omega A_\theta^h = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} N_{2\theta}$$

$$N_{2\phi} = \vec{N}_2 \cdot \hat{\phi} \quad E_\phi^h = -j\omega A_\phi^h = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} N_{2\phi}$$

$$\begin{cases} E_\theta^h = -j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_2 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \phi)}{1 - (\sin \theta \cos \phi)^2} \cos \theta \cos \phi \\ E_\phi^h = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_2 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \phi)}{1 - (\sin \theta \cos \phi)^2} \sin \phi \end{cases}$$

$$FA(\psi_y) = \frac{\sin(2\frac{\psi_y}{2})}{\sin(\frac{\psi_y}{2})}$$

$$\psi_y = k \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \sin\theta \sin\phi \pm \pi$$

Entonces finalmente:

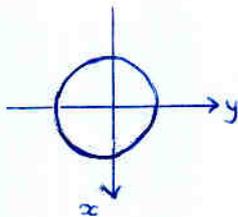
$$\begin{cases} E_\theta = (E_\theta^h + E_\theta^v) FA(\psi_y) \\ E_\phi = E_\phi^h \cdot FA(\psi_y) \end{cases}$$

b) Diagrama plano XY ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) sustituyendo:

Dipolo vertical:

$$E_\theta^v = j60 I_1 \frac{e^{-jkr}}{r}$$

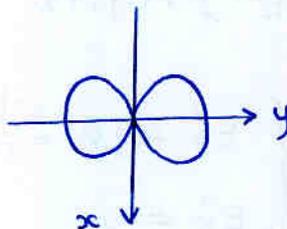
$$E_\phi = 0$$



Dipolo horizontal:

$$E_\theta^h = 0$$

$$E_\phi^h = j60 I_2 \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\phi)}{\sin(\phi)}$$



Cuidado al sumar campos gráficamente  
(ya que lo que dibujamos es el módulo)



El módulo de la suma no es la suma de los módulos

Al multiplicar sí que se hace gráficamente (ej  $E \cdot FA$ )

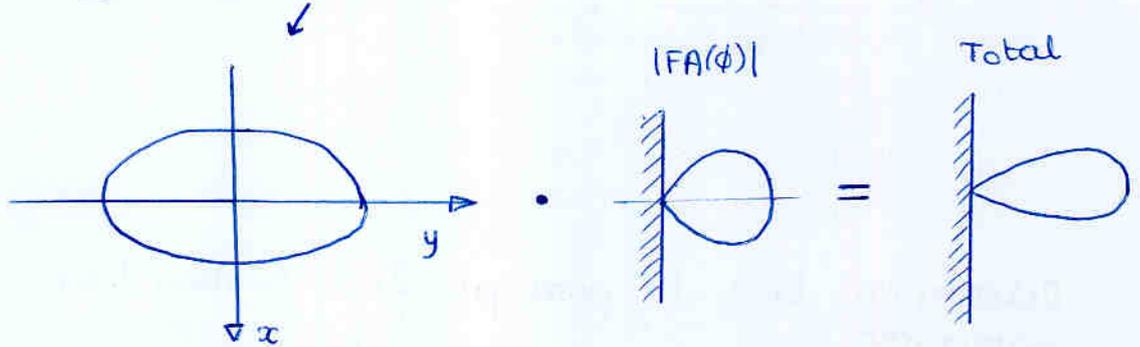
El módulo del producto sí es el producto de los módulos

Habría que ir con cuidado y hacer

$$|E_t|^2 = (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2) \cdot |FA|^2$$

$$= \left(\frac{60 I_0}{r}\right)^2 \cdot \left[1 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \phi\right)}{\sin \phi}\right]^2\right] \cdot |FA(\phi)|^2$$

Esto se puede dibujar dando ciertos valores de  $\phi$

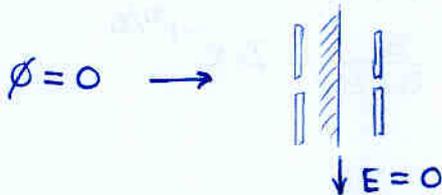
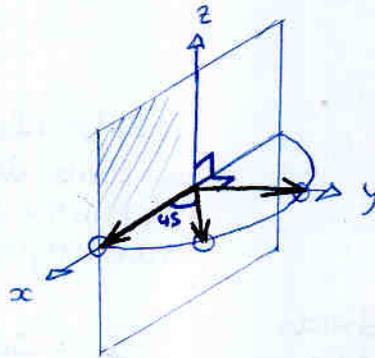


c) calcular el campo en las direcciones

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = 0$$

$$= 45^\circ$$

$$= 90^\circ$$



$\phi = 45^\circ$

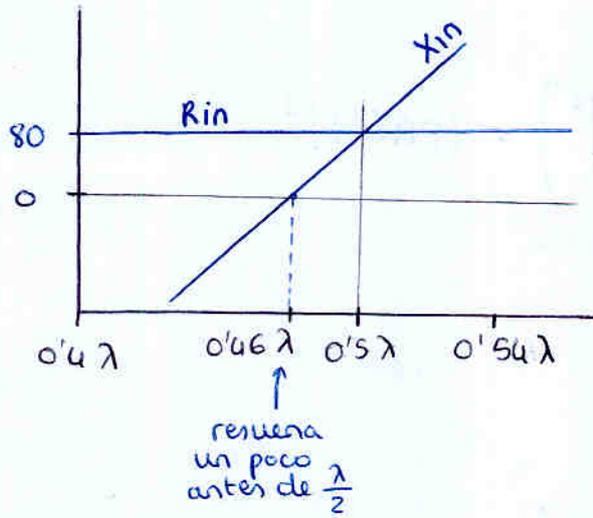
$$\begin{cases} E_\theta = E_\theta^v \cdot FA(\phi = 45^\circ) = j60 I_0 e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot FA(\phi = 45^\circ) \\ E_\phi = E_\phi^v \cdot FA(\phi = 45^\circ) = j60 I_0 e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot FA(\phi = 45^\circ) \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos 45^\circ\right)}{\sin(45^\circ)} \end{cases}$$

pol. elíptica

$\phi = 90^\circ \rightarrow \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos 90^\circ\right)}{\sin(90^\circ)} = 1$

pol. circular

d) Para distintas longitudes de dipolo se tiene:

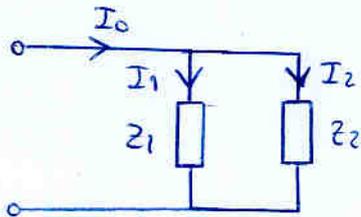


han simplificado con  $R_{in}$  constante

Determinar  $L_1$  y  $L_2$  para que  $I_1$  e  $I_2$  sean las anteriores

$$I_1 = I_0 e^{i\pi/2}$$

$$I_2 = I_0 e^{-i\pi/2}$$



$|I_1| = |I_2|$   
por tanto deben tener el mismo módulo las impedancias

$$|Z| = \frac{V}{|I|}$$

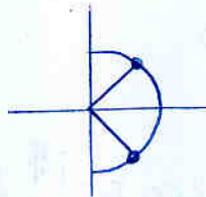
además deberán ser conjugadas  
 $Z_1 = Z_2^*$

$\Rightarrow$

$$I_1 = I_0 \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = I_0 e^{i\pi/4}$$

$$I_2 = I_0 \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = I_0 e^{-i\pi/4}$$

y para que los ángulos sean  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ , deben ser igual sus partes reales e imaginarias



d)

$$D_{max} = \frac{P_{max}}{W_{rad}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{|E_{max}|^2/2}{W_{rad}} \cdot 4\pi r^2$$

$$|E_{max}|^2 = \left(2\right)^2 \left(\frac{60 I_1}{r}\right)^2$$

$\uparrow$  FA       $\uparrow$  Dipolo

$$W_{rad} =$$

$$D_{max} = 3 = 4.6 \text{ dB}$$

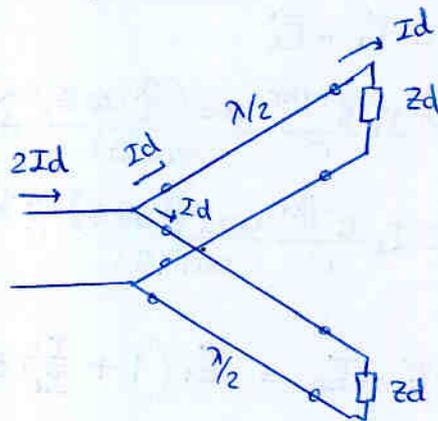
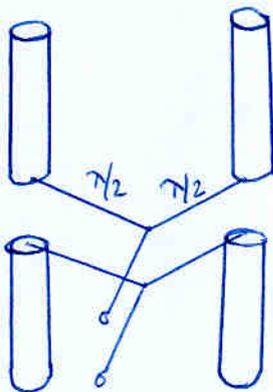
Dos dipolos  $\rightarrow$  más directivos que un sólo dipolo

$\rightarrow$  no tan directivo como un dipolo con un plano de masa (ya que estos dos dipolos radian hacia delante y hacia atrás)

$$e) \quad \ell_{ejmax} = \frac{N_{max}}{I_{in}} = \frac{1}{I_{in}} \cdot 2 \int_{-H}^H I(z) dz = 2 \frac{\lambda}{\pi}$$

$\uparrow$   
 corriente por  
 cada dipolo  
 " "  
 corriente a  
 la entrada

¿y si hubieramos alimentado de otra forma?



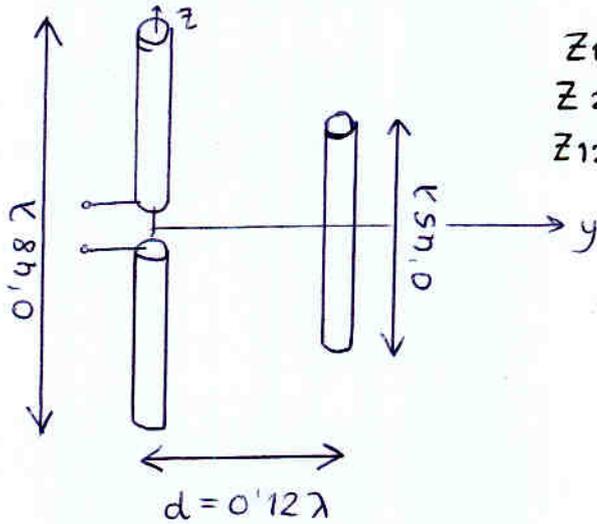
entonces

$$\ell_{ejmax} = \frac{1}{2I_d} \left[ 2 \int_{-H}^H I(z) dz \right] = \frac{\lambda}{\pi}$$

La long. efectiva ha cambiado  
 ¿cambiará la directividad?

No, ya que no cambia el diagrama (los elementos del array siguen teniendo igual distribución uniforme)

Problema



$$\begin{aligned} Z_{11} &= 75'8 + j14 \Omega \\ Z_{22} &= 60'6 - j29'6 \Omega \\ Z_{12} &= 52 - j2'6 \Omega \end{aligned}$$

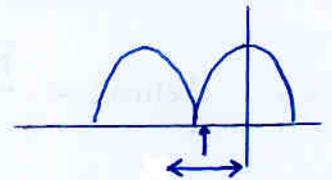
a)  $\frac{I_2}{I_1}$ ,  $Z_{in}$

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ 0 = Z_{12} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

de la 2ª:  $\frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = -(0'71 + j0'3) = 0'77 \angle -2'7 \text{ rad}$

de la 1ª:

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} \\ &= Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} = 38 \Omega \end{aligned}$$



b) Diagrama de radiación. suponiendo  $H_1 = H_2 = \frac{\lambda}{4}$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1 = j60 I_1 \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin(\theta)} \hat{\theta}$$

(i)  $\vec{E}_2 = j60 I_2 \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin(\theta)} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r}_d)}$

$$\begin{aligned} \vec{d} \cdot \vec{k} \cdot \hat{y} &= d \cdot k_y \\ &= k \cdot d \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \underbrace{\vec{E}_1}_{FA} \left( 1 + \frac{I_2}{I_1} e^{jkyd} \right)$$

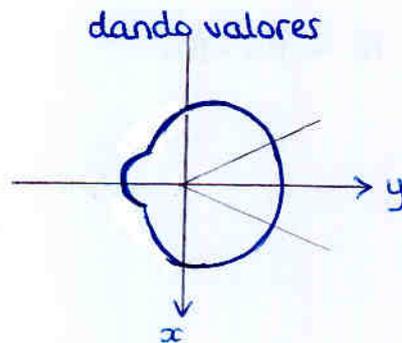
c) Diagrama plano H

(con lo que sabemos de Yagi, será el plano XY con  $\theta = \frac{\pi}{2}$ )

$$d(\phi) = \left| 1 + \frac{I_2}{I_1} e^{jk d \cos \phi} \right|$$

$$\uparrow$$

$$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = 0.77 e^{-j2.7}$$



$$\Delta\theta_{-3dB} \approx 12^\circ$$

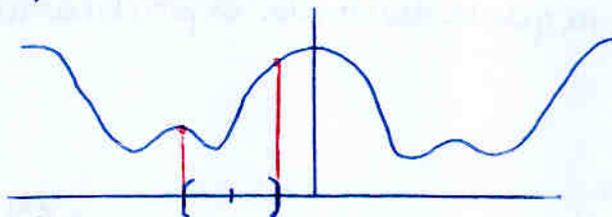
$$FBR = 20 \log \left| \frac{d(\phi = \pi/2)}{d(\phi = 3\pi/2)} \right| = 8.3 \text{ dB}$$

d)  $D_{max} = \frac{P_{max}}{W_{rad}} \cdot 4\pi r^2$

$$P_{max} = \frac{|E_{max}|^2}{\eta} = \left| \frac{60 I_1}{r} \cdot \frac{d(\phi = \frac{\pi}{2})}{0.98} \right|^2 / \eta$$

$$W_{rad} = 38 I_1^2$$

Nota: Si dibujásemos el FA de esto (que no es como los que hacemos siempre) se obtiene:



No la hemos hecho tan eficiente como podría llegar a ser eligiendo adecuadamente  $d$

$$l_{ejmax} = \frac{1}{I_1} \cdot N_{max} = \frac{1}{I_1} \cdot N_{1max} \cdot \underbrace{FA(\phi = \pi/2)}_{\approx \frac{\lambda}{\pi}} \approx \frac{\lambda}{\pi}$$

al igual que  $\bar{E} = \bar{E}_1 \cdot FA$

tb tenemos  $\bar{N} = \bar{N}_1 \cdot FA$

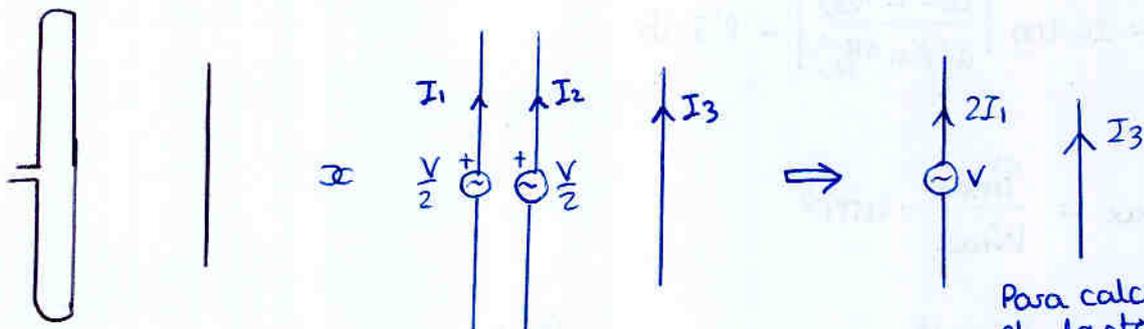
con

$$\left| 1 - \frac{Z_{21}}{Z_{22}} e^{ikd} \right|$$

$$0.98 \approx 1$$

¿Podríamos decir  $l_{ej} = \frac{\lambda}{\pi}$  ?

¿Y si tenemos dipolo doblado?



Para calcular el factor de array

$$\begin{cases} \frac{V}{2} = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3 \\ \frac{V}{2} = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + Z_{23} I_3 \\ 0 = Z_{31} I_1 + Z_{32} I_2 + Z_{33} I_3 \end{cases}$$

se simplifica, ya que

$$I_1 = I_2$$

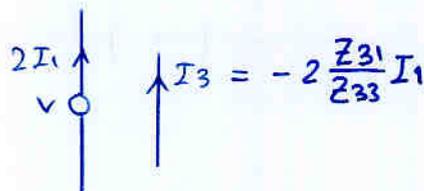
$$Z_{13} = Z_{23} \quad (\text{ya que la distancia es practicamente la misma})$$

al final se obtiene

$$Z_{in} = 4 \left( Z_{11} - \frac{Z_{13}^2}{Z_{22}} \right)$$

↑  
efecto del dipolo doblado

↑  
efecto del dipolo director



# Tema 7. Antenas de Apertura

- 7.1 Ecuaciones de Maxwell generalizadas con fuentes magnéticas
- 7.2 Teorema de unicidad
- 7.3 Teorema de equivalencia
- 7.4 Aperturas planas
- 7.5 Apertura rectangular
- 7.6 Apertura circular

## 1. Ecuaciones de Maxwell generalizadas con fuentes magnéticas

Las ecuaciones de Maxwell explican todos los fenómenos electromagnéticos, para ello hacen uso de cargas y corrientes eléctricas ( $\rho$  y  $\vec{J}$ )

Ecuaciones eléctricas sólo cargas y corrientes eléctricas	Ecuaciones magnéticas Sólo cargas y corrientes magnéticas
--------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------

Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} &= \frac{\tau}{\mu} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon\vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} + \vec{M} \end{aligned}$$

Definición de los potenciales

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -j\omega\vec{A} - \nabla\Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F} \\ \vec{H} &= -j\omega\vec{F} - \nabla\Psi \end{aligned}$$

Solución de los potenciales

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\epsilon} \iiint_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dv' \\ \vec{A} &= \mu \iiint_V G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dv' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\mu} \iiint_V G(\vec{r}, \vec{r}') \tau(\vec{r}') dv' \\ \vec{F} &= \epsilon \iiint_V G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{M}(\vec{r}') dv' \end{aligned}$$

Vector de radiación

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N} \\ \vec{N} &= \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') e^{jkr \cdot \hat{r}'} dv' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\epsilon e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{L} \\ \vec{L} &= \iiint_V \vec{M}(\vec{r}') e^{jkr \cdot \hat{r}'} dv' \end{aligned}$$

Campos radiados

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\frac{jk}{\mu} \hat{r} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -j\omega(\vec{A} - \hat{r} \cdot \vec{A}) = j\omega(\hat{r} \times (r \times \vec{A})) \\ \vec{E} &= \eta(\vec{H} \times \hat{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{jk}{\mu} \hat{r} \times \vec{F} \\ \vec{H} &= -j\omega(\vec{F} - \hat{r} \cdot \vec{F}) = j\omega(\hat{r} \times (r \times \vec{F})) \\ \vec{E} &= \eta(\vec{H} \times \hat{r}) \end{aligned}$$

C.C.  $\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$   
 $\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$

$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = -\vec{M}_s$   
 $\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \rho_{ms}$

← Sin embargo, resulta muy útil definir cargas y corrientes magnéticas ( $\tau$  y  $\vec{M}$ ) que se comportan de un modo totalmente dual a las eléctricas

El análisis resulta ser totalmente dual:

Campos:  
 $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$   
 $\vec{H} \leftrightarrow -\vec{E}$

Potenciales:  
 $\Phi, \vec{A} \leftrightarrow \Psi, \vec{F}$

vector radiación:  
 $\vec{N} \leftrightarrow \vec{L}$

Permitividad y permeabilidad:  
 $\epsilon \leftrightarrow \mu$   
 $\mu \leftrightarrow \epsilon$

¿qué sentido tiene usar algo totalmente inventado?  
 En realidad unas cargas eléctricas crean los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  reales.

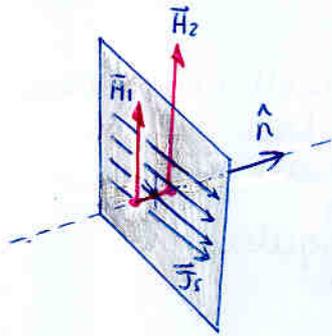
Pero si quitamos esas cargas y ponemos una nueva combinación de cargas eléctricas y magnéticas, que no son las que realmente hay, pero que crean los mismos campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  entonces estas cargas equivalentes ficticias están totalmente justificadas fuera del volumen de las cargas mismas.

→ C.C.

Ecuaciones eléctricas :

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$



Una discontinuidad en la componente tangencial de un campo  $\vec{H}$  se debe a una corriente  $\vec{J}_s$  en la discontinuidad.

Ademas, con las ecuaciones eléctricas (i.e. en la realidad física) no existe discontinuidades en la componente tangencial de  $\vec{E}$ .

Ecuaciones magnéticas :

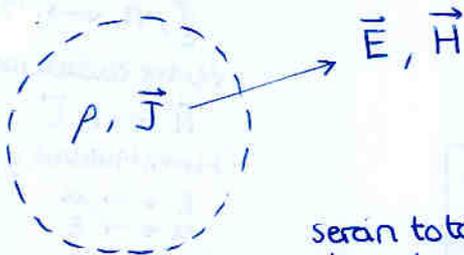
$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = -\vec{M}_s$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \tau_s$$

con la introducción de corrientes magnéticas  $\vec{M}_s$  se ha introducido la posibilidad de la existencia de discontinuidades en la componente tangencial de  $\vec{E}$

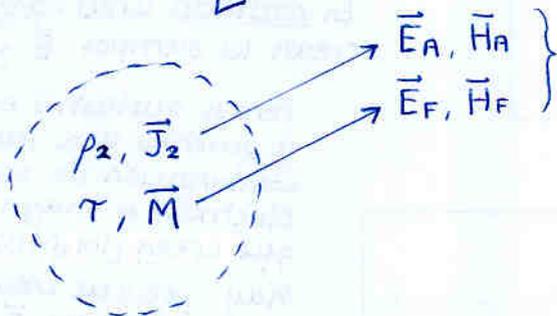
→ Ecuaciones de Maxwell generalizadas

Caso real :



serán totalmente equivalentes desde el punto de vista del volumen exterior si  $\rho_2, \vec{J}_2, \tau$  y  $\vec{M}$  son tales que se cumpla  $\vec{E} = \vec{E}_2$

Caso equivalente:



$$\vec{E}_2 = \vec{E}_A + \vec{E}_F$$

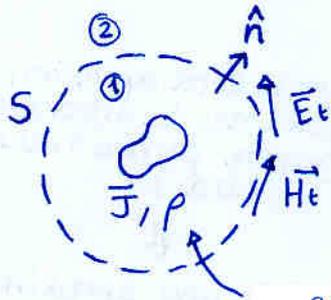
El campo total será la suma del creado por fuentes eléctricas y fuentes magnéticas

## 2. Teorema de unicidad

Ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales  $\rightarrow$  se resuelven a falta de unas constantes que se calculan a partir de las condiciones de contorno.

El teorema de unicidad nos dice que conociendo los campos en la superficie que envuelve un volumen libre de cargas, la solución de los campos en el interior del volumen es única.

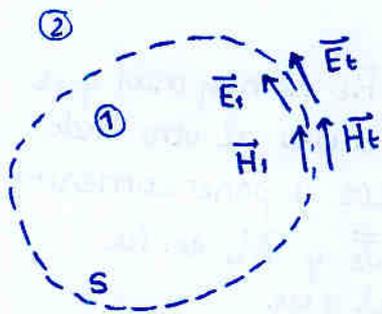
## 3. Teorema de equivalencia



$\bullet \vec{E}, \vec{H}$  Campos en un volumen  $V$  (el exterior)

Desde el punto de vista exterior, se cumple que aquí dentro puede haber cualquier fuente que produzca el mismo campo en la superficie  $S$ .

Podemos hacer el equivalente desde un pto de vista exterior:



siendo  $\vec{E}_i$  y  $\vec{H}_i$  lo que queramos (nos da igual) basta con exigir que en la sup.  $S$  haya una discontinuidad para que  $\vec{E}_i$  y  $\vec{H}_i$  se conviertan en  $\vec{E}_t$  y  $\vec{H}_t$  respectivamente.

Para ello podemos inventarnos unas corrientes en  $S$  que impongan la discontinuidad deseada

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}_t - \vec{H}_i)$$

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times (\vec{E}_t - \vec{E}_i)$$

Infinitas soluciones según  $E_i$  y  $H_i$  que elijamos

Ya que los campos  $\vec{E}_i$  y  $\vec{H}_i$  pueden ser lo que queramos, ¿Porque no hacer que en particular sean nulos?

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_t$$

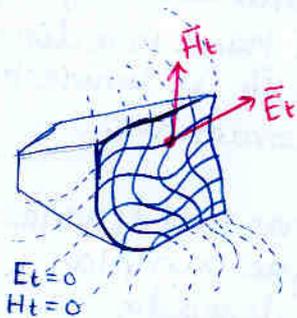
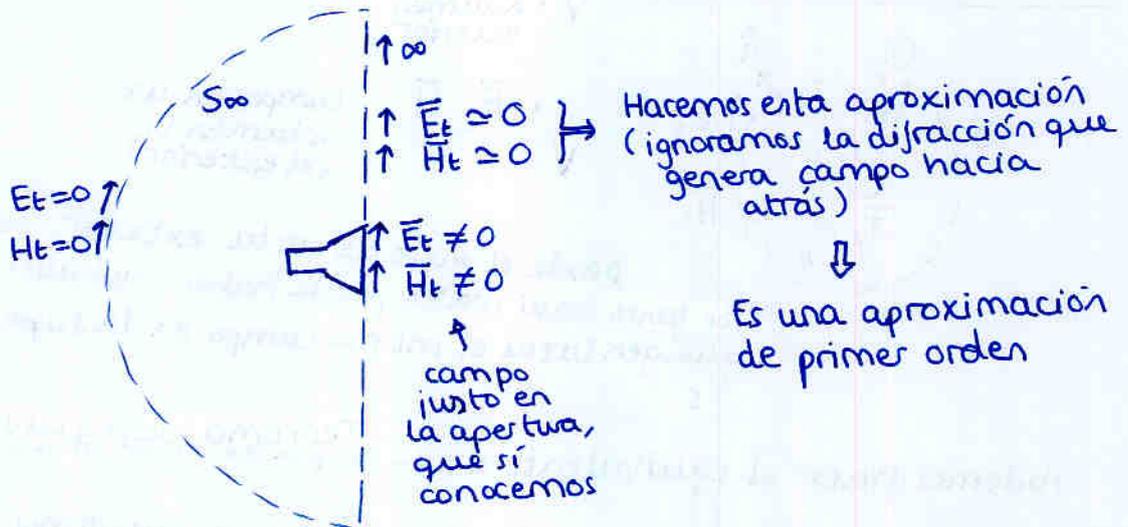
$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_t$$

Es muy similar al principio de Huygens. Obtenemos el campo en un punto a partir del punto anterior y no a partir de las fuentes

Podría parecer que para utilizar estas fuentes  $\vec{J}_s$  y  $\vec{M}_s$  necesitaremos calcular el campo cercano a una antena



Una buena solución es hacer: (calcularlo INMEDIATAMENTE en la apertura, donde conocemos las expresiones de los campos)

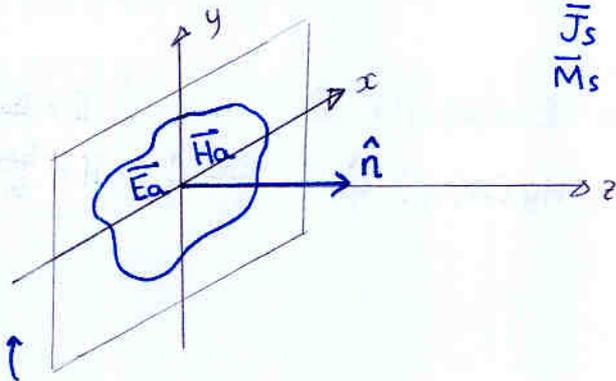


Conocidos  $\vec{E}_t$  y  $\vec{H}_t$  no hay más que suponer campos nulos al otro lado de la superficie y suponer corrientes equivalentes  $\vec{J}_s$  y  $\vec{M}_s$  en la superficie, tal que

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_t$$

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_t$$

#### 4. Aperturas Planas



$$\begin{aligned}\bar{J}_s &= \hat{n} \times \bar{H}_a \\ \bar{M}_s &= -\hat{n} \times \bar{E}_a\end{aligned}$$

nota: los campos en  $z < 0$  nos saldrán nulos, ya que hemos supuesto  $\bar{E}_i = \bar{H}_i = 0$

Conociendo  $\bar{J}_s$  y  $\bar{M}_s$  podemos hacer:

$$\bar{N} = \iint_S \bar{J}_s \cdot e^{jk\hat{r} \cdot \bar{r}'} ds' \rightarrow \bar{A} = \frac{\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \bar{N} \rightarrow \begin{cases} E_\theta = -j\omega A_\theta \\ E_\phi = -j\omega A_\phi \end{cases}$$

$$\bar{L} = \iint_S \bar{M}_s \cdot e^{jk\hat{r} \cdot \bar{r}'} ds' \rightarrow \bar{F} = \frac{\epsilon}{4\pi r} e^{-jkr} \bar{L} \rightarrow \begin{cases} H_\theta = -j\omega F_\theta \\ H_\phi = -j\omega F_\phi \end{cases}$$

$\downarrow \bar{E} = \eta (\hat{H} \times \hat{r})$

$$\begin{cases} E_\theta = -j\omega\eta F_\theta \\ E_\phi = j\omega\eta F_\phi \end{cases}$$

Finalmente para obtener el campo total: simplemente sumando

$$\bar{E} = \bar{E}_A + \bar{E}_F$$

$$E_\theta = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (\eta N_\theta + L_\theta)$$

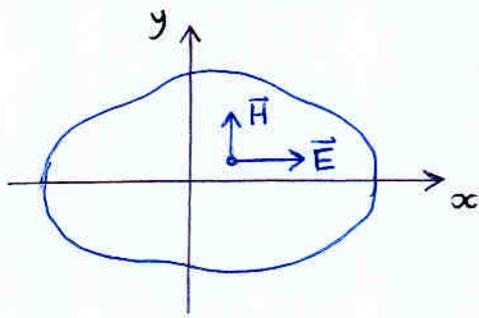
$$E_\phi = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (\eta N_\phi - L_\phi)$$

$$\begin{aligned}E_\theta &= -j\omega\eta F_\theta - j\omega A_\theta \\ &= -j\omega\eta \frac{\epsilon}{4\pi r} e^{-jkr} L_\theta - j\omega \frac{\mu}{4\pi r} e^{-jkr} N_\theta \\ &= -j\omega \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (\underbrace{\eta\epsilon}_{k/\omega} L_\theta + \underbrace{\mu}_{\eta k/\omega} N_\theta) \\ &= -j \frac{k}{4\pi r} e^{-jkr} (L_\theta + \eta N_\theta) \\ &= -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (L_\theta + \eta N_\theta)\end{aligned}$$

$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$   
 $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$   
 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

similarmente para  $E_\phi$

polarización horizontal (mejor dicho: polarización en  $\hat{x}$ )



$$\vec{E} = E_x(x', y') \hat{x}$$

$$\vec{H} = H_y(x', y') \hat{y} = \frac{E_x}{Z_0} \hat{y}$$

$$\vec{E} = E_x \hat{x}$$

$$\vec{H} = \frac{E_x}{Z_0} \hat{y}$$

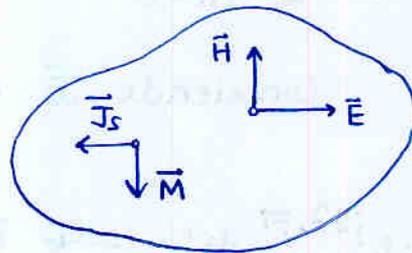
Las corrientes equivalentes en la superficie serán:

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$$

$$= \hat{z} \times \left( \frac{E_x}{Z_0} \hat{y} \right) = - \frac{E_x}{Z_0} \hat{x}$$

$$\vec{M}_s = - \hat{n} \times \vec{E}$$

$$= - \hat{z} \times (E_x \hat{x}) = - E_x \hat{y}$$



$$\vec{N} = N_x \hat{x} = - \hat{x} \iint_{S'} \frac{E_x(x', y')}{Z_0} e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

$$\vec{L} = L_y \hat{y} = - \hat{y} \iint_{S'} E_x(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

$$\begin{cases} N_\theta = \vec{N} \cdot \hat{\theta} = N_x \cos \theta \cos \phi \\ N_\phi = \vec{N} \cdot \hat{\phi} = -N_x \sin \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_\theta = \vec{L} \cdot \hat{\theta} = L_y \cos \theta \sin \phi \\ L_\phi = \vec{L} \cdot \hat{\phi} = L_y \cos \phi \end{cases}$$

$$E_\theta = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \cos \phi \left( \frac{r}{Z_0} \cos \theta + 1 \right) \iint_{S'} E_x(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

$$E_\phi = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \sin \phi \left( \frac{r}{Z_0} + \cos \theta \right) \iint_{S'} E_x(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

polarización vertical (i.e. según y)

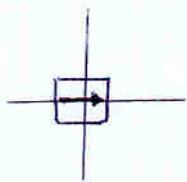
$$E_{\theta} = j \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \phi \left( \frac{r}{z_0} \cos \theta + 1 \right) \iint_{S'} E_x(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

$$E_{\phi} = +j \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \phi \left( \frac{r}{z_0} + \cos \theta \right) \iint_{S'} E_x(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

únicas diferencias

La interpretación es que hay que integrar los distintos 'diferenciales de apertura' cada uno con su módulo y fase, y cada uno con el diagrama de radiación del diferencial de apertura (que es  $\cos \phi \left( \frac{r}{z_0} \cos \theta + 1 \right)$   $\sin \phi \left( \frac{r}{z_0} + \cos \theta \right)$ ) } TF del campo

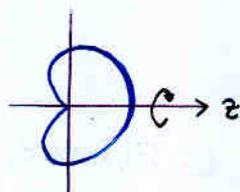
Apertura elemental:



$\Delta s \ll \lambda^2$   
 $E_0$   
 $z_0 = r$

$$\begin{cases} E_{\theta} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \cos \phi (\cos \theta + 1) \cdot E_0 \cdot \Delta s \\ E_{\phi} = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \sin \phi (\cos \theta + 1) E_0 \cdot \Delta s \end{cases}$$

$|E|^2 = |E_{\theta}|^2 + |E_{\phi}|^2$   
 $\propto (\cos \theta + 1)^2$



muy similar a un dipolo

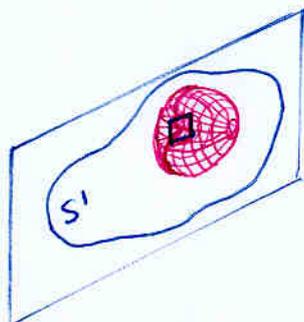
$E \propto \sin \theta \cdot \int I(z) e^{jk_z z'} dz$

diagrama de cada diferencial de dipolo

$Nz$  cada uno ponderado por su módulo y fase

ii Es como un array!!

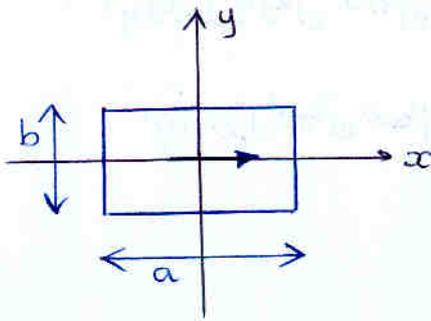
Ahora no hay más que integrar muchos de estos en la superficie de la apertura



(En efecto se cumple que el campo hacia atrás es cero.)

cada uno ponderado con  $E_x(x', y') \cdot e^{jk_x x'} e^{jk_y y'}$

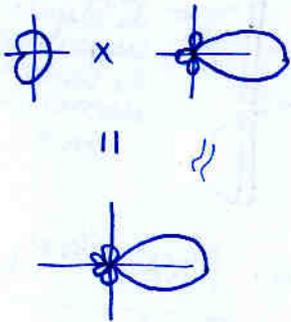
## 5. Apertura rectangular



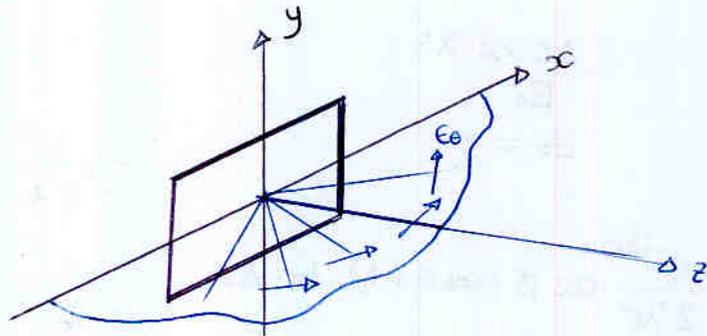
$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x(x', y') \hat{x} \\ &= E_0 \cdot f(x') \cdot g(y') \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \iint_S E_x(x', y') e^{ik_x x'} e^{ik_y y'} dx' dy' \\ &= E_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x') e^{ik_x x'} dx' \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g(y') e^{ik_y y'} dy' \\ &= E_0 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TF}[f]}}{F(k_x, a)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TF}[g]}}{G(k_y, b)}\end{aligned}$$

No hemos multiplicado el diagrama de un diferencial de apertura, ya que la parte realmente importante es sólo esta TF



Veamos que pinta tiene:



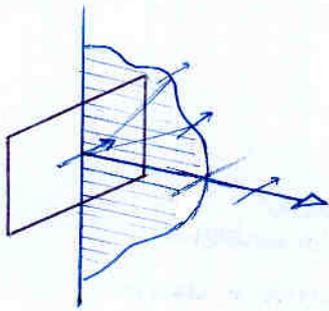
Plano E: ( $\theta = 0$ )

$$\begin{aligned}k_x &= k \sin \theta \\ k_y &= 0\end{aligned}$$

$$E_\theta = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left( \frac{r}{z_0} \cos \theta + 1 \right) \cdot E_0 \underbrace{F(k \sin \theta, a)}_{\text{cte}} \cdot \underbrace{G(0, b)}_{\text{cte}}$$

es sólo la transformada en la coordenada  $x$  la que nos define

• plano H



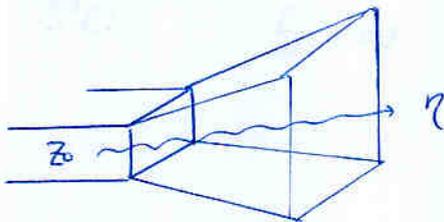
$$E_0 = E_0$$

$$E_0 \propto E_0 F(0, a) G(k \sin \theta, b)$$

- Campo máximo ( $\theta = 0$ )  $k_x = 0$   
 $k_y = 0$

$$|E_{\max}| = \frac{1}{2\lambda r} \left( \frac{\eta}{Z_0} + 1 \right) \iint_S E_{ap}(x', y') dx' dy'$$

↑  
suma en fase  
de todos los componentes  
del campo



- Potencia radiada

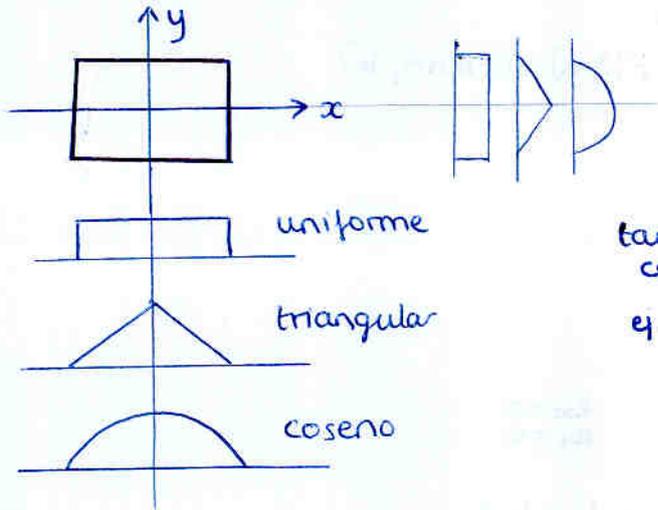
Ya que no hay pérdidas podemos integrar la densidad de potencia en la apertura

$$W_{\text{rad}} = \iint_{\text{Apertura}} P_{\text{apertura}} \cdot dS_{\text{apertura}} = \iint_{S_{ap}} \frac{1}{\eta} |E_{ap}|^2 ds$$

$$E_{ap} = E_0 \cdot f(x') g(y')$$

$$= \frac{E_0^2}{\eta} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} |f(x')|^2 dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} |g(y')|^2 dy'$$

• Distribuciones de campo típicas



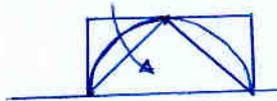
también pueden haber combinaciones de lo anterior  
 ej: pedestal = uniforme + coseno típico en parabólicas.



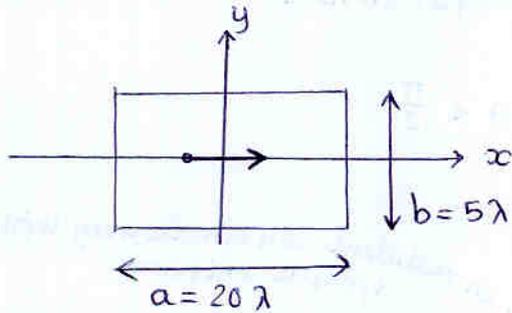
El campo radiado contendrá la transformada de la distribución del campo en la abertura (ya que las corrientes equivalentes son el campo)

Distribución	Transformada	$\Delta\theta_{-3dB}$ (°)	NLPS (dB)
	$a \cdot \frac{\text{sen}(k_x \cdot \frac{a}{2})}{k_x \cdot \frac{a}{2}} \rightarrow u$	$50'6 \frac{\lambda}{a}$	$13'2$
	$\frac{a}{2} \left[ \frac{\text{sen}(\frac{k_x \frac{a}{2}}{2})}{(\frac{k_x \frac{a}{2}}{2})} \right]^2$	$73'6 (\frac{\lambda}{a})$	$26'4$
	$a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos(u)}{(\frac{\pi}{2})^2 - u^2}$	$68'8 (\frac{\lambda}{a})$	$23'2$

Intuitivamente, cuanto menos "llenemos" la distribución, mayor es el ancho de haz (menos directividad)



ejemplo:



distribución uniforme

Tendremos:

$$\vec{E}_{ap} = E_0 \cdot f(x) \cdot g(y) \hat{x}$$

$$\iint E_{ap} e^{ik_x x'} e^{ik_y y'} dx' dy'$$

$$= E_0 \cdot F(k_x, x) \cdot G(k_y, y)$$

siendo:

$$F(k_x, x) = a \frac{\text{sen}(k_x \frac{a}{2})}{k_x \frac{a}{2}}$$

$$G(k_y, y) = b \frac{\text{sen}(k_y \frac{b}{2})}{k_y \frac{b}{2}}$$

• Plano E ( $\phi = 0$ )

$$\begin{cases} k_x = k \text{ sen } \theta \\ k_y = 0 \end{cases}$$

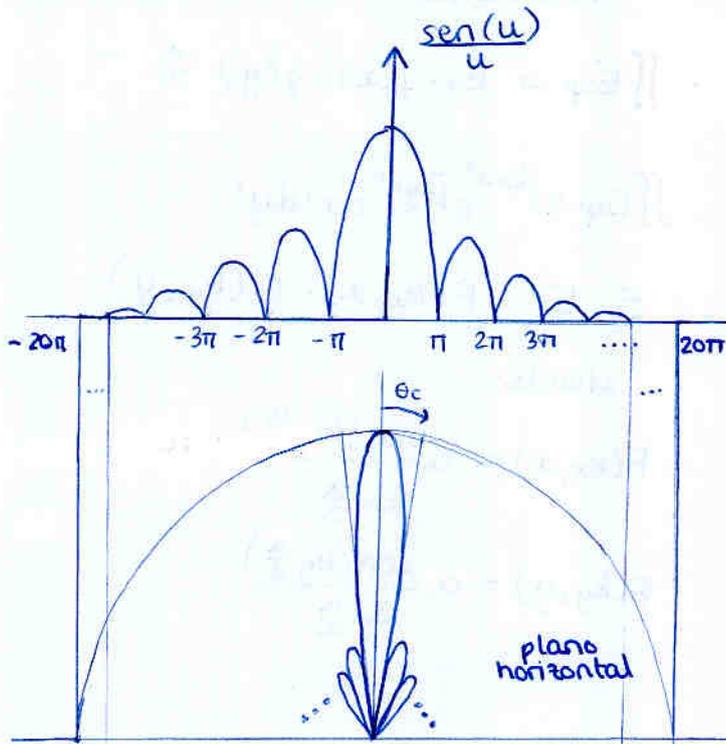
$$\begin{cases} E_\theta \propto E_0 \cdot F(k_x, a) \cdot \underbrace{G(0, b)}_b = E_0 \cdot a \cdot b \cdot \frac{\text{sen}(k_x \frac{a}{2})}{k_x \frac{a}{2}} \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

• Plano H ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ )

$$\begin{cases} k_x = 0 \\ k_y = k \text{ sen } \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_\theta = 0 \\ E_\phi \propto E_0 \cdot \underbrace{F(0, a)}_a \cdot G(k_y, b) = E_0 \cdot a \cdot b \cdot \frac{\text{sen}(k_y \frac{b}{2})}{k_y \frac{b}{2}} \end{cases}$$

Para visualizarlo usamos el concepto de margen visible



en realidad  $20\pi$  estaría muy lejos (porque usábamos)

$$u = k \frac{a}{2} \sin \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

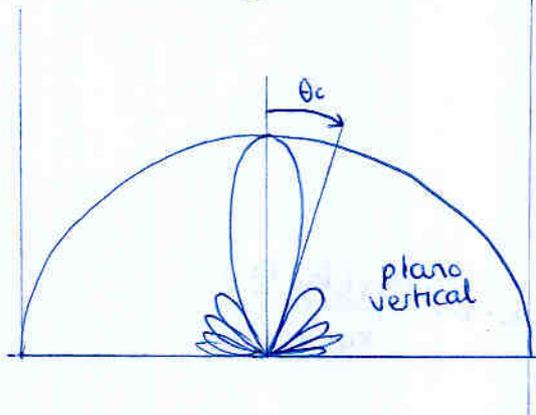
$$MV \in \left[-k \frac{a}{2}, k \frac{a}{2}\right]$$

ej: calculemos el ancho de haz entre ceros

$$\Delta\theta_c = 2\theta_c$$

$$\Delta\theta_c = 5'6''$$

$$u = \pi = k \frac{a}{2} \sin \theta_c \rightarrow \theta_c = 2'8''$$



• Directividad

$$D_{\max} = \frac{P_{\max}}{W_{\text{rad}}/4\pi r^2}$$

$P_{\max} = \frac{ E_{\max} ^2}{\eta} = \frac{1}{\eta} \cdot \left[ \frac{1}{2\lambda r} \left( \frac{r}{z_0} + 1 \right) \iint_S E_{\text{ap}} ds \right]^2$ $\stackrel{z_0=r}{=} \frac{1}{\eta} \left[ \frac{1}{\lambda r} \iint_S E_{\text{ap}} ds \right]^2 = \frac{1}{\eta \lambda^2 r^2} \left[ \iint_S E_{\text{ap}} ds \right]^2$	$W_{\text{rad}} = \iint_{S_{\text{ap}}} P_{\text{ap}} \cdot dS_{\text{ap}}$ $= \iint_S \frac{ E_{\text{ap}} ^2}{\eta} dS$ $= \frac{1}{\eta} \iint_S  E_{\text{ap}} ^2 ds$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left( \iint_S E_{\text{ap}} ds \right)^2}{\iint_S |E_{\text{ap}}|^2 ds} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left( \int_{-a/2}^{a/2} f(x') dx' \right)^2 \left( \int_{-b/2}^{b/2} g(y') dy' \right)^2}{\left( \int_{-a/2}^{a/2} |f(x')|^2 dx' \right) \left( \int_{-b/2}^{b/2} |g(y')|^2 dy' \right)}$$

por conveniencia nuestra hacemos un c.v. de normalización

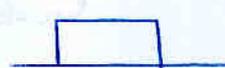
$$s = \frac{x'}{a} \quad t = \frac{y'}{b}$$

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{\left( \int_{-1/2}^{1/2} f(s) ds \right)^2}{\int_{-1/2}^{1/2} |f(s)|^2 ds} \cdot \frac{\left( \int_{-1/2}^{1/2} g(t) dt \right)^2}{\int_{-1/2}^{1/2} |g(t)|^2 dt}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\eta_{ilx} \leq 1} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\eta_{ily} \leq 1}$

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \overbrace{a \cdot b}^{\text{area}} \cdot \underbrace{\eta_{il}}_{\eta_{ilx} \cdot \eta_{ily}}$$

eficiencia de iluminación



$$\eta_{il} = 1$$



$$\eta_{il} = 0.75$$



$$\eta_{il} = \frac{8}{\pi^2} = 0.8$$

En general, para cualquier apertura:

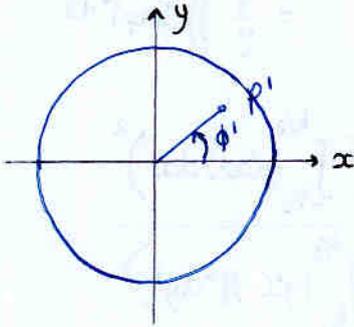
$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{(\iint E_{ap} ds)^2}{\iint |E_{ap}|^2 ds}$$

$$= \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \text{Area} \cdot \eta_{il}$$

→ fórmula para  $\eta_{il}$

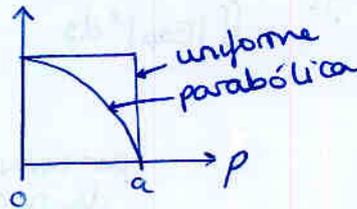
$$\eta_{il} = \frac{1}{\text{Area}} \cdot \frac{(\iint E_{ap} ds)^2}{\iint |E_{ap}|^2 ds}$$

## 6. Aperturas circulares



$$E_{\theta} \propto \iint E_{ap}(x', y') e^{j k \hat{r} \cdot \vec{r}'} dx' dy'$$

$$\bar{E}_{ap}(\rho', \phi') = \bar{E}_{ap}(\rho')$$



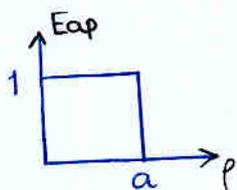
entonces:

$$\begin{cases} \hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \vec{r}' = x' \hat{x} + y' \hat{y} \\ = \rho' \cos \phi' \hat{x} + \rho' \sin \phi' \hat{y} \end{cases}$$

$$E_{\theta} \propto \int_0^{2\pi} \int_0^a E_{ap}(\rho') e^{j k \rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi'$$

Transformada de Fourier-Bessel

Distribuciones de  $E_{ap}(\rho')$



Transformada F-B

$$E_{\theta} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot 2 \cdot \frac{J_1(u)}{u}$$

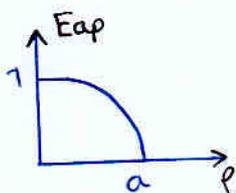
$\leftarrow u = k a \sin \theta$

$\Delta\theta_{-3dB}$

$$29'2 \cdot \frac{\lambda}{a}$$

NLPS (dB)

$$17'6$$



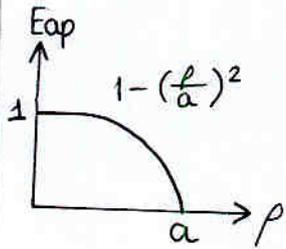
$$E_{\theta} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot 8 \cdot \frac{J_2(u)}{u^2}$$

$$36'4 \frac{\lambda}{a}$$

$$24'6$$

$$1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2$$

$\eta_{il}$  apertura circular, ejercicio:



$$\eta_{il} = \frac{1}{\pi a^2} \frac{\left[ \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 1 - \left( \frac{\rho'}{a} \right)^2 \right] \rho' d\rho' d\phi' \right]^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 1 - \left( \frac{\rho'}{a} \right)^2 \right]^2 \rho' d\rho' d\phi'}$$

numerador: (lo de dentro del cuadrado)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( 1 - \left( \frac{\rho'}{a} \right)^2 \right) \rho' d\rho' d\phi' &= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \rho' - \frac{1}{a^2} \rho'^3 d\rho' \\ &= 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} \rho'^2 - \frac{1}{4a^2} \rho'^4 \right]_0^a = 2\pi \left[ \left( \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{3a^2} a^4 \right) - (0 - 0) \right] \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{4} a^2 \right) = 2\pi \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{2} \pi a^2 \end{aligned}$$

denominador:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 1 - \left( \frac{\rho'}{a} \right)^2 \right]^2 \rho' d\rho' d\phi' &= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \left( 1 - \frac{\rho'^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{\rho'^2}{a^2} \right) \rho' d\rho' \\ &= 2\pi \cdot \int_0^a \left( 1 - 2\frac{\rho'^2}{a^2} + \left( \frac{\rho'}{a} \right)^4 \right) \rho' d\rho' \\ &= 2\pi \int_0^a \left( \rho' - 2\frac{\rho'^3}{a^2} + \frac{\rho'^5}{a^4} \right) d\rho' = 2\pi \left[ \frac{1}{2} \rho'^2 - \frac{2}{4a^2} \rho'^4 + \frac{1}{6a^4} \rho'^6 \right]_0^a \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{2} a^2 - \frac{2}{4a^2} a^4 + \frac{1}{6a^4} a^6 \right] = 2\pi \left( \frac{1}{2} a^2 - \frac{2}{4} a^2 + \frac{1}{6} a^2 \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{6} a^2 = \frac{1}{3} \pi a^2 \end{aligned}$$

$$\eta_{il} = \frac{1}{\pi a^2} \cdot \frac{\left( \frac{1}{2} \pi a^2 \right)^2}{\frac{1}{3} \pi a^2} = \frac{1}{\pi a^2} \cdot \frac{\frac{1}{4} [\pi a^2]^2}{\frac{1}{3} [\pi a^2]} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Por tanto

$$\begin{aligned} D_{\max} &= \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \text{Area} \cdot \eta_{il} \\ &= \frac{4\pi}{\lambda^2} \pi a^2 \cdot 0.75 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$$



Calculate the expected number of offspring

$$E[N] = \int_0^{\infty} N \cdot f(N) \cdot dN$$

$$= \int_0^{\infty} N \cdot \frac{1}{2} \ln 2 \cdot e^{-N} \cdot dN$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 \cdot \int_0^{\infty} N \cdot e^{-N} \cdot dN$$

Integration by parts

$$= \frac{1}{2} \ln 2 \cdot \left[ -N \cdot e^{-N} - \int -e^{-N} \cdot dN \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 \cdot \left[ -N \cdot e^{-N} + e^{-N} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 \cdot \left[ 0 - 1 + 1 - 0 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 \cdot 0 = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$$

For small

$$\frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$$

# Directividad

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \pi a^2 \cdot \eta_{il}$$

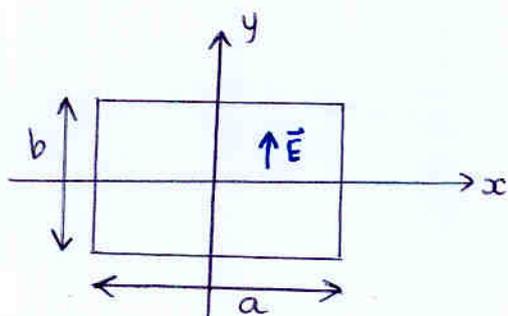
$$\eta_{il} = \frac{1}{\pi a^2} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a [1 - (\frac{r'}{a})^2] \rho' dr' d\theta'}{\int_0^{2\pi} \int_0^a [1 - (\frac{r'}{a})^2]^2 \rho' dr' d\theta'}$$

(2π)<sup>2</sup> ←

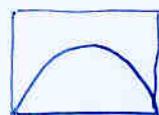
2π ←

← practicar esta integral

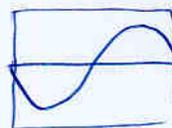
## Apertura Multimodo



$$\vec{E}_{10} = E_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{y}$$



$$\vec{E}_{20} = E_{20} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \hat{y}$$



cada modo crea sus propios campos.

$$a = b = 10\lambda$$

$$E_{\theta} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \sin\theta \left(\frac{\pi}{2a} \cos\theta + 1\right) \iint_S \vec{E}_{ap} e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

$$E_{\phi} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \cos\theta \left(\frac{\pi}{2a} + \cos\theta\right) \iint_S \dots$$

Esta es la parte importante

$$\iint_S E_{ap} e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' = E_{10} F(k_x, a) \cdot G(k_y, b)$$

$$F(k_x, a) = \frac{\pi}{2} a \frac{\cos\left(k_x \frac{a}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(k_x \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$G(k_y, b) = b \cdot \frac{\text{sen}\left(k_y \frac{b}{2}\right)}{k_y \frac{b}{2}} \leftarrow \text{TF de una uniforme}$$

Plano E: ya lo hemos hecho anteriormente  
(al ser uniforme en E sale la TF de  $\square$  que es una sinc)

Plano H: ( $\phi=0$ )

$k_x = k \sin \theta$   
 $k_y = 0$

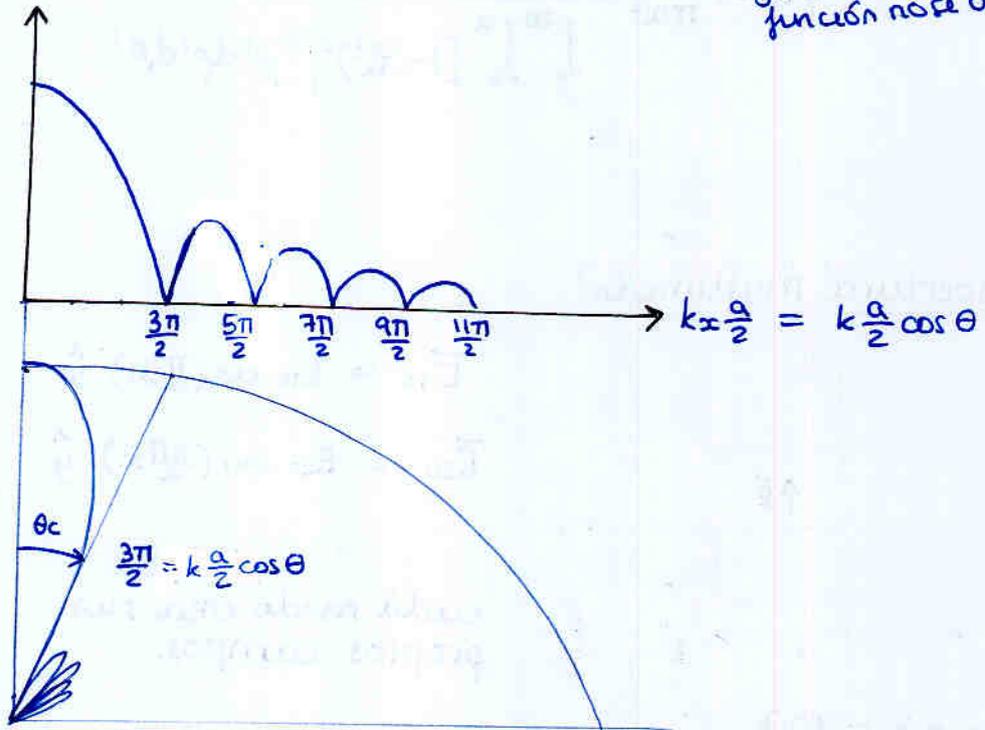
$E_\theta = 0$

$E_\phi \propto E_{10} \cdot F(k_x, a) \cdot \overbrace{G(0, b)}^b$

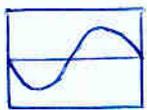
$= E_{10} \cdot \frac{\pi}{2} ab \frac{\cos(kx \frac{a}{2})}{(\frac{\pi}{2})^2 - (kx \frac{a}{2})^2}$

se anula en múltiplos impares de  $\pi/2$

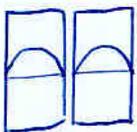
pero cuidado, en  $\pi/2$  esto se anula y por L'Hopital la función no se anula



• Para el modo 20



H



$a/2$   $a/2$



$\iint E_{ap} e^{ik_x x'} e^{iky' y'} dx' dy' =$

es equivalente a un array

$= E_{20} \cdot F(k_x, \frac{a}{2}) \cdot \underbrace{FA(\psi_x)}_{\text{sería lo que obtendríamos si hiciésemos la TF de } \psi} \cdot G(k_y, b)$

Ⓢ ha aplicado el array sólo a F, no a todo el campo

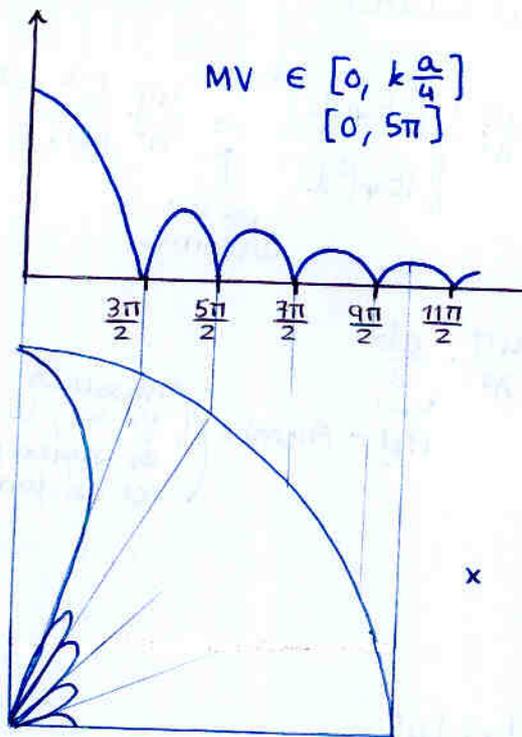
$F(k_x, \frac{a}{2}) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\cos(kx \frac{a}{4})}{(\frac{\pi}{2})^2 - (kx \frac{a}{4})^2}$

$FA_x(\psi_x) = \frac{\sin(2 \frac{\psi_x}{2})}{\sin(\frac{\psi_x}{2})} = 2 \cos \frac{\psi_x}{2}$

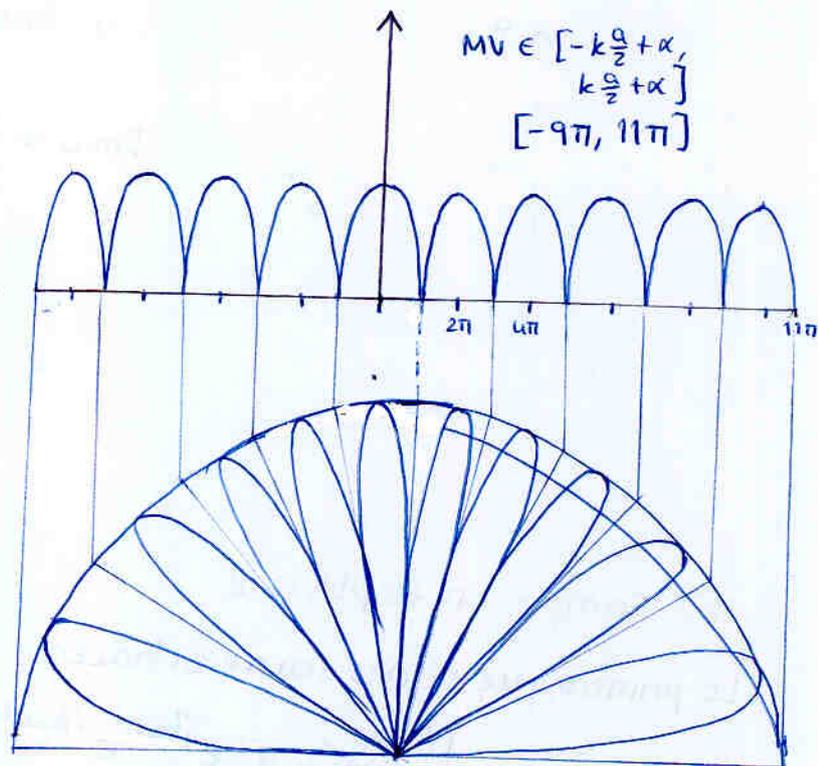
con  $\psi_x = kx \frac{a}{2} + \pi$

Dibujándolo:

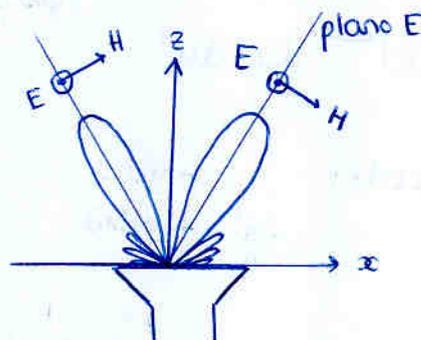
$|F(kx, \frac{a}{4})|$



FA



El campo total radiado por la apertura a causa del modo 20



Nota: ¿Y si quisiéramos calcular la TF directamente?

$$\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) = \frac{1}{2j} \left[ e^{i\frac{2\pi}{a}x} - e^{-i\frac{2\pi}{a}x} \right]$$

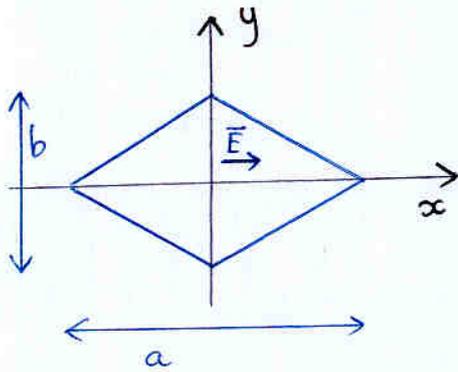
la TF queda:

$$\frac{1}{2j} \left[ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{i\beta x'} e^{ik_x x'} dx' - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-i\beta x'} e^{ik_x x'} dx' \right]$$

$$TF \left[ \text{sinusoidal wave} \right] = TF \left[ \text{sinusoidal wave} \times \text{rectangular pulse} \right]$$

$$= \frac{\uparrow \frac{1}{2j}}{-\frac{1}{2a}} \uparrow \frac{-1}{2j} \frac{1}{2a} * \text{rectangular pulse} = \text{radiation pattern}$$

• Apertura romboidal



$$\vec{E}_{ap} = E_0 \hat{x} \text{ (uniforme)}$$

a) Directividad

$$D_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left( \iint_S E_{ap} ds \right)^2}{\iint_S |E_{ap}|^2 ds} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{E_0^2 \cdot S^2}{E_0^2 \cdot S}$$

↑  
por ser uniforme

$$= \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{ab}{2}$$

$A_{ef} = A_{rombo}$  (hasalido  $\eta_{il} = 1$ , lo cual es lógico por ser uniforme)

↓  
se aprovecha al máximo toda el área

b) Campo en el plano E

Lo primero que se nos ocurre es hacer

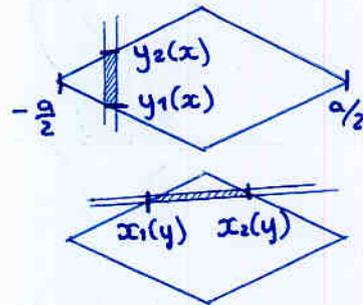
$$\iint_S E_{ap}(x', y') e^{ik_x x'} e^{ik_y y'} dx' dy'$$

Pero podemos resolverlo particularizando en el plano E ( $\phi = 0$ )

(ya que es lo que piden)

$$\left. \begin{matrix} k_y = 0 \\ k_x \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \iint_S E_{ap}(x', y') e^{ik_x x'} dx' dy'$$

Dos formas de hacerlo:

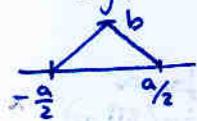


Hagamos la integral con franjas verticales

$$E_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik_x x'} \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \right] dx = E_0 \int_{-a/2}^{a/2} \underbrace{[y_2(x) - y_1(x)]}_{2y_2(x)} e^{ik_x x'} dx$$

vemos que ha sido buena idea elegir franjas verticales

solo hay que integrar el contorno x 2



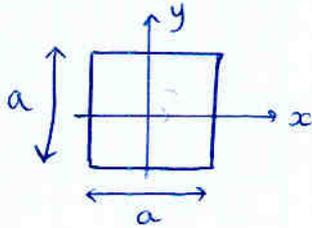
ii es la TF de una triangular !!

$$= 2 E_0 \frac{b}{2} \frac{a}{2} \left( \frac{\text{sen}(k_x \frac{a}{4})}{k_x \frac{a}{4}} \right)^2$$

Campo en el plano H

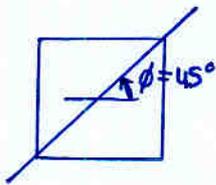
$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{ik_y y'} \left[ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \right] dy = 2 E_0 \frac{a}{2} \frac{b}{2} \left( \frac{\text{sen } k_y \frac{b}{4}}{k_y \frac{b}{4}} \right)^2$$

Nota:



$$a^2 \cdot \frac{\text{sen}(k_x \frac{a}{2})}{k_x \frac{a}{2}} \cdot \frac{\text{sen}(k_y \frac{a}{2})}{k_y \cdot \frac{a}{2}}$$

si queremos calcularlo en el plano:

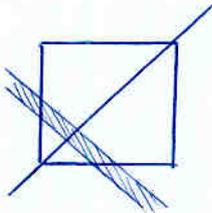


$$k_x \frac{a}{2} = k \text{sen } \theta \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

$$k_y \frac{a}{2} = k \text{sen } \theta \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

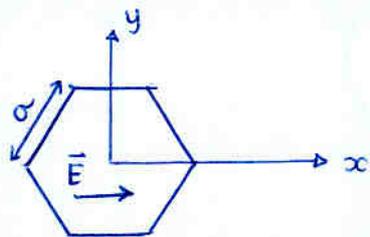
$$a^2 \frac{\text{sen}(k_x \frac{a}{2})}{k_x \frac{a}{2}} \cdot \frac{\text{sen}(k_y \frac{a}{2})}{k_y \frac{a}{2}} = a^2 \left[ \frac{\text{sen}(k \text{sen } \theta \frac{a\sqrt{2}}{4})}{k \text{sen } \theta \frac{a\sqrt{2}}{4}} \right]$$

si integrásemos con franjas así:



sería lo mismo que estábamos haciendo con la apertura romboidal, sería una distribución triangular

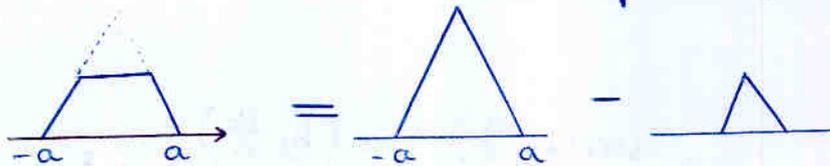
## Apertura hexagonal



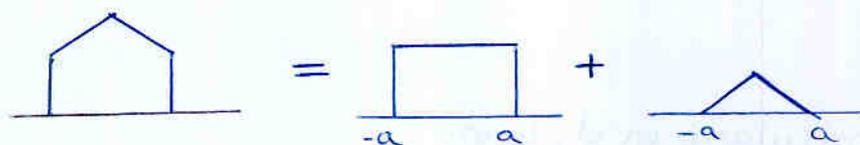
Resulta que los campos radiados por una apertura de forma cualquiera si el campo es uniforme viene dado por la TF de su perfil  $x^2$

El perfil depende del plano en que miremos; basta con que el campo sea uniforme en ese plano

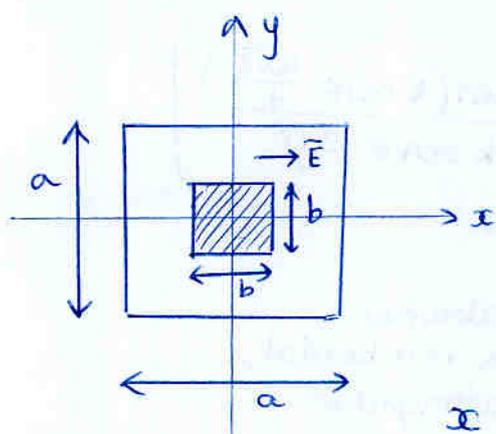
plano E



plano H

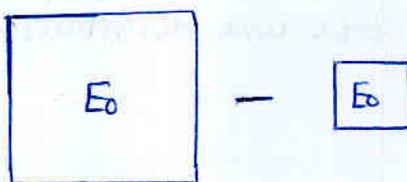
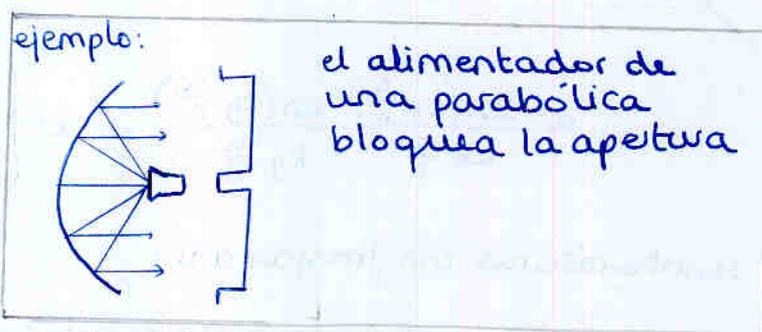


## Bloqueo de una apertura cuadrada



$$a = 6\lambda$$

$$b = 2\lambda$$



Plano E ( $k_y = 0$ )

$$E_0 \propto F(k_x, a) \cdot \frac{G(0, a)}{a} - F(k_x, b) \cdot \frac{G(0, b)}{b}$$

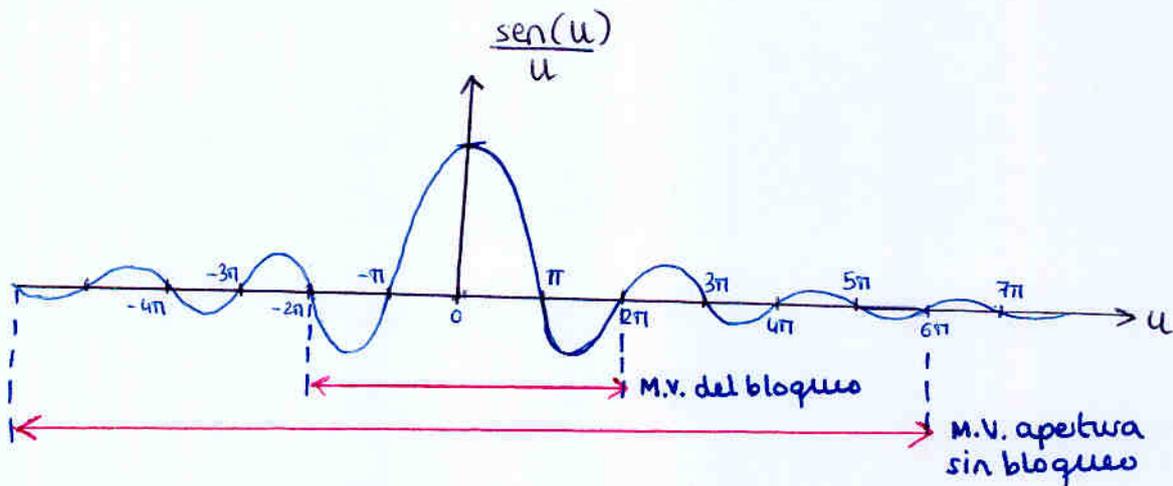
$$= a^2 \frac{\text{sen}(k_x \frac{a}{2})}{k_x \frac{a}{2}} - b^2 \frac{\text{sen}(k_x \frac{b}{2})}{k_x \frac{b}{2}}$$

$$k_x = k \text{ sen } \theta$$

$$k_y = 0$$

Cuidados: para dibujar el módulo de la resta no vale restar módulos.

Hay que restar sinus con signo



Margen visible en cada caso:

• apertura sin bloqueo:

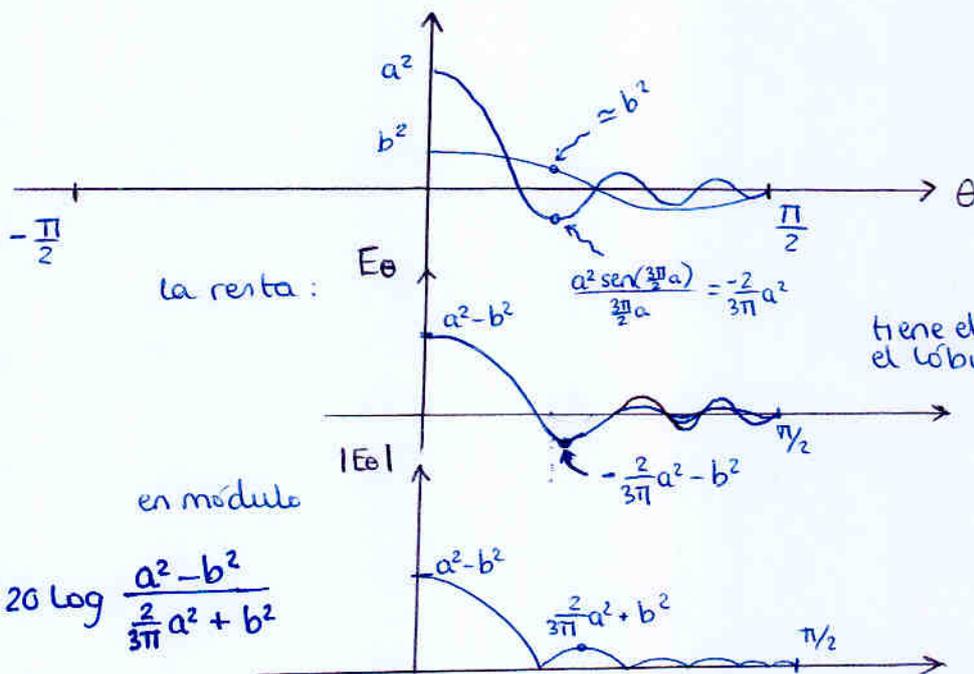
$$u = kx \frac{a}{2} = k \frac{a}{2} \sin \theta \implies \begin{matrix} \nearrow \frac{2\pi}{\lambda} \\ -k \frac{a}{2} \leq u \leq k \frac{a}{2} \\ -1 \leq \sin \theta \leq 1 \\ -6\pi \leq u \leq 6\pi \end{matrix}$$

• trazo que bloquea

$$u = kx \frac{b}{2} = k \frac{b}{2} \sin \theta \implies \begin{matrix} -k \frac{b}{2} \leq u \leq k \frac{b}{2} \\ -2\pi \leq u \leq 2\pi \end{matrix}$$

Dibujándolo frente a  $\theta$

(nota: la translación  $u \rightarrow \theta$  no es lineal)



tiene el efecto de disminuir el lóbulo principal y de aumentar el secundario

$$NLPS = 20 \log \frac{a^2 - b^2}{\frac{2}{3\pi} a^2 + b^2}$$

Consider a point charge  $q$  located at a distance  $r$  from the center of a sphere of radius  $R$ .  
 Find the electric field at a point  $P$  on the surface of the sphere.

Point charge  $q$   
 at distance  $r$

Sphere of radius  $R$

Consider a point charge  $q$  located at a distance  $r$  from the center of a sphere of radius  $R$ .  
 Find the electric field at a point  $P$  on the surface of the sphere.

The electric field  $E$  at point  $P$  is given by:  

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

The electric field  $E$  at point  $P$  is given by:  

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

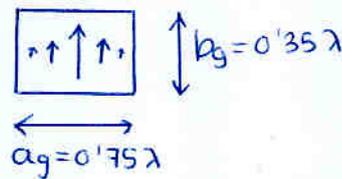
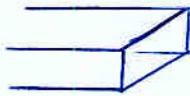
Consider a point charge  $q$  located at a distance  $r$  from the center of a sphere of radius  $R$ .  
 Find the electric field at a point  $P$  on the surface of the sphere.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

# Tema 8. Bocinas

- 8.1 Guía rectangular
- 8.2 Bocinas rectangulares
  - Campos en la apertura
  - campos radiados
- 8.3 Directividad
  - Bocinas óptimas
- 8.4 Bocina cónica

## 1. Guía rectangular

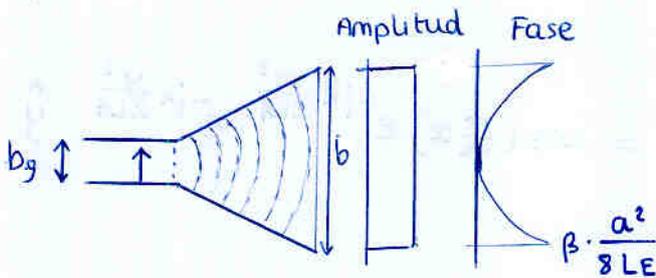


$$E_{ap}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{a_g} x\right) \hat{y}$$

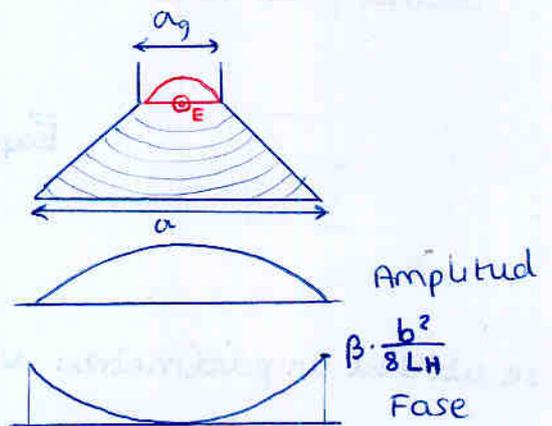
Pegas  $\rightarrow$  No podemos ignorar multiplicar la TF por el diagrama de la apertura elemental.  
Poca directividad

## 2. Bocinas rectangulares

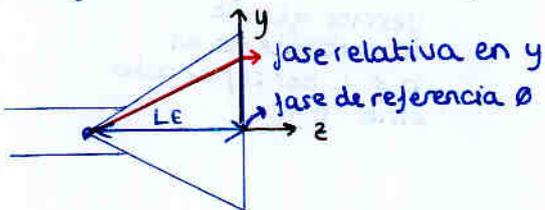
### Bocina Plano E



### Bocina Plano H



una diferencia de caminos da lugar a diferencias de fase

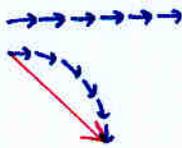


$$\text{fase} = \beta \cdot \left[ \sqrt{LE^2 + y^2} - LE \right] = \beta \left[ LE \sqrt{1 + \left(\frac{y}{LE}\right)^2} - LE \right] \approx \beta \cdot \frac{y^2}{2LE} = \text{fase relativa}$$

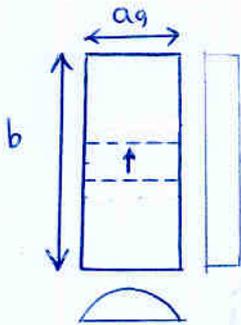
$\uparrow$   
 ss  $1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{LE}\right)^2$   
 aproximaremos  $\beta$  con  $k$

Podemos imaginar varias aperturas elementales cada una con cierta fase.

ejemplo: en broadside no será el campo tan intenso como podría

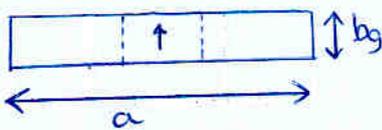


Bocina plano E



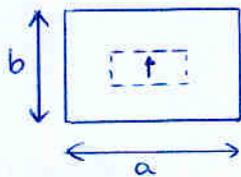
$$\bar{E}_{ap}(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{a_g} x\right) e^{-ik \frac{y^2}{2L_E}} \hat{y}$$

Bocina plano H



$$\bar{E}_{ap}(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-ik \frac{x^2}{2L_H}} \hat{y}$$

Bocina piramidal



$$\bar{E}_{ap}(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-ik \frac{x^2}{2L_H}} e^{-ik \frac{y^2}{2L_E}} \hat{y}$$

se utiliza un parámetro: variación de fase máxima

Plano E

$$\Delta\phi_E = \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{b^2}{8L_E} = \underbrace{2\pi \cdot \frac{b^2}{8\lambda L_E}}_S = \Delta\phi_E$$

Vemos que lo importante no es b ó L por separado sino  $b^2/L$

Plano H

$$\Delta\phi_H = 2\pi \cdot \underbrace{\frac{a^2}{8\lambda L_H}}_t$$

# Campos radiados

Piramidal (caso más general)

$$\iint E_{ap}(x', y') e^{ik_x x'} e^{ik_y y'} dx' dy'$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-ik \frac{x'^2}{2LH}} e^{ik_x x'} dx' \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ik \frac{y'^2}{2LE}} e^{ik_y y'} dy'$$

hacemos normalización para que aparezcan  $t$  y  $s$

$$= \int_{-1}^1 \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) e^{-i2\pi t x^2}}_{f(x, t)} e^{i k_x \frac{a}{2} x} dx \cdot \int_{-1}^1 \underbrace{e^{-i2\pi s y^2} e^{i k_y \frac{b}{2} y}}_{g(y, s)} dy$$

$$= F\left(k_x \frac{a}{2}, t\right)$$

define plano H

Se han obtenido una "familia" de transformadas que dependen de  $s$  y  $t$

$$G\left(k_y \frac{b}{2}, s\right)$$

define plano E

dominio transformado que sigue dependiendo del ángulo

nota:

si  $t=0 \rightarrow F$  es la TF del coseno  $\rightarrow$

si  $s=0 \rightarrow G$  es la TF del uniforme-sinc

aperturas sólo plano H o plano E

conocidas

$$G\left(k_y \frac{b}{2}, s\right) = \int_{-1}^1 e^{-i2\pi s y^2} e^{i k_y \frac{b}{2} y} dy$$

plano E  
plano vertical

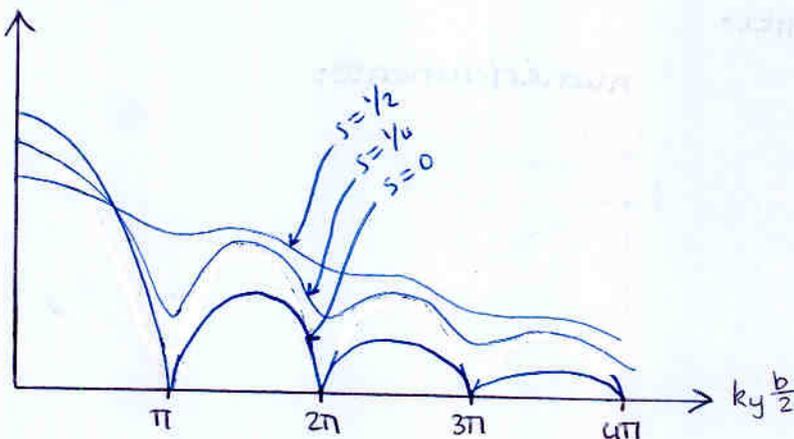


Diagrama Universal Plano E

$$F(k_x \frac{a}{2}, t) = \int_{-1}^1 \cos(\frac{\pi}{a} x) e^{-i2\pi t x^2} e^{iky \frac{b}{2} y} dy$$

Plano H  
Plano horizontal

por tener distribución coseno se "ponderan" más las zonas centrales y el desfase tiene un efecto menor

↓  
El plano H tarda más en deformarse al aumentar t que el plano E al aumentar s

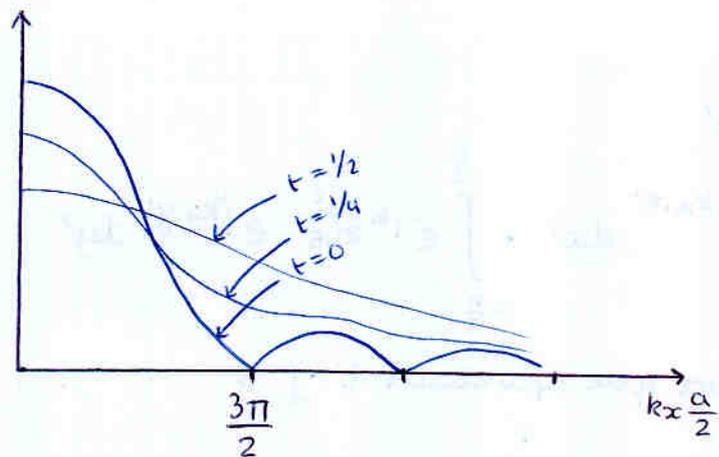


Diagrama Universal Plano H

### 3. Directividad

$$D_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab \cdot \eta_{ilx} \cdot \eta_{ily}$$

Plano E	Plano H	Piramidal
$\eta_{ilx} = \frac{8}{\pi^2}$	$\eta_{ilx} \leftarrow$ no es la del coseno porque hay desfase	$\eta_{ilx}$
$\eta_{ily} \leftarrow$ no es la de la uniforme porque hay desfase	$\eta_{ily} = 1$	$\eta_{ily}$

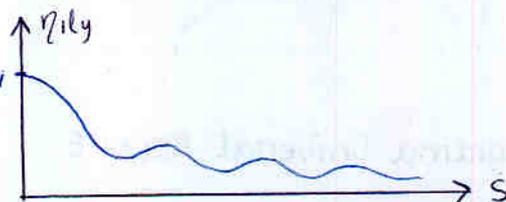
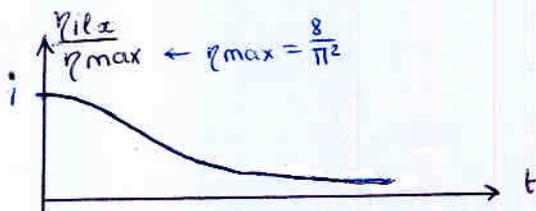
$$f(x, t) = \cos(\frac{\pi}{2} x) e^{-i2\pi t x^2}$$

$$g(y, s) = e^{-i2\pi s y^2}$$

$$\eta_{ilx} = \frac{|\int_{-1}^1 f(x, t) dx|^2}{\int_{-1}^1 |f(x, t)|^2 dx}$$

$$\eta_{ily} = \frac{|\int_{-1}^1 g(y, s) dy|^2}{\int_{-1}^1 |g(y, s)|^2 dy}$$

numéricamente:



$s, t \uparrow \Rightarrow$

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \overset{\uparrow}{ab} \cdot \overset{\downarrow}{\eta_{ix} \cdot \eta_{iy}}$$

**Bocinas óptimas**

$$s = \frac{b^2}{8\lambda L_E}$$

$$t = \frac{a^2}{8\lambda L_H}$$

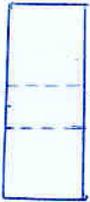
$$b = \sqrt{s \cdot 8\lambda L_E}$$

$$a = \sqrt{t \cdot 8\lambda L_H}$$

si aumento  $s, t$   
 → aumento area →  $D \uparrow$   
 → como mayor distorsión por desfase →  $D \downarrow$

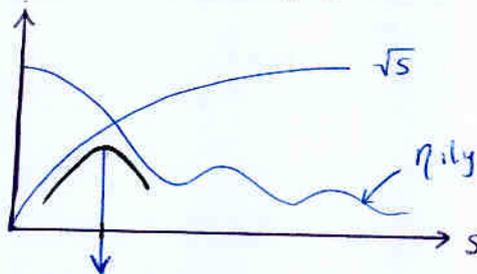
Halleemos el punto óptimo.

Bocina plano E



$$D_E(s) = \frac{4\pi}{\lambda^2} a_0 \cdot \overbrace{\sqrt{s \cdot 8\lambda L_E}}^b \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \eta_{iy}(s)$$

$$D_E(s) \propto \sqrt{s} \cdot \eta_{iy}(s)$$

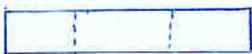


$$b = \sqrt{s \cdot 8\lambda L_E}$$

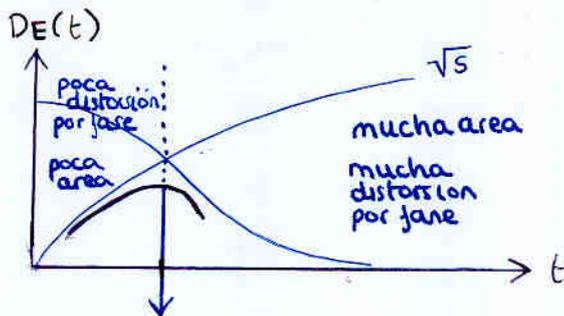
$$s_{\text{opt}} = 1/4$$

$$b = \sqrt{2\lambda L_E}$$

Bocina plano H



$$D_E(t) \propto \sqrt{t} \cdot \eta_{ix}(t)$$



$$a = \sqrt{t \cdot 8\lambda L_H}$$

$$t_{\text{opt}} = 3/8$$

$$a = \sqrt{3\lambda L_H}$$

En los libros se dan las curvas de la directividad

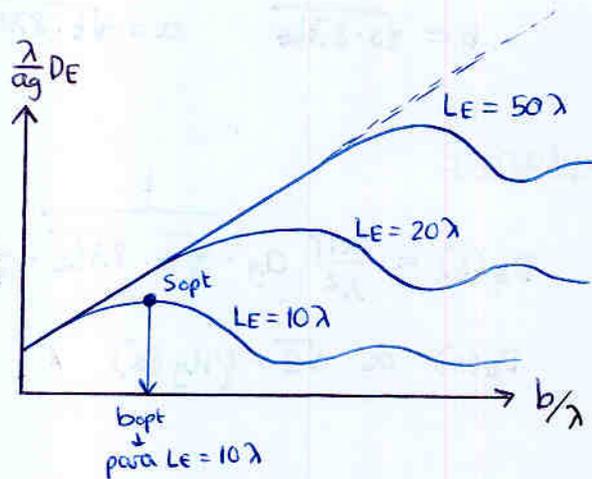
En lugar de dar  $D$  dan  $\frac{\lambda}{a} D$

Bocina plano E

$$D_E = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a g b \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \eta_{ily}(s)$$

$$\frac{\lambda}{a g} D_E = \frac{32}{\pi} \frac{b}{\lambda} \eta_{ily}(s)$$

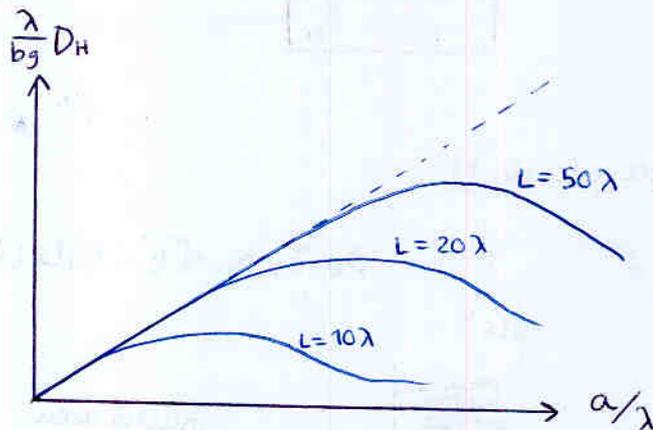
mayor directividad  
cuanto mayor  $L_E$ ,  
pero ir cambiando  
 $b$  para estar en el  
óptimo



Bocina plano H

$$D_H = \frac{4\pi}{\lambda^2} a b g \eta_{ily}(t) \cdot 1$$

$$\frac{\lambda}{b g} D_H = 4\pi \frac{a}{\lambda} \eta_{ily}(t)$$



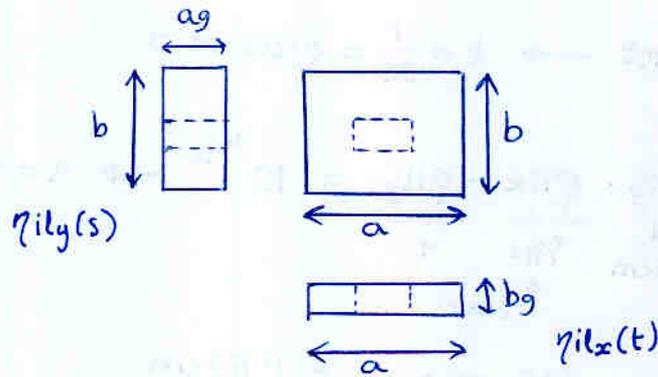
¿qué hacemos con la bobina piramidal?

$D_E \rightarrow$  gráficas

$D_H \rightarrow$  gráficas

$D_{pir}?$

$$D_{pir} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a \cdot b \cdot \eta_{ilx} \cdot \eta_{ily}$$



Las eficiencias serán las mismas

Por tanto podemos despejar  $\eta_{ilx}$  y  $\eta_{ily}$  de las expresiones  $D_H$  y  $D_E$

$$D_E = \frac{4\pi}{\lambda^2} a_g b \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \eta_{ily}(s) \rightarrow \eta_{ily}(s) = \frac{\lambda^2 \cdot D_E \cdot \pi}{a_g \cdot b \cdot 32}$$

$$D_H = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a b_g \cdot \eta_{ilx}(t) \cdot 1 \rightarrow \eta_{ilx}(t) = \frac{\lambda^2 D_H}{a b_g 4\pi}$$

$$D_{pir} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a \cdot b \cdot \underbrace{\left( \frac{\lambda^2 D_H}{a b_g 4\pi} \right)}_{\eta_{ilx}} \cdot \underbrace{\left( \frac{\lambda^2 D_E \pi}{a_g b \cdot 32} \right)}_{\eta_{ily}}$$

$$D_{pir} = \frac{\pi}{32} \left( \frac{\lambda}{a_g} D_E \right) \left( \frac{\lambda}{b_g} D_H \right)$$

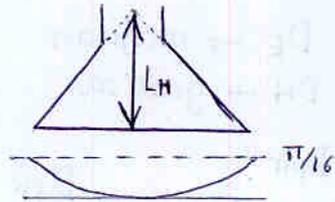
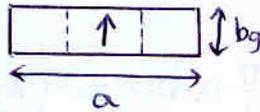
Esto es precisamente lo que se lee de las gráficas.

# Problema: Bocina Plano H

$$D_H = 16 \text{ dB}$$

$$f = 12 \text{ GHz}$$

$$b_g = b = 2.5 \text{ cm}$$



a)  $\Delta\phi_H = \frac{\pi}{16} = 2\pi t \rightarrow t = \frac{1}{32} = 0.03 \approx 0$

$$D_H = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a \cdot b_g \cdot \underbrace{\eta_{ilx}}_{\frac{8}{\pi^2}} \cdot \underbrace{\eta_{ily}}_1 = 10^{16/10} \rightarrow a = 9.77 \text{ cm}$$

$t=0$

$$t = \frac{a^2}{8\lambda L_H} = 0.03 \rightarrow L_H = 1.52 \text{ m}$$

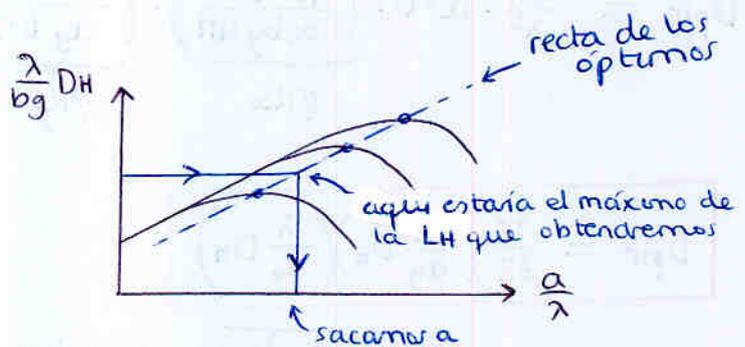
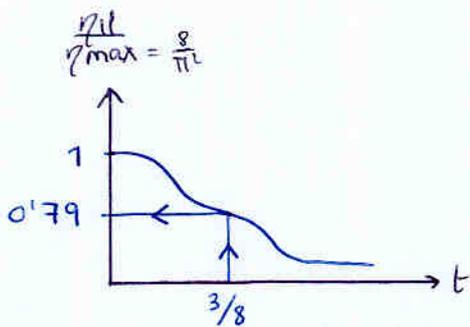
b) En lugar de diseñar para fase constante; diseñar con directividad máxima (bocina óptima)  $D_H = 16 \text{ dB}$

$$t = \frac{3}{8}$$

$$a = \sqrt{3\lambda L_H}$$

$$D_H = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a \cdot b_g \cdot \eta_{ilx} \cdot 1$$

Dos formas de obtener la a



$$\eta_{ilx} = 0.79 \cdot \frac{8}{\pi^2} = 0.64$$

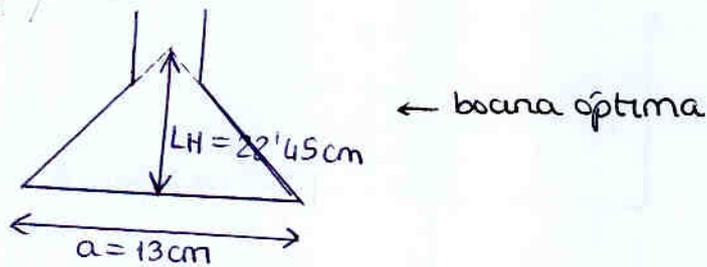
$$a = 13 \text{ cm}$$

$$D_H = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a \cdot b_g \cdot \eta_{ilx} \rightarrow \text{despejar } \boxed{a = 13 \text{ cm}}$$

$10^{16/10}$        $0.64$

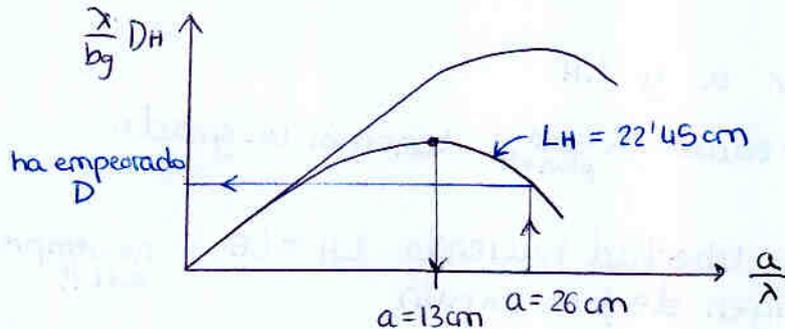
$$\text{Y ahora } \boxed{L_H = \frac{a^2}{3\lambda} = 22.45 \text{ cm}}$$

c) usamos



Ahora cambiamos  $a = 26$  cm sin variar LH

$$D_H = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a \cdot b_g \cdot \eta_{lx} \cdot \eta_{ly} = 21.1 \text{ (13 dB)}$$

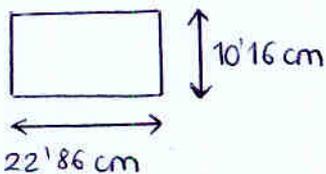


**Problema: Bocina Piramidal**

• Bocina óptima

•  $f = 10 \text{ GHz}$

•  $\Delta\theta_{-3\text{dB}} = 20^\circ$  en bocinas puede no haber nulos, por eso se suele utilizar ancho a -3dB y no ancho entre ceros



$$a, LH \rightarrow a = \sqrt{3\lambda LH} \quad (s = 1/4)$$

$$b, LLE \rightarrow b = \sqrt{2\lambda LE} \quad (t = 3/8)$$

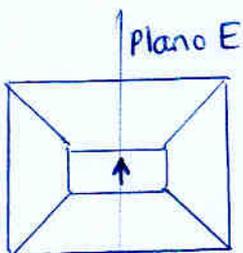
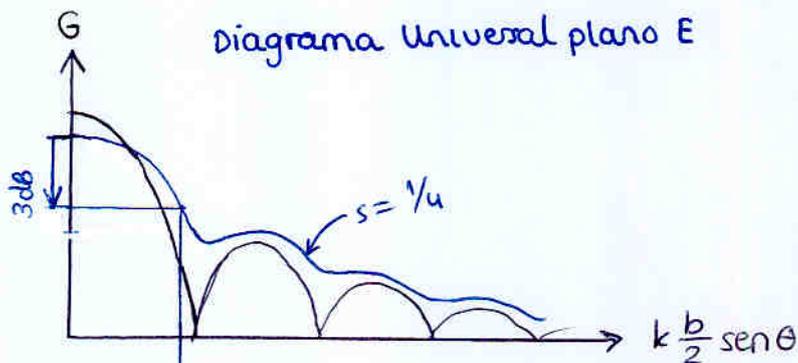


Diagrama Universal plano E



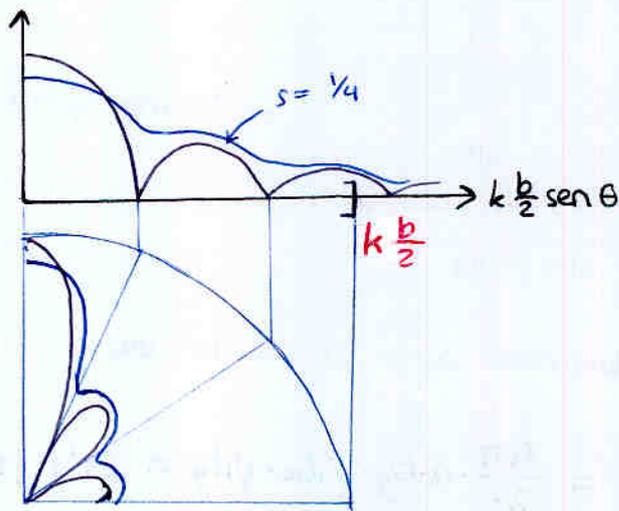
$$1.47 = k \frac{b}{2} \text{sen } \theta_{-3\text{dB}}$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \text{sen } 10^\circ \Rightarrow \text{despejo } b = 14.8 \text{ cm}$$

$$LE = 36.5 \text{ cm}$$

El aspecto del diagrama:

$$MV \in [0, k \frac{b}{2}]$$



- Para el plano H: hallar a y LH

Como no nos han forzado  $\theta_{-3dB}$  en el plano H tenemos un grado de libertad

Usamos ese grado de libertad haciendo así logramos un origen de fase común

$$LH = LE$$

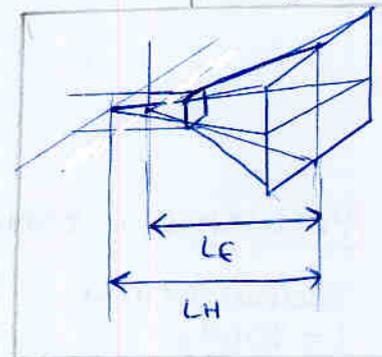
no siempre es así !!

$$LH = LE$$

$$a = \sqrt{3\lambda LH}$$

Por tanto la directividad:

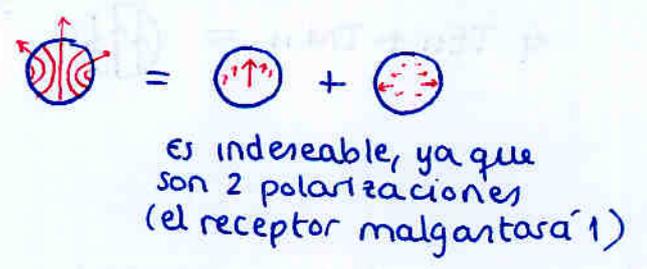
$$D_{pir} = \frac{4\pi}{\lambda^2} a \cdot b \cdot \underbrace{\eta_{il}}_{0.5} = 57 \quad (17.5 \text{ dB})$$



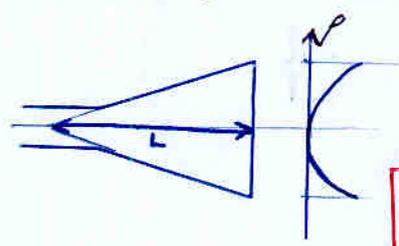
# 4 Bocina cónica



Como el campo no es sólo en una dirección:



El error de fase tiene la misma forma



$$\Delta\phi = k \cdot \frac{\rho^2}{2L}$$

$$\Delta\phi_{max} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a^2}{2L} = 2\pi \frac{dm^2}{8\lambda L}$$

s

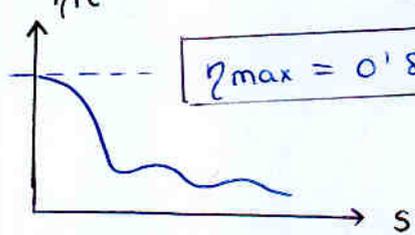
$$\Delta\phi_{max} = 2\pi s$$

$$s = \frac{dm^2}{8\lambda L}$$

## Directividad

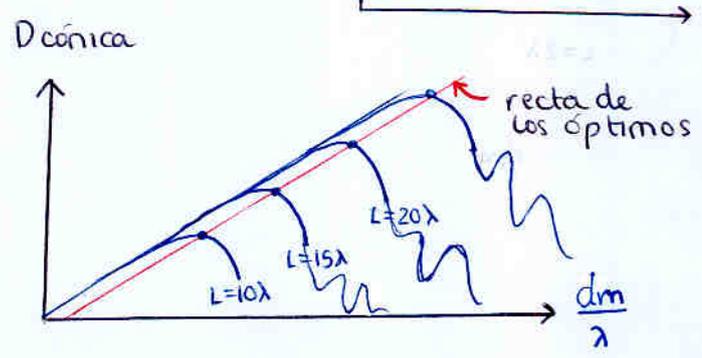
$$D_{cónica} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \underbrace{\pi a^2}_{\pi a^2 \propto \sqrt{s}} \cdot \underbrace{\eta_{il}(s)}_{\eta_{il}}$$

hay un punto óptimo  $s = \frac{3}{8}$



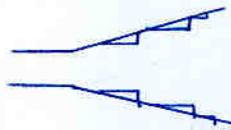
se calcularía con las expresiones del campo TE<sub>11</sub> circular

En este caso dan la directividad directamente

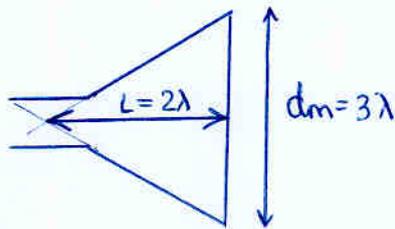


Nota: en aplicaciones donde no podemos permitirnos malgastar potencia (ej: satélites) se juega ponderando modos para tener sólo una polarización

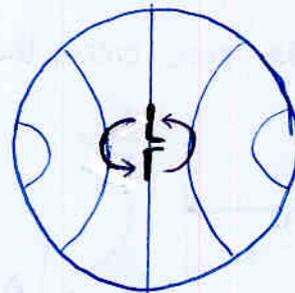
ej  $TE_{11} + TM_{11} =$   se consigue con cosas como



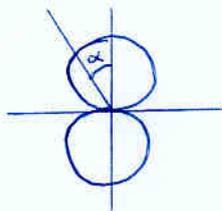
**Problema: bocina cónica**



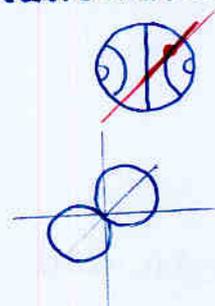
Colocamos un dipolo en el centro que podemos girar en el plano XY



$$V_{ca}(\phi) \propto \hat{y} \cdot (\sin \alpha \hat{x} + \cos \alpha \hat{y}) = \cos \alpha$$

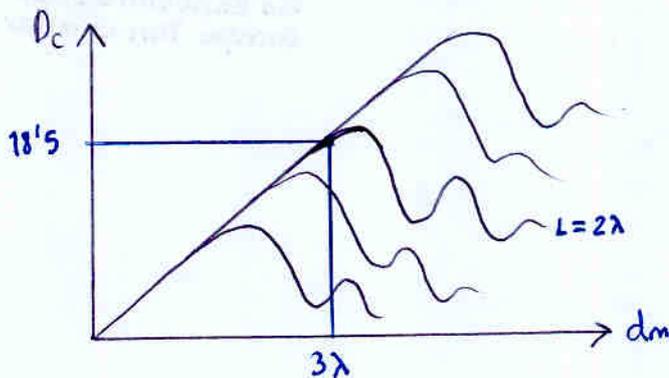


Nota: si el dipolo estuviera en otro punto

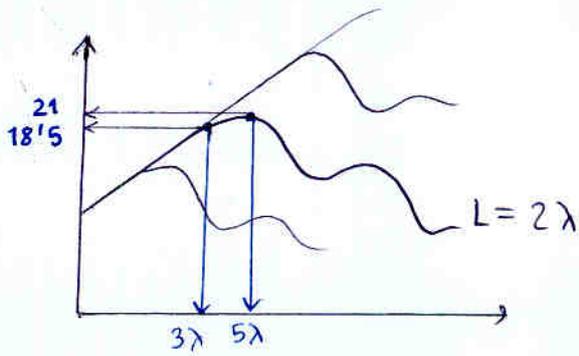


c) Eficiencia de iluminación (tenemos curvas  $D_c$ )

$$D_c = \frac{4\pi}{\lambda^2} \pi a^2 \eta_{il} = 10 \frac{18.5}{10} \Rightarrow \eta_{il} = 0.797$$



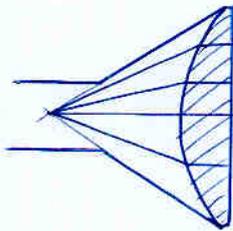
d) Manteniendo  $L$ , obtener  $dm$  óptimo



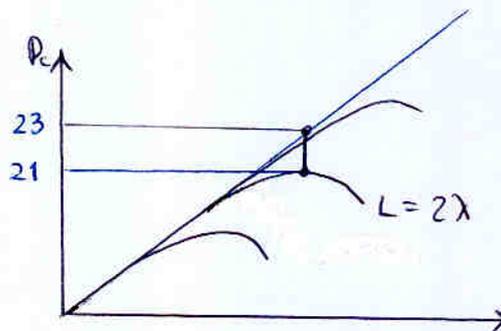
$$D_c = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \pi \left(\frac{dm}{2}\right)^2 \cdot \eta_{il} = 10^{21/10}$$

$$\eta_{il \text{ óptimo}} = 0.52$$

e) Introduciendo una lente logramos una fase constante. Calcular  $D$



Es equivalente a una  $L \rightarrow \infty$



Subimos hasta la asintota

1947 - 1948

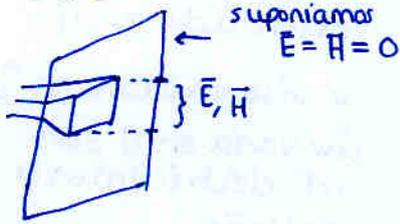
1949 - 1950

1951 - 1952

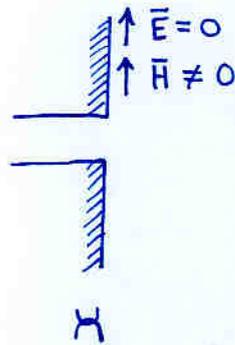
1953 - 1954

# Tema 9. Ranuras

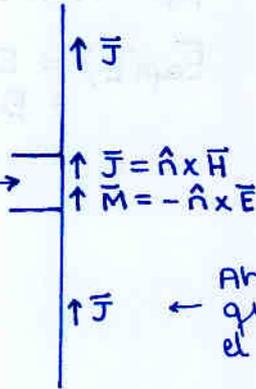
En bocinas, en el plano de la apertura externa a ella había aire



En cambio ahora hay un conductor, donde pueden aparecer corrientes y por tanto campo magnético



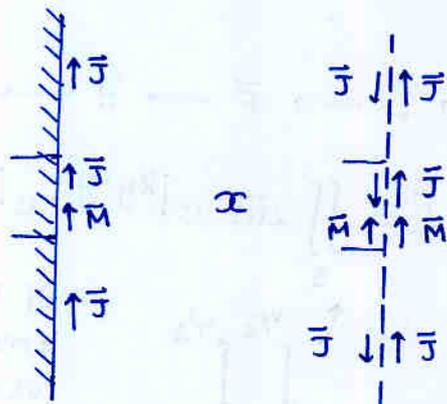
en el tema anterior suponiamos campos nulos detrás de la apertura e inventábamos corrientes equivalentes



Ahora también habrá que suponer J en el resto del plano.

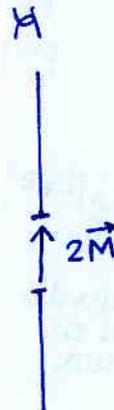
Puedo suponer un metal a la izquierda del plano, al que además puedo aplicar teoría de imágenes

(las J van en sentido opuesto y las M en el mismo en la imagen)

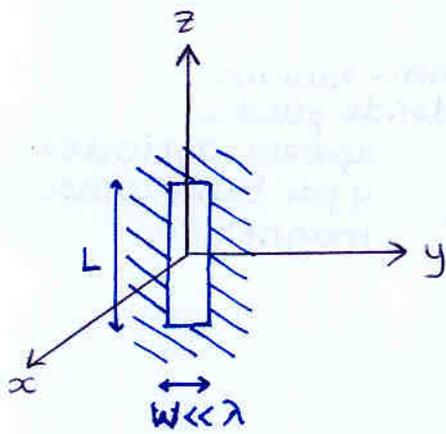


Entonces las J se van unas con otras, y las M se suman

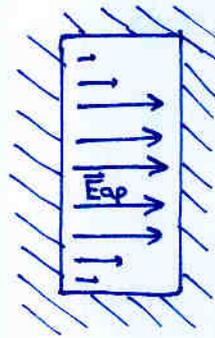
En este caso habrá campo no nulo a la izquierda (habrá el mismo que a la derecha) pero resulta que en el espacio que nos interesa (la derecha) los campos son exactamente los mismos que con J y M y campos nulos a la izquierda.



Las ranuras son:

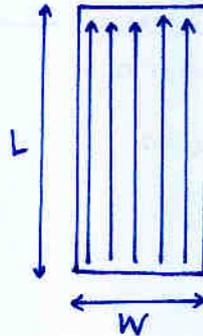


como  $W \ll \lambda$ , el campo sólo va en una dirección (en la otra se anularía)



el campo siempre orientado en  $\hat{y}$   
y sólo variable en  $\hat{z}$   
(no varía en  $\hat{y}$  por ser eléctricamente pequeño)

$$\begin{aligned} \bar{M} &= -\hat{n} \times E_{ap} \\ \bar{E}_{ap}(z) &= E_{ap}(z) \cdot \hat{y} \\ &= E_0 \cdot f(z) \cdot \hat{y} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \hat{n} = \hat{x} \quad \begin{aligned} \bar{M} &= M_z(z) \hat{z} \\ &= -E_0 \cdot f(z) \hat{z} \end{aligned}$$



$$\bar{M} \rightarrow \bar{L} \rightarrow \bar{F} \rightarrow \bar{H} \rightarrow \bar{E}$$

$$\bar{L} = \iint_S 2\bar{M} e^{iky \cdot y'} \cdot e^{ik_z z'} dy' dz'$$

$$\int_{-w/2}^{w/2} \int_{-l/2}^{l/2}$$

Si la apertura fuere grande en ambas dimensiones habría que hacer la TF bidimensional, pero como en  $y'$  es eléctricamente pequeña suponemos  $e^{iky \cdot y'} = 1$

$$\bar{L} = \hat{z} \int_{-l/2}^{l/2} 2(-WE_0) f(z') e^{ik_z z'} dz'$$

$V_0$ : diferencia de potencial en la ranura

$$V_0 \cdot f(z')$$

$$\begin{aligned} V_0 &= -\int \bar{E} \cdot d\bar{l} \\ &= -W \cdot E \end{aligned}$$

$$\vec{L} = \hat{z} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2 \cdot V(z') e^{ik_0 z'} dz'$$

$$\vec{F} = F_z \hat{z} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} L_z \hat{z}$$

$$H_\theta = -j\omega F_\theta \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} F_\theta = -F_z \sin \theta$$

$$= j\omega F_z \sin \theta$$

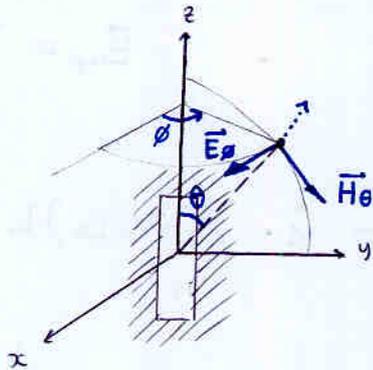
$$\downarrow$$

$$E_\phi = -\eta H_\theta$$

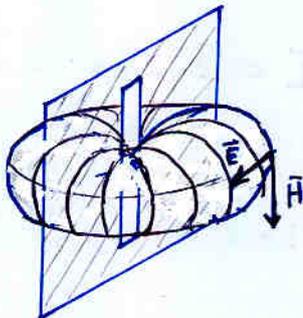
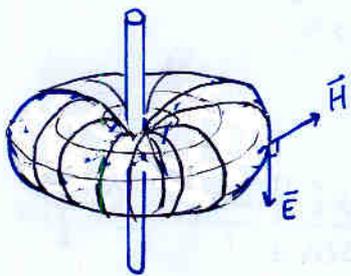
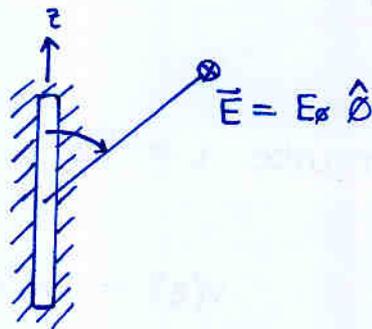
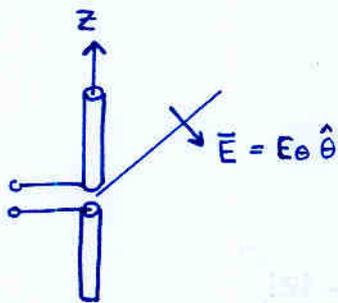
$$E_\phi = -j\omega\eta F_z \sin \theta$$

Nota: es como un dipolo, pero cambiando  $I(z')$  por  $V(z')$ . (salvo por el 2)

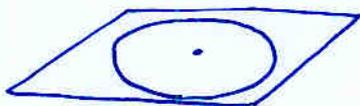
Las ranuras son como un hilo de corriente magnetica



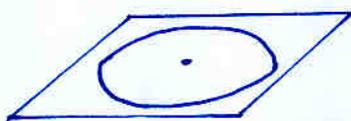
Comparación con el dipolo:



- Polarizaciones ortogonales
- Diagramas iguales
- Directividades iguales

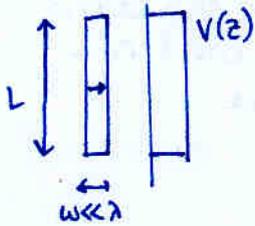


omnidireccional en plano  $\vec{H}$



omnidireccional en plano  $\vec{E}$

## Ranura elemental



Igual que en el dipolo elemental la corriente no era cero en los extremos, como idealización, aunque sea imposible;  
En la ranura elemental también hacemos que el potencial no sea cero en los extremos

$$\vec{E}_{ap} = E_0 \hat{y} \quad (\text{constante el potencial})$$

$$\vec{L} = \hat{z} \cdot 2(-wE_0)L = \boxed{\vec{L} = 2V_0L\hat{z}}$$

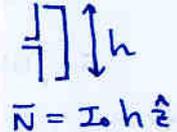
↑  
no confundir longitud L con vector potencial magnético  $\vec{L}$

$$\vec{E} = E_0 \hat{\theta}$$

$$= -j\omega\eta F_z \sin\theta \hat{\theta} = -j\omega\eta \frac{\epsilon e^{-jkr}}{4\pi r} L_z \sin\theta \hat{\theta}$$

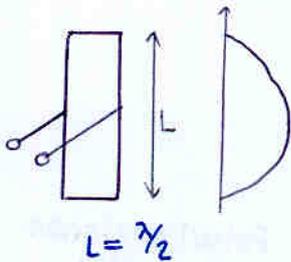
$$\boxed{\vec{E} = -j\omega\eta \frac{\epsilon e^{-jkr}}{4\pi r} \cdot 2 \cdot V_0 \cdot L \cdot \sin\theta \hat{\theta}}$$

en dipolo elem



$$\vec{N} = I_0 h \hat{z}$$

## Ranura resonante $L = \lambda/2$



$$V(z) = V_m \sin\left[k\left(\frac{L}{2} - |z|\right)\right]$$

$$V(z) = V_m \cos kz$$

haciendo la TF

$$\vec{L} = \hat{z} \cdot 2V_m \cdot 2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{k \sin^2\theta}$$

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \hat{\theta} = -j \frac{V_m e^{-jkr}}{\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \hat{\theta}}$$

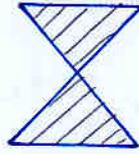
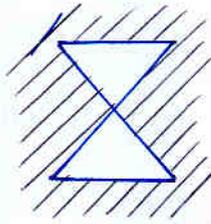
# Principio de Babinet

Ya hemos visto

se cumple tb. para cualquier antena



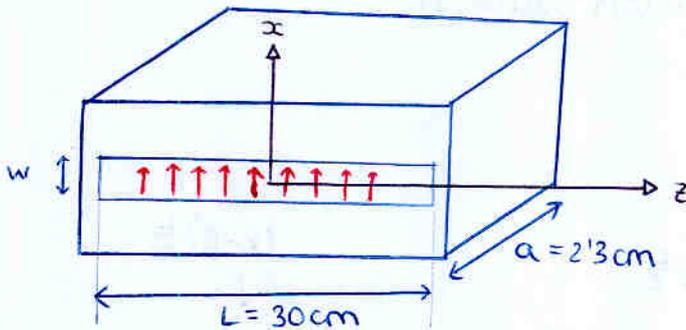
Antenas complementarias



cumplen:

$$Z_{\text{dipolo}} \cdot Z_{\text{ranura complementaria}} = \frac{\eta^2}{4}$$

## Problema



La fase va cambiando según se propaga el campo por la guía

$$\vec{E}_{ap} = \hat{x} E_0 e^{-i\beta z}$$

$$\beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

$$\vec{E}_{ap} \rightarrow \vec{M} = -\hat{n} \times \vec{E}_{ap} = -\hat{y} \times (\hat{x} E_0 e^{-i\beta z}) = E_0 e^{-i\beta z} \hat{z}$$

$$\vec{L} = \hat{z} \cdot w \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} 2E_0 e^{-i\beta z'} e^{ik_z z'} dz'$$

TF de una constante con un desfase al cambiar z

$$\vec{L} = \hat{z} \cdot 2w E_0 \left[ L \frac{\text{sen}\left[(k_z - \beta) \frac{L}{2}\right]}{\left[(k_z - \beta) \frac{L}{2}\right]} \right]$$

es una sinc desplazada

$$a \frac{\text{sen } kx \frac{a}{2}}{kx \frac{a}{2}}$$

$$H_0 = -j\omega F_0 = j\omega \frac{\epsilon}{4\pi r} e^{-jkr} L_z \text{sen } \theta$$

$$E_0 = -\eta H_0$$

La parte que nos interesa es:

$$d(\theta) = \frac{\text{sen}((kz - \beta)\frac{L}{2})}{(kz - \beta)\frac{L}{2}} \text{sen } \theta = \frac{\text{sen } u}{u} \text{sen } \theta$$

con  $u = (kz - \beta)\frac{L}{2}$

b) Apuntamiento para  $f = 8 \text{ GHz}$  y  $f = 12 \text{ GHz}$

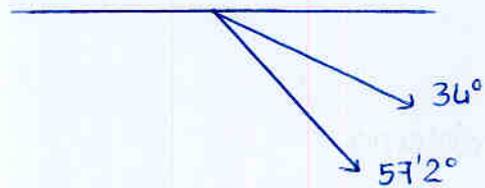
El máximo corresponde a  $kz = \beta$   
por tanto:  $(kz - \beta) = 0$

$$kz_{\text{max}} = k \cos \theta_{\text{max}} = \beta$$

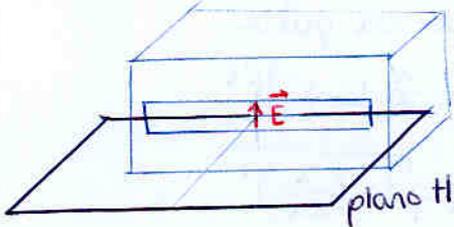
$$\theta_{\text{max}} = \cos^{-1}\left(\frac{\beta}{k}\right)$$

$$f = 8 \text{ GHz} \rightarrow \theta_{\text{max}} = 57'2''$$

$$f = 12 \text{ GHz} \rightarrow \theta_{\text{max}} = 34''$$



c) Dibujar el diagrama de radiación plano H



margin visible

$$\theta = [0, \pi]$$

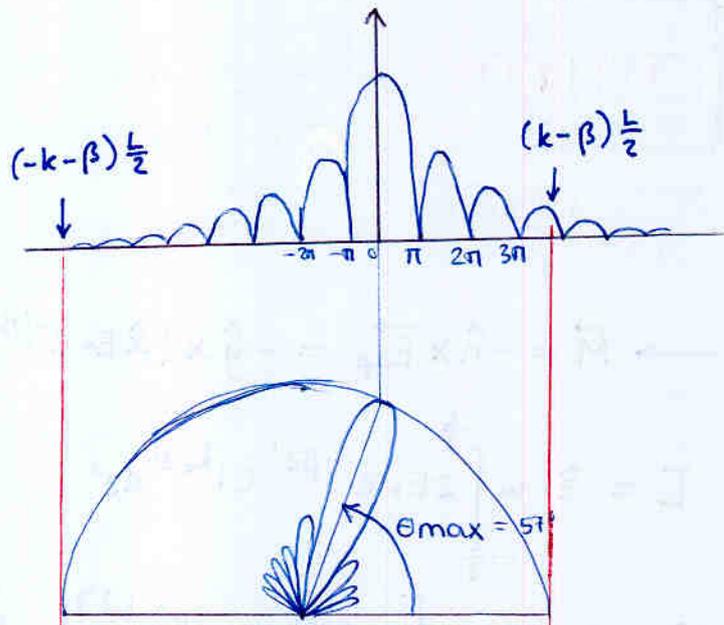
$$u = (kz - \beta)\frac{L}{2}$$

$$= (k \cos \theta - \beta)\frac{L}{2}$$

$$= \left[(-k - \beta)\frac{L}{2}, (k - \beta)\frac{L}{2}\right]$$

para  $f = 8 \text{ GHz}$

$$u = [-12'32\pi, 3'7\pi]$$

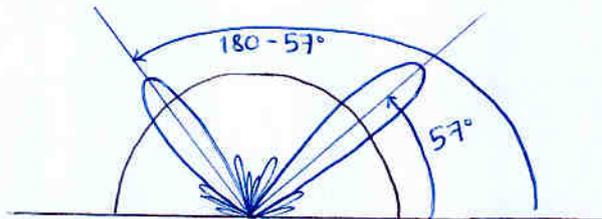


d) Guía terminada en carga con  $\Gamma = 0,5$

Hay reflexión  $\rightarrow$  habrá una onda estacionaria

$$\vec{E}_{ap}(z) = \hat{x} (E_0 e^{-i\beta z} + \Gamma E_0 e^{i\beta z})$$

Hay que aplicar superposición y al final se obtiene



Main body of handwritten text, consisting of several lines of cursive script.

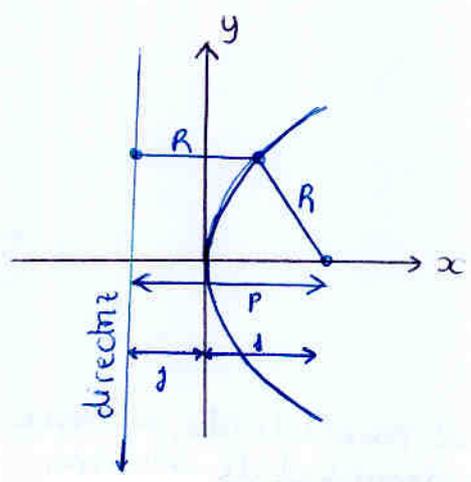
Large section of handwritten text, appearing to be a list or a series of entries, possibly organized into columns or rows.

# Tema 10. Reflectores

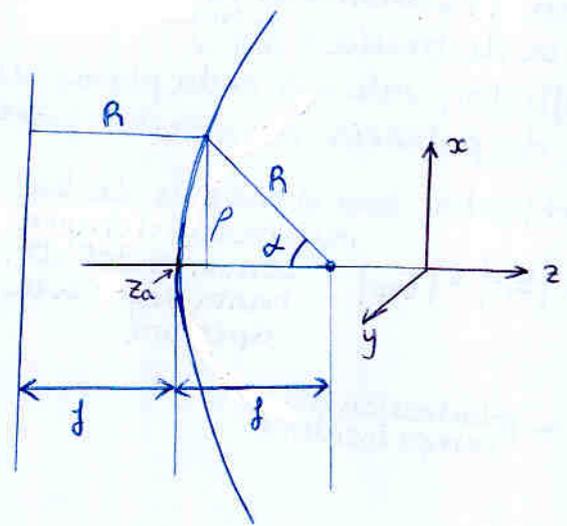
1. Análisis geométrico
2. Análisis electromagnético
  - Campo en la apertura
  - Nivel en bordes
  - Directividad
    - Eficiencia de iluminación  $\eta_i$
    - Eficiencia de desbordamiento  $\eta_s$



## 1. Análisis geométrico

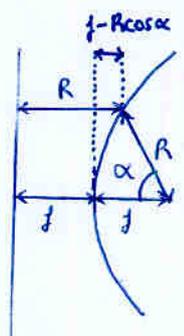


$$y^2 = 2px$$



$$\rho^2 = 4f(z - z_a)$$

¿cómo sería en polares la ecuación de la parábola?



se debe cumplir

$$R = f + (f - R \cos \alpha)$$

⇓

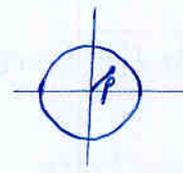
$$R = \frac{2f}{1 + \cos \alpha} = \frac{f}{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\cos^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos$$

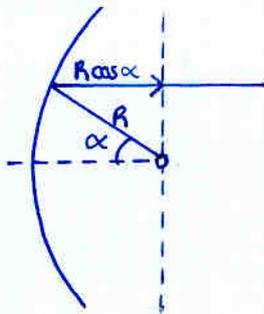
$$\begin{aligned} \rho &= R \sin \alpha \\ &= \left( \frac{f}{\cos^2(\frac{\alpha}{2})} \right) \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{2f}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sin(\frac{\alpha}{2}) \\ &= 2f \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

$$R = \frac{f}{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\rho = 2f \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})$$



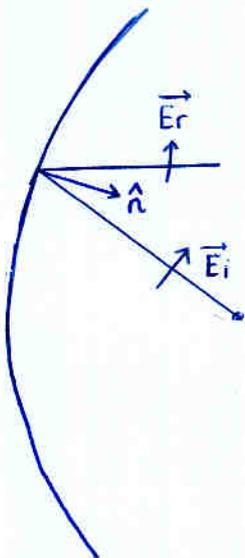
Para un ángulo  $\alpha$  dado, el camino que recorre un rayo es:



$$\begin{aligned} \ell &= R + R \cos \alpha \\ &= 2f = \text{cte} \end{aligned}$$

se puede demostrar (aplicando la Ley de Snell) que todos los rayos salen paralelos

## 2. Análisis electromagnético



la C.C. en el conductor es

$$\hat{n} \times (\vec{E}_i + \vec{E}_r) = 0$$

Además, desde el foco al paraboloide, se tiene una onda esférica (la densidad de potencia disminuye con la distancia).  $(\frac{e^{-ikr}}{4\pi r^2})$

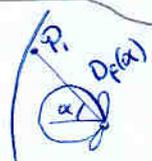
Una vez llega al reflector, sale una onda plana, que tiene densidad de potencia constante  $(e^{-ikz})$

el módulo en el reflector será el módulo de la reflejada, el cual se mantendrá cte. hasta llegar a la apertura

$$|E_i(r=R)| = |E_r| = |E_{ap}|$$

Campo en la apertura

$$\vec{E}_{ap} = |E_{ap}| e^{i\phi_{ap} = \text{cte}} \cdot \hat{e}_{ap} = \hat{e}_i \leftarrow \text{polarización del campo incidente}$$



$$P_i = \frac{|E_i|^2}{\eta} = \frac{D_f \cdot W_T}{4\pi r^2}$$

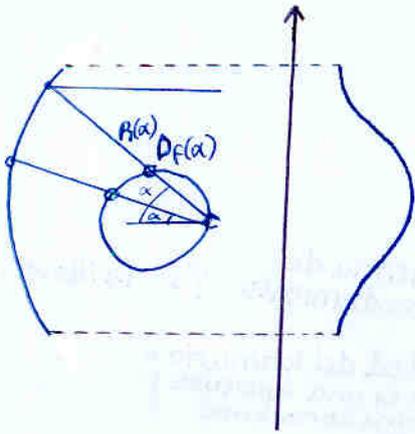
$$\Rightarrow |E_i(r=R)| = \frac{\sqrt{D_f \cdot W_T \cdot \eta}}{\sqrt{4\pi \cdot R}} = |E_{ap}|$$

$$D_f(\alpha) = \frac{P_i(\alpha)}{W_T / 4\pi r^2} \rightarrow P_i = \frac{D_f \cdot W_T}{4\pi r^2}$$

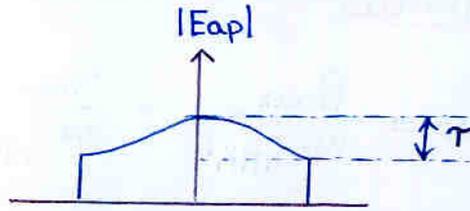
directividad del alimentador (feed)

$$D_f(\alpha) = D_{fmax} \cdot t_f(\alpha)$$

$$|E_{ap}| = |E_i(r=R)| = E_0 \cdot \frac{\sqrt{D_f(\alpha)}}{R(\alpha)}$$



$$|E_{ap}| = E_0 \frac{\sqrt{D_f(\alpha)}}{R(\alpha)}$$



$$T = 20 \log \frac{E_0 \frac{\sqrt{D_f(\beta)}}{R(\beta)}}{E_0 \frac{\sqrt{D_f(0)}}{R(0)}} = 20 \log \frac{R(0)}{R(\beta)} + 10 \log \frac{D_f(\beta)}{D_f(0)}$$

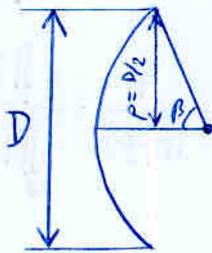
$$T = 10 \log t_f(\beta) + 20 \log \frac{f}{R(\beta)}$$

$$T = 10 \log t_f(\beta) + 40 \log \cos(\beta/2)$$

Depende del alimentador

Depende del paraboloide (distancia focal)

$$= T_{DIAGRAMA} + T_{CAMINOS}$$

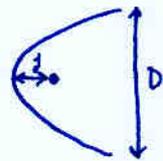


$$f = 2f \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{D}{2}$$

$$\frac{f}{D} = \frac{1}{4 \operatorname{tg}(\beta/2)}$$

Se limitan los grados de libertad para construir reflectores, ya que  $f$  y  $D$  están relacionados a través de  $\beta$

$$\frac{f}{D} = 0.2$$

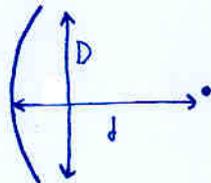


más NLPS

similar a bocina donde 'L' y 'a' se relacionaban a través de s

hay baja eficiencia de iluminación

$$\frac{f}{D} = 1.5$$

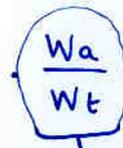


distribución más uniforme  
↓  
más D

hay desbordamiento de campo (se malgasta potencia)

# Directividad

$$D_{\text{reflector}} = \frac{P_{\text{max}}}{W_t / 4\pi r^2} = \frac{P_{\text{max}}}{W_a / 4\pi r^2}$$



eficiencia de desbordamiento  $\eta_s$  (spillover)

directividad de la apertura  
(que es una apertura como conocemos)

$$\frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi(\frac{D}{2})^2}{\text{area}} \cdot \eta_{il}$$

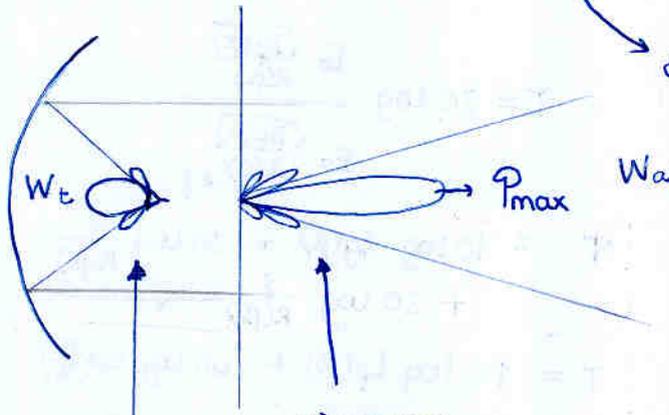


Diagrama PRIMARIO  
(el del alimentador)

Diagrama SECUNDARIO

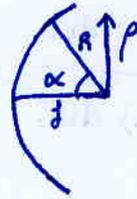
$$\eta_{il} = \frac{1}{\pi(\frac{D}{2})^2} \cdot \frac{(\iint_s E_{ap} ds)^2}{\iint_s |E_{ap}|^2 ds}$$

con

$$E_{ap} = E_0 \frac{\sqrt{D_f(\alpha)}}{R(\alpha)}$$

Sustituyendo el campo  $E_{ap}$  en  $\eta_{il}$

$$\eta_{il} = \frac{1}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} \frac{\left( \int_0^{2\pi} \int_0^{\beta/2} E_0 \frac{\sqrt{D_f(\alpha)}}{R} \rho \, d\rho \, d\phi \right)^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\beta/2} \left| E_0 \frac{\sqrt{D_f(\alpha)}}{R} \right|^2 \rho \, d\rho \, d\phi}$$



$$\rho = 2j \, \text{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$d\rho = 2j \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} \cdot \frac{4\pi^2 \left( \int_0^{\beta} \frac{\sqrt{D_f(\alpha)}}{j} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot 2j \, \text{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \, d\alpha \right)^2}{2\pi \int_0^{\beta} \frac{D_f(\alpha)}{j^2} \cdot \cos^4 \frac{\alpha}{2} \cdot 2j \, \text{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \, d\alpha}$$

$$= \frac{1}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} \cdot \frac{4^2 \pi^2 j^2 \left( \int_0^{\beta} \sqrt{D_f(\alpha)} \, \text{tg} \frac{\alpha}{2} \, d\alpha \right)^2}{2\pi \int_0^{\beta} D_f(\alpha) \, \text{sen} \alpha \, d\alpha}$$

$$= \frac{4 \cdot 4^2 \cdot j^2}{2 \cdot D^2} \cdot \frac{\left( \int \right)^2}{\int} \quad \left. \right\} \left( \frac{4j}{D} \right)^2 = \left( \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

$$\eta_{il} = 2 \, \text{ctg}^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) \frac{\left[ \int_0^{\beta} \sqrt{D_f(\alpha)} \, \text{tg} \frac{\alpha}{2} \, d\alpha \right]^2}{\int_0^{\beta} D_f(\alpha) \, \text{sen} \alpha \, d\alpha}$$

$$D_f(\alpha) = D_{f\text{max}} \cdot t_f(\alpha)$$

↑  
típico  
 $\cos^n \alpha$   
 $\cos^n \frac{\alpha}{2}$

En cuanto a la eficiencia de desbordamiento

$$\eta_s = \frac{W_a}{W_t} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\beta P(\alpha) d\Omega}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P(\alpha) d\Omega} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\beta D(\alpha) d\Omega}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi D_f(\alpha) d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\beta D_f(\alpha) d\Omega$$

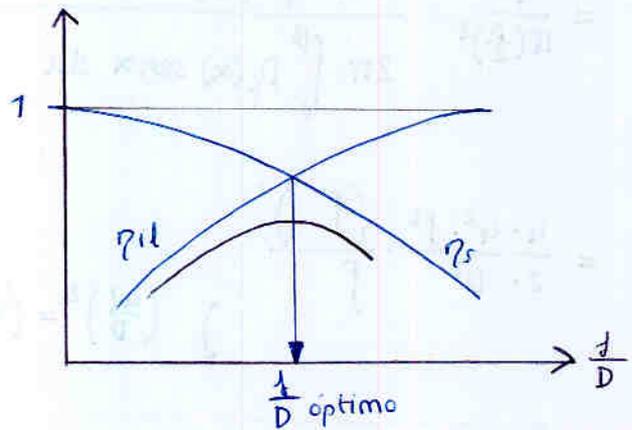
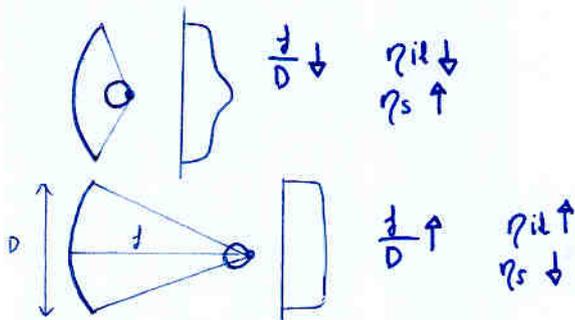
$$\eta_s = \frac{1}{2} \int_0^\beta D_f(\alpha) \sin\alpha d\alpha$$

La eficiencia total

$$\eta_t = \eta_{il} \cdot \eta_s = \cotg^2 \frac{\beta}{2} \left( \int_0^\beta \sqrt{D_f(\alpha)} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} d\alpha \right)^2$$

Relación foco a diámetro

Para un mismo alimentador:



Cuidado, a veces el eje x es  $\beta$  y entonces la gráfica es al revés



# Problema

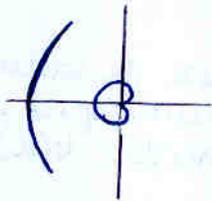
• Reflector Parabólico

$$\frac{f}{D} = 0.7$$

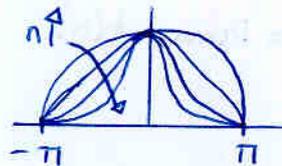
$$t_f(\alpha) = \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$f_0 = 10 \text{ GHz}$$

$$\vec{E}_{ap} = E(\rho) \cdot \hat{y}$$



Hay que determinar el alimentador



a) Hallar  $n$  para que el nivel en bordes  $T = -6 \text{ dB}$

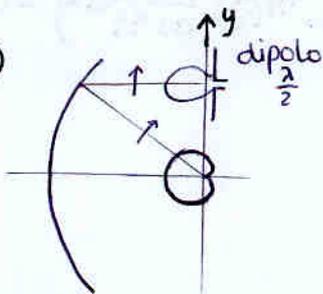
$$T = T_c + T_D = 40 \log\left(\cos\frac{\beta}{2}\right) + 10 \log \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -6 \text{ dB}$$

$$\frac{f}{D} = \frac{1}{4 \tan \beta/2} \rightarrow \beta = 39.3^\circ$$

ya que nos dan el diagrama de potencia

se obtiene  $n = 19$

b)



Hallar  $V_{ca}(y)$

La polarización coincide, por lo que lo que realmente nos interesa es el campo en la apertura

$$V_{ca}(y) = \frac{\lambda}{\pi} \cdot E_{ap}(y)$$

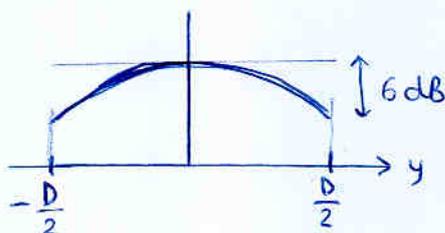
$$E_{ap} = \sqrt{\frac{\eta W_0 D_f(\alpha)}{4\pi R^2}} = \sqrt{\frac{\eta W_0 D_{fmax}}{4\pi}} \frac{\cos^{19}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{f} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{\eta W_0 D_{fmax}}{4\pi f^2}}}_{E_0} \cos^{23}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

y sabiendo que  $y = 2f \tan \frac{\alpha}{2}$

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \\ \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{2f}\right)^2}} \end{aligned} \right\}$$

$$E_{ap} = E_0 \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{y}{2f}\right)^2\right]^{\frac{23}{4}}}$$



c) Hallar la eficiencia de desbordamiento  $\eta_s$

$$\eta_s = \frac{1}{2} \int_0^\beta D_f(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha$$

$$D_f(\alpha) = D_{fmax} \cdot t(\alpha)$$

No olvidarse de calcular la  $D_{max}$ . Fallo típico substituir simplemente  $t(\alpha)$



$$D_{fmax} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^{19} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \, d\alpha \, d\phi} = \frac{2}{2 \int_0^\pi \cos^{19} \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \, d\alpha} = \frac{21}{2}$$

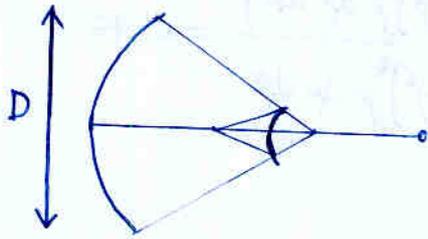
$\downarrow$   
 $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

$$\eta_s = \frac{1}{2} \int_0^\beta \frac{21}{2} \cos^{19} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \, d\alpha = 0.716$$

$$d) \eta_t = \cot^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left[ \int_0^\beta \sqrt{D_f(\alpha)} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \, d\alpha \right]^2 = \cot^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \left[ \int_0^\beta \cos^{19/2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \, d\alpha \right]^2 = 0.7$$

$$D_{ref} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \eta_t = 7566 \quad (38.8 \text{ dB})$$

# Problema



$$\frac{1}{D} = 1.5$$

$$D = 10 \text{ m}$$

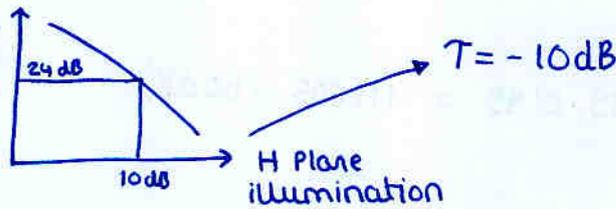
$$NLPS = 24 \text{ dB}$$

$$f_0 = 3.96 \text{ GHz}$$

plano H

a) Nivel en bordes en el plano H

Gráfica: Side Lobe Level para reflector



b) Diseñe la bocina cónica óptima necesaria  $s_{opt} = \frac{3}{8}$

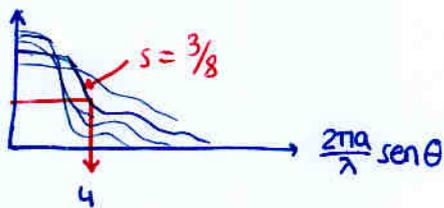
$$T = -10 = 40 \log \cos \frac{\beta}{2} + T_D$$

$$\frac{1}{D} = 1.5 = \frac{1}{4 \tan \frac{\beta}{2}} \rightarrow \beta = 19^\circ$$

$$T = -10 = -0.2 \text{ dB} + T_D$$

$$T_D \approx -10 \text{ dB}$$

Queremos que el diagrama de radiación en  $\beta$  caiga 10 dB

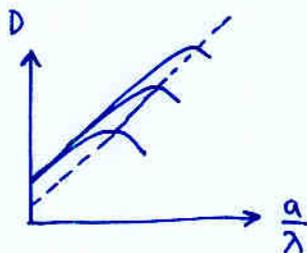


$$\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \beta = 4$$

$$\rightarrow a = 1.95 \lambda = 15 \text{ cm}$$

$$s = \frac{a^2}{2\lambda L} = \frac{3}{8}$$

$$\rightarrow L = 5\lambda = 38.5 \text{ cm}$$

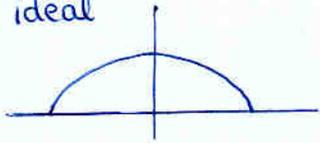


de la gráfica, con el L adecuado

$$D_{bocina} = 19 \text{ dB}$$

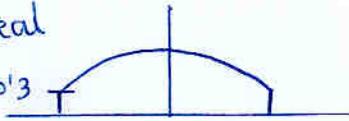
c) El campo en la apertura es del tipo  $E_{ap} = 1 - (\frac{\rho}{D/2})^2$

ideal



real

0'3



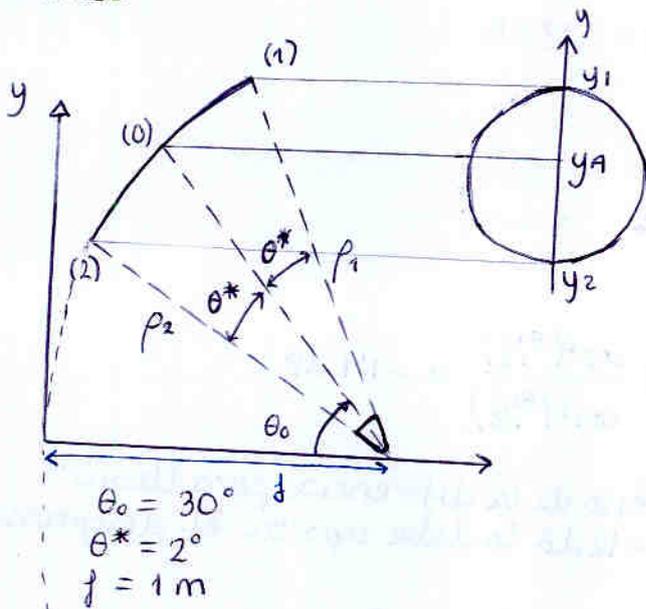
$$\eta_{il} = \frac{1}{\pi(\frac{D}{2})^2} \frac{\left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^D [1 - (\frac{\rho}{D/2})^2] \rho \, d\rho \, d\phi \right\}^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} [1 - (\frac{\rho}{D/2})^2]^2 \rho \, d\rho \, d\phi} = 0'75$$

d)

$$D_{rej} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 0'75 \cdot 0'95 = 118605 \text{ (50dB)}$$

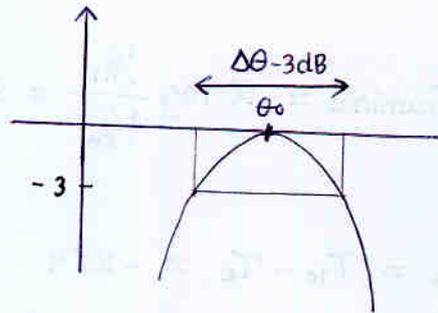
$$\eta_s = 0'95$$

# Problema



$\theta_0 = 30^\circ$   
 $\theta^* = 2^\circ$   
 $f = 1 \text{ m}$

usamos como bocina:



$$d(\theta) \text{ (dB)} = -12 \left( \frac{\theta - \theta_0}{\Delta\theta - 3\text{dB}} \right)^2$$

a)

$$y = 2f \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2f \tan \frac{\theta_0 + \theta^*}{2} = 0.93 \\ y_2 &= 2f \tan \frac{\theta_0 - \theta^*}{2} = 0.17 \end{aligned} \right\} D = 0.75 \text{ m}$$

NOTA: resulta que  $y_a$  no cae en el centro

$$y_a = \frac{y_1 + y_2}{2} = 0.5538 \text{ m}$$

$$y_0 = 2f \tan \frac{\theta_0}{2} = 0.536 \text{ m}$$

b)

El diagrama no causa desequilibrio entre 1 y 2

En este caso no son iguales los niveles en 1 y 2 debido a una diferencia de caminos

camino diagrama

~~$T_{12} = T_c + T_D$~~

~~$40 \log \cos \frac{\theta}{2}$~~

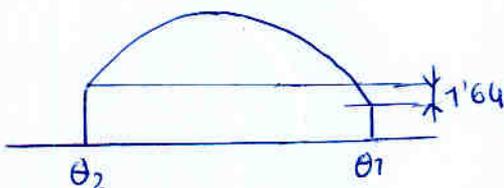
$$T_{12} = 10 \log \frac{1/R_1^2}{1/R_2^2} = 20 \log \frac{\cos^2 \frac{\theta_1}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_2}{2}} = -1.64 \text{ dB}$$

$$R = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\theta_2 = \theta_0 - \theta^*$$

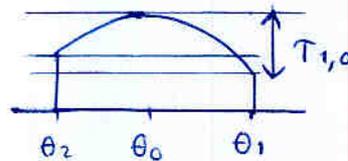
$$\theta_1 = \theta_0 + \theta^*$$

Diferencia de niveles entre los dos extremos, no entre el máx y un extremo



Diseñar la bocina óptima |  $T_{1,0} = -12 \text{ dB}$

$$T_{1,0} = T_{\text{caminos}} + T_{\text{diagrama}}$$

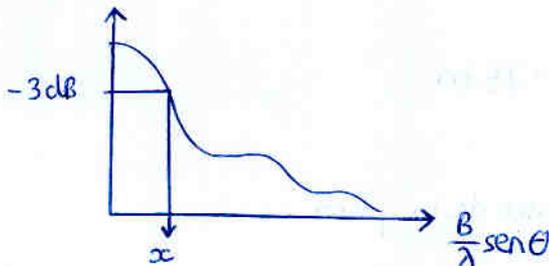


$$T_{\text{caminos}} = 10 \log \frac{1/R_1^2}{1/R_0^2} = 20 \log \frac{\cos^2(\theta_1/2)}{\cos^2(\theta_0/2)} = -1.1 \text{ dB}$$

$T_0 = T_{1,0} - T_c = -10.9$  El resto de la diferencia para llegar a  $-12 \text{ dB}$  lo debe aportar el diagrama

$$T_0 = -10.9 = -12 \left( \frac{\theta_1 - \theta_0}{\Delta\theta_{-3\text{dB}}} \right)^2 \rightarrow \Delta\theta_{-3\text{dB}} = 21^\circ$$

Diagrama Plano E



CUIDADO: ¿qué  $\theta$  ponemos?  $\rightarrow \frac{\Delta\theta_{-3\text{dB}}}{2}$

$$x = \frac{B}{\lambda} \text{sen} \left( \frac{\Delta\theta_{-3\text{dB}}}{2} \right)$$

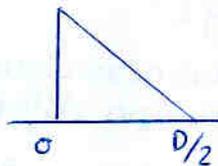
$$\rightarrow B = 2.6 \lambda$$

$$B = \sqrt{2\lambda L_E}$$

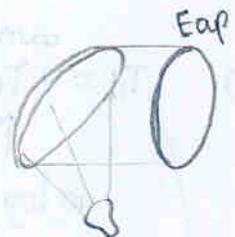
$$\rightarrow L_E = 3.5 \lambda$$

d)

$$E_{\text{ap}} = E_0 \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{D/2} \right) \right]$$



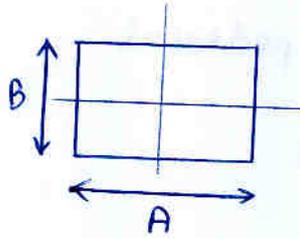
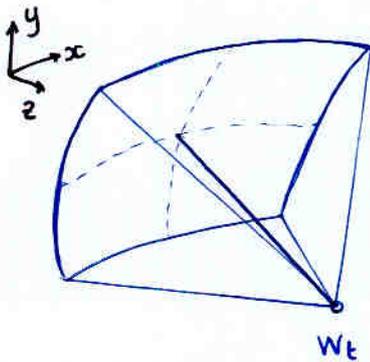
Te están dando el campo EN LA APERTURA



$$\eta_{il} = \frac{1}{\pi \left( \frac{D}{2} \right)^2} \frac{\left( \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} \left[ 1 - \frac{\rho}{D/2} \right] \rho \, d\rho \, d\phi \right)^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} \left[ 1 - \frac{\rho}{D/2} \right]^2 \rho \, d\rho \, d\phi} \stackrel{\rho/D/2 = x}{=} 2 \frac{\left( \int_0^1 (1-x)x \, dx \right)^2}{\int_0^1 (1-2x+x^2)x \, dx} = 0.66$$

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \text{Area} \cdot \eta_{il} = (36.2 \text{ dB})$$

Enero 2006



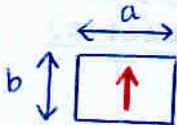
$$\frac{1}{D} = 0.75 \quad W_t = 1W$$

$$A = B$$

$$f = 5\lambda_0$$

$$f_0 = 10\text{GHz}$$

a) Diseñar bocina óptima /  $T = -6\text{dB}$  en pE y pH



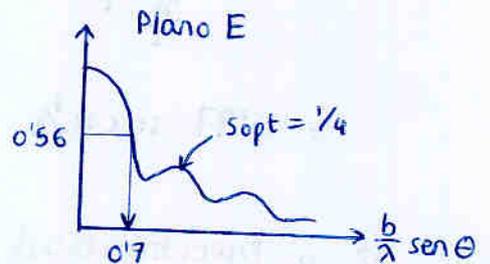
$$T = -6 = T_c + T_D \rightsquigarrow T_D = -5\text{dB}$$

$$T_c = 40 \log \cos \beta/2 = -1\text{dB}$$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{4 \tan(\beta/2)} \rightarrow \beta = 37^\circ$$

$$-5 = 20 \log x \rightarrow x = 0.56$$

$$0.7 = \frac{b}{\lambda} \sin \beta \rightarrow b = 1.17\lambda$$

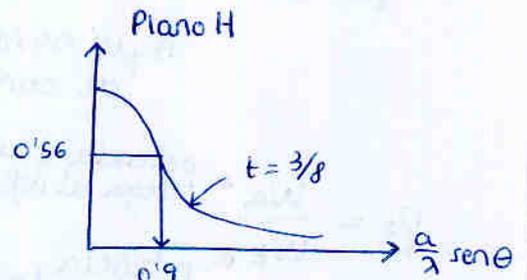


$$\frac{1}{4} = \frac{b^2}{8\lambda L_E} \rightarrow L_E = 0.77\lambda$$

$$0.9 = \frac{a}{\lambda} \sin \beta$$

$$\rightarrow a = 1.5\lambda$$

$$\frac{3}{8} = \frac{a^2}{8\lambda L_H} \rightarrow L_H = 0.75\lambda$$



b) Directividad bocina

$$D_{\text{boc}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab \underbrace{\eta_{lx} \cdot \eta_{ly}}_{\eta_{\text{optima}} = 50\%} = 11 \text{ (10.5 dB)}$$

$$\eta_{\text{optima}} = 50\%$$

c) Campo máximo sobre el reflector,  $E_0$

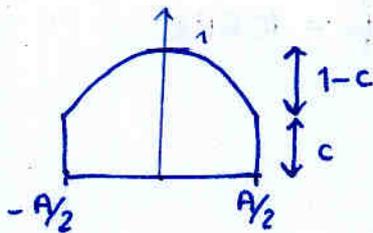
$$D_{\text{boc}} = \frac{E_0^2/2}{W_t/4\pi f^2} \rightarrow E_0 = 1.2 \text{ V/cm}$$

d)  $E_{ap}(x, y) = E_0 \cdot f(x) \cdot g(y)$

Distribución: coseno sobre pedestal

$\eta_{il}(c)$

$f(x) = c + (1-c) \cos\left(\frac{\pi}{A} x\right)$



$$\eta_{il_x} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\left( \int_{-A/2}^{A/2} [c + (1-c) \cos(\frac{\pi}{A} x)] dx \right)^2}{\int_{-A/2}^{A/2} [c + (1-c) \cos(\frac{\pi}{A} x)]^2 dx} = \frac{\left[ c + \frac{2}{\pi}(1-c) \right]^2}{c^2 + \frac{(1-c)^2}{2} + \frac{4c(1-c)}{\pi}}$$

= 0.97 si  $c = 1/2$

e)  $\eta_s$  y Directividad

Teníamos la fórmula  $\eta_s = \frac{1}{2} \int_0^\beta D_f(\alpha) \sin \alpha d\alpha$

Aquí no sirve; así que recurrimos al concepto.

$\eta_s = \frac{W_a}{W_t}$  ← potencia que llega al reflector  
 ← potencia entregada (transmitida por la bocina)

$W_a = \frac{1}{\eta} \iint |E_{ap}|^2 ds = (\dots) = 0.73$

$E_{ap} = E_0 \cdot f(x) \cdot g(y)$

$c + (1-c) \cos\left(\frac{\pi}{A} x\right)$

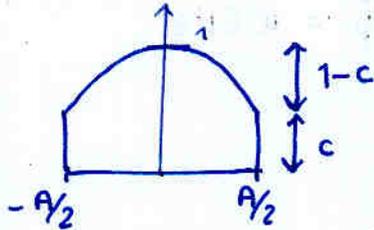
$c + (1-c) \cos\left(\frac{\pi}{B} y\right)$

d)  $E_{ap}(x, y) = E_0 \cdot f(x) \cdot g(y)$

Distribución: caseno sobre pedestal

$\eta_{il}(c)$

$f(x) = c + (1-c) \cos\left(\frac{\pi}{A} x\right)$



$$\eta_{il_x} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\left( \int_{-A/2}^{A/2} [c + (1-c) \cos(\frac{\pi}{A} x)] dx \right)^2}{\int_{-A/2}^{A/2} [c + (1-c) \cos(\frac{\pi}{A} x)]^2 dx} = \frac{\left[ c + \frac{2}{\pi}(1-c) \right]^2}{c^2 + \frac{(1-c)^2}{2} + \frac{4c(1-c)}{\pi}}$$

= 0.97 si  $c = 1/2$

e)  $\eta_s$  y Directividad

Teníamos la fórmula

$\eta_s = \frac{1}{2} \int_0^\beta D_f(\alpha) \sin \alpha d\alpha$

Aquí no sirve; así que recurrimos al concepto.

$\eta_s = \frac{W_a}{W_t}$  ← potencia que llega al reflector  
 ← potencia entregada (transmitida por la bocina)

$W_a = \frac{1}{\eta} \iint |E_{ap}|^2 ds = (\dots) = 0.73$

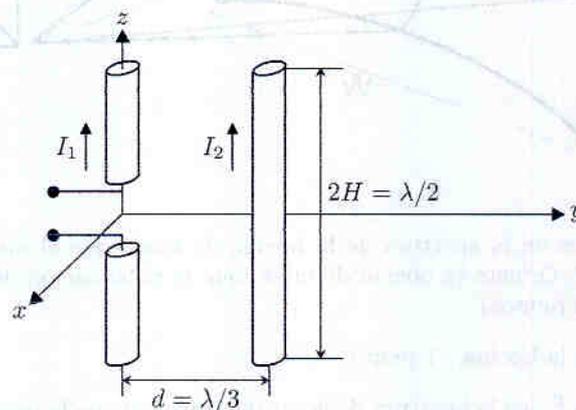
$E_{ap} = E_0 \cdot f(x) \cdot g(y)$

$c + (1-c) \cos\left(\frac{\pi}{A} x\right)$

$c + (1-c) \cos\left(\frac{\pi}{B} y\right)$

### Problema 1

La antena Yagi de la figura está formada por dos dipolos de semibrzzo  $H = \lambda/4$ . El dipolo 1 (activo) se alimenta con una corriente  $I_1$ , mientras que el dipolo 2 (parásito) está cortocircuitado, y por él circula una corriente  $I_2$ . Ambos dipolos están orientados de forma que son paralelos entre sí y paralelos al eje  $z$ . El dipolo 1 está situado en el origen de coordenadas, y el dipolo 2 está separado una distancia  $d = \lambda/3$  a lo largo del eje  $y$ , tal y como se muestra en la figura.



La autoimpedancia de ambos dipolos es  $z_{11} = z_{22} = 73 + j43 \Omega$ , mientras que la impedancia mútua es

$$z_{21} = 21,5 - j36,5 \Omega = -j \frac{z_{11}}{2}$$

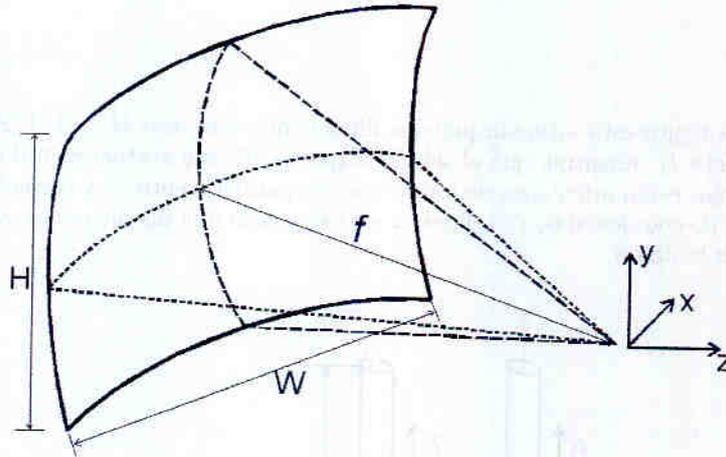
Para la antena Yagi, obtenga:

- La relación entre las corrientes de alimentación de los dos dipolos:  $I_2/I_1$  (2 puntos)
- La impedancia de entrada (2 puntos)
- Campo eléctrico radiado (2 puntos)
- La relación delante/atrás (2 puntos)
- La directividad máxima (2 puntos)

## Problema 2

La figura representa un reflector parabólico cuya apertura equivalente es un rectángulo de dimensiones  $H \times W$ . La relación  $f/D$  es 1 en ambos planos principales y se alimenta con una bocina piramidal situada en el foco del paraboloide. La bocina se supone lo suficientemente larga para despreciar el error de fase en su apertura.

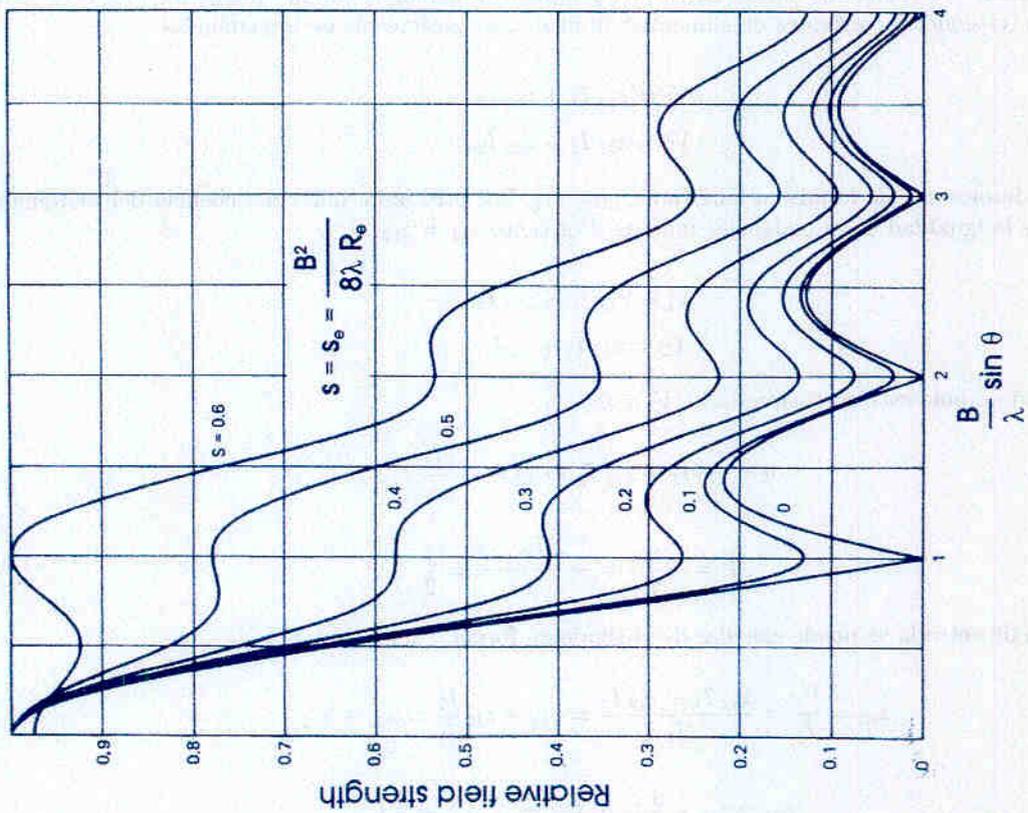
La frecuencia de trabajo es  $f_0=10$  GHz. La distancia focal es  $f = 5\lambda_0$ .



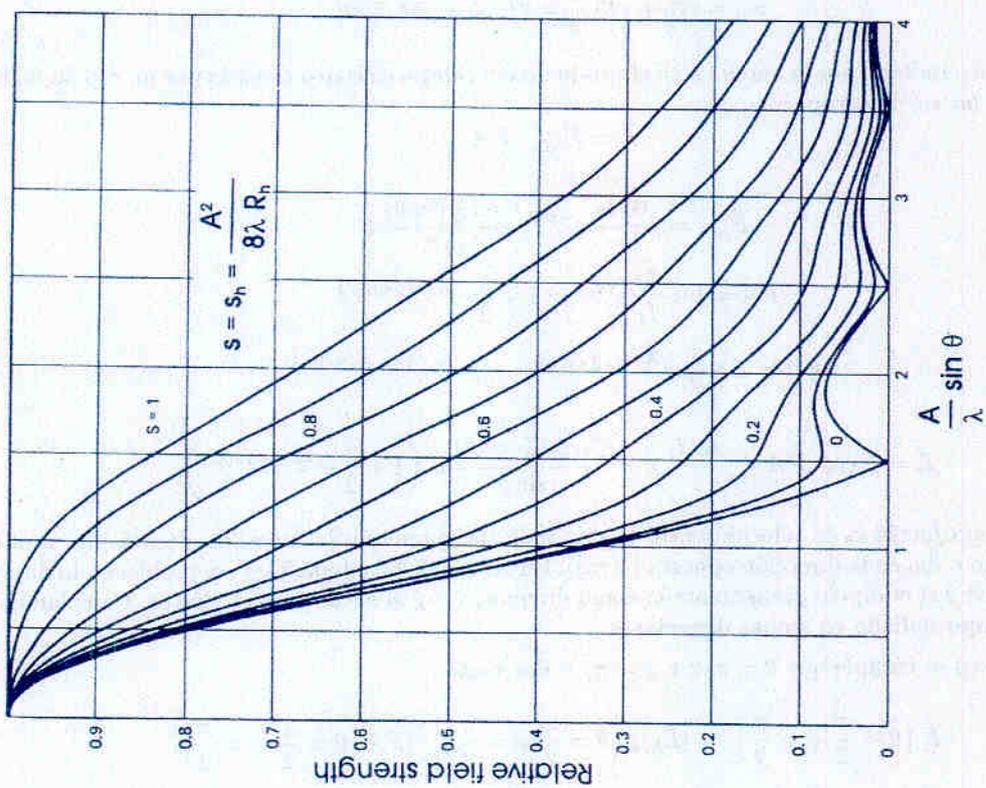
- Determine las dimensiones de la apertura de la bocina de modo que el nivel en bordes en ambos planos principales sea de -10 dB. Oriente la bocina de modo que la polarización de la misma sea  $\hat{y}$ . **Describa** el procedimiento seguido. (3 puntos)
- Calcule la directividad de la bocina. (1 punto)
- Calcule el campo máximo  $E_0$  en la apertura de la bocina sabiendo que la potencia total aplicada a la bocina es  $W_{in}=1$  W y que la eficiencia de radiación es del 95%. (2 puntos)

La bocina produce un bloqueo en la apertura del reflector al interceptar parte de la onda plana reflejada en él. Dicha intercepción da lugar por otra parte a un aumento del coeficiente de reflexión de la bocina respecto al que tendría funcionando en espacio libre. Se trata de estimar dicho coeficiente de reflexión. Para ello suponga en primera aproximación que el coeficiente de reflexión de la bocina en espacio libre es nulo.

- Calcule la densidad de potencia incidente en el centro del reflector, supuesto en campo lejano de la bocina. (2 puntos)
- Estime la porción de potencia reflejada por el reflector que es interceptada por la bocina y el coeficiente de reflexión de ésta, definido como  $\Gamma = W_{ref}/W_{rad}$  (2 puntos)



(b) Diagramas normalizados Plano E



(a) Diagramas normalizados Plano H

## Solución al Problema 1

- a) La relación entre las corrientes de alimentación de los dipolos la podemos obtener planteando las ecuaciones que relacionan tensiones y corrientes de alimentación mediante parámetros de impedancias:

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2$$

$$V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2$$

Como los dos dipolos son de la misma longitud,  $z_{22} = z_{11}$ . Por otro lado, una consecuencia del teorema de reciprocidad es la igualdad de impedancias mutuas. Por tanto  $z_{21} = z_{12}$ .

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2$$

$$V_2 = z_{12} I_1 + z_{11} I_2$$

Como el segundo dipolo está cortocircuitado,  $V_2 = 0$ :

$$0 = z_{12} I_1 + z_{11} I_2 \rightarrow I_2 = -\frac{z_{12}}{z_{11}} I_1$$

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{z_{12}}{z_{11}} = -\frac{-jz_{11}/2}{z_{11}} = \frac{j}{2}$$

- b) La impedancia de entrada se puede calcular de la siguiente forma:

$$z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{z_{11} I_1 + z_{12} I_2}{I_1} = z_{11} + z_{12} \frac{I_2}{I_1} = z_{11} + z_{12} \frac{j}{2}$$

$$z_{in} = z_{11} + \frac{j}{2} (-j \frac{z_{11}}{2}) = z_{11} \left( 1 + \frac{1}{4} \right)$$

$$z_{in} = (73 + j43) \frac{5}{4} = 91,25 + j53,75 \Omega$$

- c) El campo eléctrico radiado por la antena será el producto del campo eléctrico radiado por un dipolo de brazo  $H = \lambda/4$  por el factor de agrupación:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\lambda/4} \cdot FA$$

donde:

$$\vec{E}_{\lambda/4} = j \frac{60 I_1}{r} e^{-jkr} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\theta}$$

$$FA = 1 + \frac{I_2}{I_1} e^{jk_y d} = 1 + \frac{j}{2} e^{jk \sin \theta \sin \phi \frac{\lambda}{3}}$$

$$FA = 1 + \frac{j}{2} e^{j \frac{2\pi}{3} \sin \theta \sin \phi \frac{\lambda}{3}} = 1 + \frac{j}{2} e^{j \frac{2\pi}{3} \sin \theta \sin \phi}$$

Finalmente:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\lambda/4} \cdot FA = j \frac{60 I_1}{r} e^{-jkr} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\theta} \left( 1 + \frac{j}{2} e^{j \frac{2\pi}{3} \sin \theta \sin \phi} \right)$$

- d) La relación delante/atrás es la relación entre lo que radia la antena en la dirección de máxima radiación (delante) y lo que radia en la dirección opuesta (atrás). En el caso de la antena Yagi del problema, la dirección de máxima será  $+\hat{y}$  si el dipolo parásito actúa como director, y  $-\hat{y}$  si actúa como reflector. Calcularemos la amplitud de campo radiado en ambas direcciones.

En la dirección  $+\hat{y}$  se cumple que  $\theta = \pi/2$  y  $\phi = \pi/2$ . Por tanto:

$$\left| \vec{E} \left( \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2} \right) \right| = \left| \vec{E}_{\lambda/4} \left( \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2} \right) \right| \cdot \left| FA \left( \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2} \right) \right|$$

donde:

$$\left| \vec{E}_{\lambda/4} \left( \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2} \right) \right| = \frac{60 I_1}{r}$$

## Solución al Problema 2

- a) La caída de 10 dB en bordes del reflector, se debe a dos contribuciones: La atenuación por propagación y la directividad de la bocina. Dado que la relación  $f/D$  es 1, el ángulo con el que se ve el borde del reflector,  $\beta$ , es  $28,64^\circ$  y se obtiene mediante

$$\frac{f}{D} = \frac{1}{4 \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

y en consecuencia la caída en el borde por propagación es

$$\tau_c = 40 \log \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = -0,5 \text{ dB}$$

Así pues la directividad de la bocina debe ser tal que a  $\beta$  grados de la dirección *broadside* el nivel esté 9.5 dB por debajo del máximo ( $\tau_d = -9,5$  dB).

Para obtener las dimensiones de la bocina que garantizan ese nivel en bordes, contamos con las gráficas universales plano E y plano H. De todas ellas seleccionamos las correspondientes a una bocina con error de fase despreciable. Es decir,  $t = s_h = 0$  y  $s = s_e = 0$ .

El nivel de -9.5 dB necesario, en escala lineal corresponde a un campo relativo al máximo de 0.33 en el eje vertical de las gráficas.

Esto se traduce en un valor de  $\frac{B}{\lambda} \sin \beta = 0,75$  para el plano E, y  $\frac{A}{\lambda} \sin \beta = 1$  para el plano H.

Despejando  $A$  y  $B$  en función de la longitud de onda,  $A = 2\lambda$  y  $B = 1,56\lambda$ . Por su parte, las longitudes  $L_E$  y  $L_H$ , que no se pedían en el problema, se elegirían de forma que garanticen un error de fase despreciable.

- b) La bocina presenta una distribución coseno en horizontal y uniforme en vertical, sin error de fase, por lo que  $\eta_x = 0,81$  y  $\eta_y = 1$ .

La directividad es  $D_{bocina} = \frac{4\pi}{\lambda^2} AB \eta_{il} = 31$ , (15 dB).

- c) La potencia total radiada por la bocina se calcula mediante

$$W_{rad} = \frac{1}{\eta} \iint_S |E_{ap}(x, y)|^2 dx dy = \frac{1}{\eta} \iint_S \left| E_0 \cos\left(\frac{\pi}{A} x\right) \right|^2 dx dy = \frac{E_0^2}{\eta} \frac{AB}{2}$$

Además  $W_{rad} = 0,95 W_{in} = 0,95$  W. Por todo ello,

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 W_{rad} \eta}{AB}} = 5,05 \text{ V/cm}$$

- d) La densidad de potencia incidente en el centro del reflector la podemos calcular sabiendo que

$$D_{bocina} = \frac{\mathcal{P}_i}{W_{rad}/4\pi r^2}$$

y particularizando para  $r = f$ .

$$\mathcal{P}_i = \frac{D_{bocina} W_{rad}}{4\pi f^2} = \frac{31 \cdot 0,95}{4\pi 15^2} = 0,01 \text{ W/cm}^2$$

- e) Tras incidir sobre el reflector, la onda esférica se convierte en plana en las proximidades del reflector, dicha onda plana reflejada es interceptada por la bocina y entregada al alimentador.

Podemos calcular la potencia reflejada que es captada por la bocina y entregada al alimentador como el producto de la densidad de potencia incidente en la boca de la bocina por el área efectiva de la bocina. Con este cálculo estamos asumiendo que la densidad de potencia apenas varía en los alrededores del centro del reflector y que la onda reflejada es plana y por tanto la potencia incidente en una porción de dimensiones  $A \times B$  en el centro del reflector, se propaga sin atenuarse hasta la boca del alimentador. Así pues

$$W_{ref} = \mathcal{P}_i A_{ef} = \mathcal{P}_i AB \eta_{il} = 0,23 \text{ W}$$

$$\Gamma = \frac{0,23}{0,95} = 0,24 \text{ } (-6,2 \text{ dB})$$

$$|FA(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2})| = \left| 1 + \frac{j}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} \right| = \left| 1 + \frac{j}{2} \left( \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) \right|$$

$$|FA(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2})| = \left| 1 + \frac{j}{2} \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right| = \left| 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{4} \right|$$

$$|FA(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2})| = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = 0,62$$

$$|\vec{E}(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2})| = 0,62 \frac{60 I_1}{r}$$

En la dirección  $-\hat{y}$  se cumple que  $\theta = \pi/2$  y  $\phi = 3\pi/2$ :

$$|\vec{E}_{\lambda/4}(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{3\pi}{2})| = \frac{60 I_1}{r}$$

$$|FA(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{3\pi}{2})| = \left| 1 + \frac{j}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right| = \left| 1 + \frac{j}{2} \left( \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) \right|$$

$$|FA(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{3\pi}{2})| = \left| 1 + \frac{j}{2} \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right| = \left| 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{4} \right|$$

$$|FA(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{3\pi}{2})| = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = 1,46$$

$$|\vec{E}(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{3\pi}{2})| = 1,46 \frac{60 I_1}{r}$$

Por tanto el dipolo parásito actúa como reflector, y la dirección de máxima radiación es  $-\hat{y}$ . La relación delante/atrás será:

$$\frac{D}{A} = \frac{1,46 \frac{60 I_1}{r}}{0,62 \frac{60 I_1}{r}} = \frac{1,46}{0,62} = 2,35 = 7,44 \text{ dB}$$

e) La directividad la calcularemos de la siguiente forma:

$$D = \frac{|\vec{E}|_{max}^2 4\pi r^2}{\eta W_r}$$

donde:

$$|\vec{E}|_{max} = 1,46 \frac{60 I_1}{r}$$

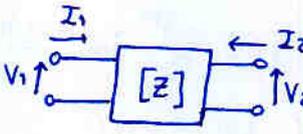
$$W_r = \text{Re}\{Z_{in}\} I_1^2 = 91,25 I_1^2$$

Sustituyendo:

$$D = \frac{1,46^2 \cdot 60^2 \cdot I_1^2 \cdot 4\pi r^2}{r^2 \cdot 120\pi \cdot 91,25 \cdot I_1^2} = \frac{1,46^2 \cdot 60^2 \cdot 4}{120 \cdot 91,25} = 2,8 = 4,47 \text{ dB}$$

Examen Abril 2006  
Problema 1

a) sabiendo  $\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$



$V_2 = 0$

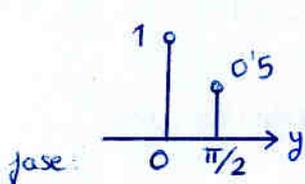
$$0 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \rightarrow \frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = -\frac{-jZ_{22}/2}{Z_{22}} = +j0'5$$

b)  $Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1}$

$$= (73 + j43) + (21'5 - j36'5) \cdot (j0'5)$$

$$Z_{in} = 91'25 + 53'75j \ \Omega$$

c) Estamos ante un array de la forma:



$$\frac{I_1}{I_1} = 1 \text{ (normalizar a un extremo)}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = j0'5 = 0'5 \angle \frac{\pi}{2}$$

$$FA(\psi) = 1 + 0'5e^{j\psi} \quad \text{siendo } \psi = \psi_y = kd \sin \theta \sin \phi + \alpha$$

$$\alpha = \pi/2$$

hay que saber 'jugar' con las exponenciales para sacar una expresión de  $|FA(\psi)|$

$$FA(\psi) = 1 + 0'5e^{i\psi}$$

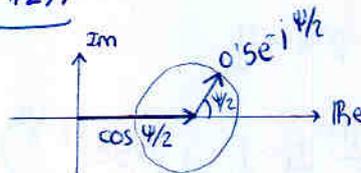
$$= e^{+i\psi/2} \cdot (e^{i\psi/2} + 0'5e^{i\psi/2})$$

$$= e^{+i\psi/2} \cdot (0'5e^{i\psi/2} + 0'5e^{-i\psi/2} + 0'5e^{i\psi/2})$$

$$= e^{+i\psi/2} \cdot (0'5e^{i\psi/2} + \cos(\psi/2))$$

No puedo llegar a cosenos?

No puedo



No hace falta llegar a  $|FA(\psi)|$ , podemos dejarlo como

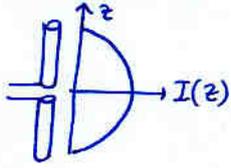
$$FA(\psi) = 1 + 0'5e^{i\psi} = 1 + 0'5e^{j(kd \sin \theta \sin \phi + \pi/2)}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad d = \lambda/3$$

$$= 1 + 0'5e^{i \frac{2\pi}{3} \sin \theta \sin \phi} \cdot e^{i\pi/2}$$

$$FA(\psi) = 1 + j0'5e^{i \frac{2\pi}{3} \sin \theta \sin \phi}$$

En cuanto al dipolo en  $\lambda/2$



$$\vec{E}_{\frac{\lambda}{2}} = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \frac{\cos k_z H - \cos kH}{\sin \theta} \hat{\theta}$$

Ecuación general para un dipolo

$$\begin{cases} k_z = k \cos \theta \\ = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \\ k_z H = \frac{\pi}{2} \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ kH = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \\ \cos kH = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

se obtiene

$$\vec{E}_{\frac{\lambda}{2}} = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\theta}$$

Por tanto el campo total radiado

$$\vec{E} = \vec{E}_{\frac{\lambda}{2}} \cdot FA(\psi)$$

$$\vec{E}(\theta, \phi) = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_1 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \cdot (1 + j0.5e^{i\frac{2\pi}{3} \sin \theta \sin \phi}) \hat{\theta}$$

- d) Suponiendo que la Yagi se comporta como toca, el dipolo parásito será director o reflector, siendo el apuntamiento  $+\hat{y}$  ó  $-\hat{y}$

$$+\hat{y} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{E} = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_1 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2})}{\sin \frac{\pi}{2}} \cdot (1 + j0.5e^{i\frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}})$$

$$\underbrace{j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_1}_{\text{parte del dipolo}} \quad \underbrace{(1 + j0.5e^{i\frac{2\pi}{3}})}_{= \frac{4-\sqrt{3}}{4} - j\frac{1}{4}}$$



la parte del dipolo es máxima en todo  $\theta = \pi/2$

$$|FA(\theta = \pi/2, \phi = \pi/2)| = 0.6197$$

$$-\hat{y} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\vec{E} = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_1 \cdot (1 + j0.5e^{-i\frac{2\pi}{3}})$$

$$= \frac{4+\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}j$$

$$|FA(\theta = \pi/2, \phi = -\pi/2)| = 1.455$$

La relación delante-atrás:  $20 \log \frac{|E(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = -\frac{\pi}{2})|}{|E(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2})|} = 20 \log \frac{|FA|}{|FA|} = 20 \log \frac{1.455}{0.6197} = 7.41 \text{ dB}$

e) Directividad máxima

$$D_{\max} = \frac{P_{\max}}{W_{\text{rad}}/4\pi r^2} \quad \text{siendo } P_{\max} = \frac{|E_{\max}|^2}{\eta} = \frac{|E_0|^2 |F A|_{\max}^2}{\eta}$$

$$= \frac{\left(\frac{60 I_1}{r}\right)^2 \cdot (1.455)^2}{120\pi} = 20.216 \frac{I_1^2}{r^2}$$

y siendo  $W_{\text{rad}} = I_1^2 \cdot R_{\text{in}} = I_1^2 \cdot \text{Re}(Z_{\text{in}}) = I_1^2 \cdot 91.25$

↑  
Re(Z), no |Z|

$$D_{\max} = \frac{4\pi r^2 \cdot 20.216 \frac{I_1^2}{r^2}}{I_1^2 \cdot 91.25} = 2.784$$

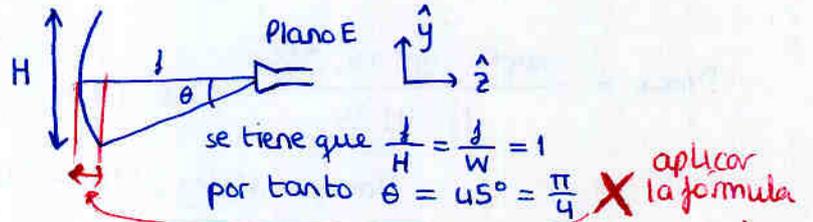
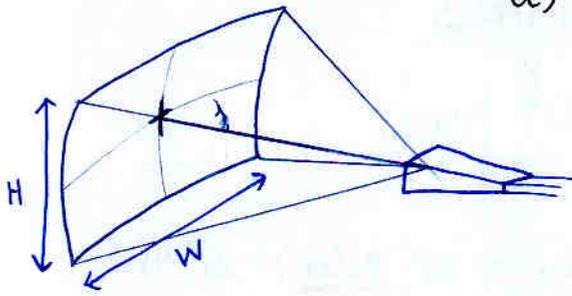
X  $D_{\max} = 10 \log 2.784 = 4.45 \text{ dB}$

# Problema 2

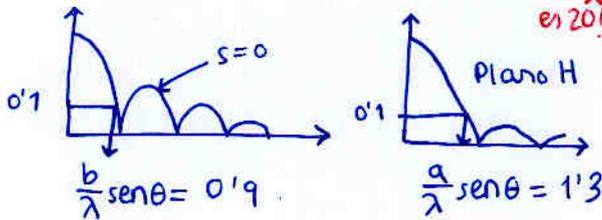
a) Despreciamos el error de fase en la bocina por ser suficientemente larga, lo que esto quiere decir es que  $\Delta\phi_{E\max} = 2\pi s = 0$   
 $\Delta\phi_{H\max} = 2\pi t = 0$

$s = 0$   
 $t = 0$

El nivel en bordes en ambos planos principales debe ser -10 dB



Mirando las gráficas universales del módulo relativo del campo para  $s = t = 0$



$-10\text{dB} \rightarrow 10^{-10/20} = 0.1$   
 $\frac{b}{\lambda} \sin\theta = \frac{b}{\lambda} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}b}{2\lambda} = 0.9 \rightarrow b = \frac{1.8\lambda}{\sqrt{2}}$   
 $\frac{a}{\lambda} \sin\theta = \frac{a}{\lambda} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}a}{2\lambda} = 1.3 \rightarrow a = \frac{2.6\lambda}{\sqrt{2}}$   
 siendo  $\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{10 \cdot 10^9} = 0.03$

He supuesto que el nivel en bordes se debe únicamente al diagrama de la bocina, pero también hay una diferencia de caminos

$b = 0.0382\text{ m}$   
 $a = 0.0552\text{ m}$

$\uparrow = \tau_{\text{DIAGRAMA}} + \tau_{\text{CAMINOS}}$   
 $\uparrow$   
 $-10\text{dB}$   
 $\uparrow 40 \log \cos(\beta/2)$   
 $= -0.527$

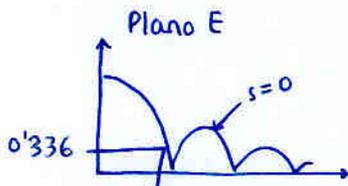
donde  $\beta = \pi/4$  para ambos planos

$\frac{1}{D} = \frac{1}{4 \text{tg}(\beta/2)} = 1$   
 $\text{tg}(\beta/2) = \frac{1}{4}$   
 $\beta = 2 \cdot \arctg(1/4)$   
 $= 0.490 \text{ rad}$

$\tau_{\text{DIAGRAMA}} = -9.47 \text{ dB}$

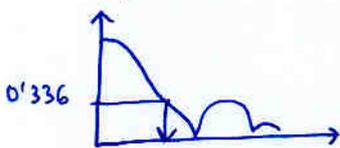
Ahora sí  $10^{-\frac{9.47}{10}} = 0.113$

$10^{-\frac{9.47}{20}} = 0.336$



$\frac{b}{\lambda} \sin\theta = 0.075 \Rightarrow b = \frac{0.075\lambda}{\sin\theta} = \frac{0.075\lambda}{\sin 0.49} = 0.048 \text{ m}$

Plano H



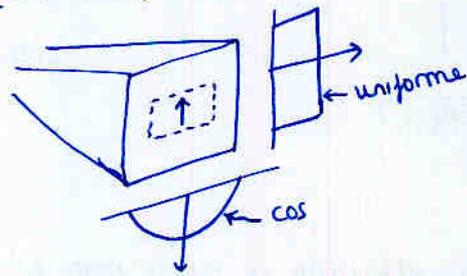
$\frac{a}{\lambda} \sin\theta = 1 \Rightarrow a = \frac{\lambda}{\sin\theta} = \frac{0.03}{\sin 0.49} = 0.064 \text{ m}$

b) la directividad de una bocina

$$D_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab \eta_{ilx} \eta_{ily}$$

sólo en este caso que el error de fase es nulo podemos decir

$$\eta_{ilx} = \frac{8}{\pi^2} \quad \eta_{ily} = 1$$



$$D_{max} = \frac{4\pi}{0.032^2} \cdot 0.064 \cdot 0.048$$

$$= 42.89 \rightarrow 16.32 \text{ dB}$$

c)

$$D_{bocina} = \frac{P(\alpha)}{W_{rad}/4\pi r^2} \rightarrow P(\alpha) = \frac{D_f(\alpha) \cdot W_{rad}}{4\pi r^2}$$

$$P(\alpha) = \frac{|E(\alpha)|^2}{\eta} \quad \left. \vphantom{P(\alpha)} \right\} |E_{ap}(\alpha)| = \frac{\sqrt{W_{rad} \cdot \eta}}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{\sqrt{D_f(\alpha)}}{r}$$

$$E_0 = \frac{\sqrt{W_{rad} \cdot \eta}}{\sqrt{4\pi}} = \sqrt{\frac{W_{ent} \cdot \eta_{rad} \cdot \eta}{4\pi}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 0.95 \cdot 120\pi}{4\pi}} = 5.34 \text{ V/m}$$

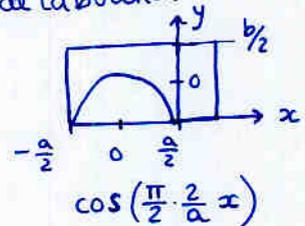
Eso sería válido en campo lejano, <sup>ej: en el paraboloide</sup> pero lo piden en la propia apertura: <sub>de la bocina</sub>

$$W_{rad} = \frac{1}{\eta} \iint_S |E_{ap}|^2 ds$$

suponemos

$$E_{ap} = E_0 \cdot f(x) \cdot g(y)$$

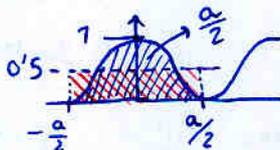
$$= E_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot 1$$



$$= \frac{|E_0|^2}{\eta} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dy dx$$

$$= \frac{|E_0|^2}{\eta} \cdot b \cdot \frac{a}{2}$$

integral del coseno cuadrado



y ademas

$$W_{rad} = W_{ent} \cdot \eta_{rad}$$

por tanto

$$W_{ent} \cdot \eta_{rad} = \frac{|E_0|^2 ab}{2\eta} \rightarrow |E_0|^2 = \frac{2\eta \cdot W_{ent} \cdot \eta_{rad}}{ab}$$

$$|E_0| = \sqrt{\frac{2 \cdot 120\pi \cdot 1 \cdot 0.95}{0.048 \cdot 0.064}} = 4.83 \text{ V/m}$$

$$= 4.83 \text{ V/cm}$$

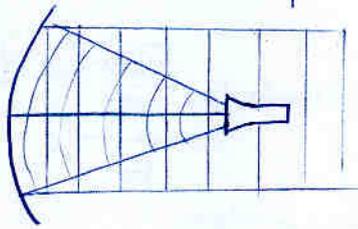
d) Densidad de potencia incidente en el centro del reflector

$$P_i(\theta=0) = \frac{D_f(\theta=0) \cdot W_{\text{rad}}}{4\pi r^2} = \frac{42'89 \cdot 0'95}{4\pi \cdot f^2} = 144 \text{ W/m} = 0'0144 \text{ W/cm}^2$$

$$D = \frac{P}{W_{\text{rad}}/4\pi r^2}$$

siendo  $f = 5\lambda$   
 $= 5 \cdot 0'03$

e) Tras reflejarse se tiene una onda plana que no se atenúa con la distancia, por tanto, la potencia incidente reflejada hasta la bobina será la misma que la incidente en el reflector calculada en d)



si suponemos la densidad de potencia constante en toda la boca de la apertura (es un área pequeña) se tiene

$$W_{\text{ref}} = a \cdot b \cdot P_i(\theta=0) \quad \times$$

$$= 0'064 \times 0'048 \cdot 144 \text{ W/m}$$

$$\text{Area} = 3'072 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad \times$$

Hay que usar el AREA EFECTIVA, y no el área a secas

$$W_{\text{rec}} = A_{\text{ef}} \cdot P_i$$

$$= a \cdot b \cdot \eta_{\text{il}} \cdot P_i$$

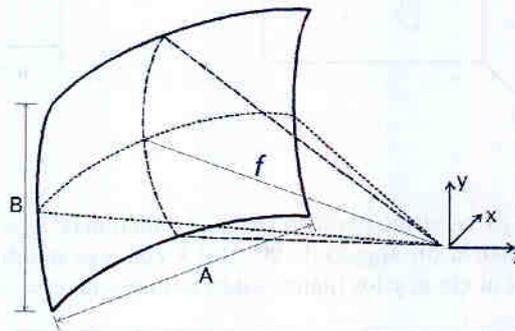
$$= 3'072 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot 144 \text{ W/m}$$

$$= 0'36 \text{ W}$$

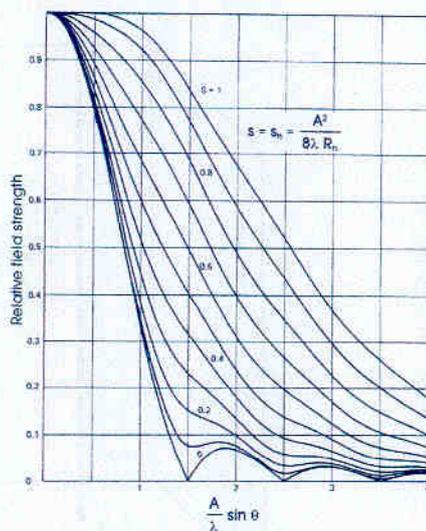
$$\Gamma = \frac{W_{\text{rec}}}{W_{\text{rad}}} = \frac{0'36}{0'95} = 0'379$$

### Problema 1

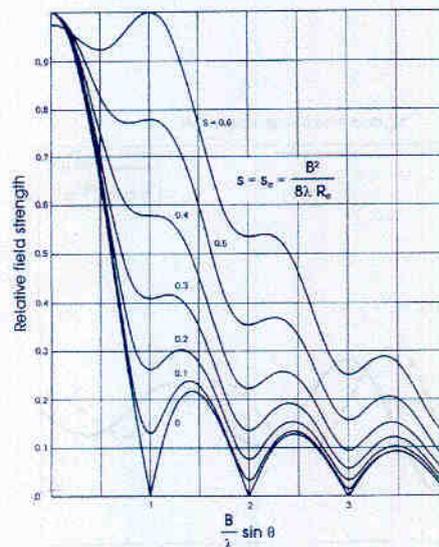
La figura representa un reflector parabólico cuya apertura equivalente es un rectángulo de dimensiones  $A \times B$ . La relación  $f/D$  es 0.75 en ambos planos principales y se alimenta con una bocina piramidal situada en el foco del paraboloide. La frecuencia de trabajo es  $f_0=10$  GHz. La distancia focal es  $f = 5\lambda_0$ . La potencia entregada al alimentador es 1 vatio.



- Diseñe una bocina piramidal óptima, de modo que el nivel en bordes en ambos planos principales sea de -6 dB. Oriente la bocina de modo que la polarización de la misma sea  $\hat{y}$ . **Describe** el procedimiento seguido. (2 puntos)
- Calcule la directividad de la bocina. (1 punto)
- Calcule el valor numérico del campo máximo incidente sobre el reflector.  $E_{00}$ . (2 puntos)
- Aproxime el campo en la apertura como una función separable,  $E_0 f(x)g(y)$ , de tipo coseno sobre pedestal en ambos planos principales. Calcule la eficiencia de iluminación de la apertura del reflector en función del valor del pedestal,  $C$ . Particularice luego para el caso de este problema. (2 puntos)
- Determine la eficiencia de desbordamiento y la directividad del reflector. (3 puntos)

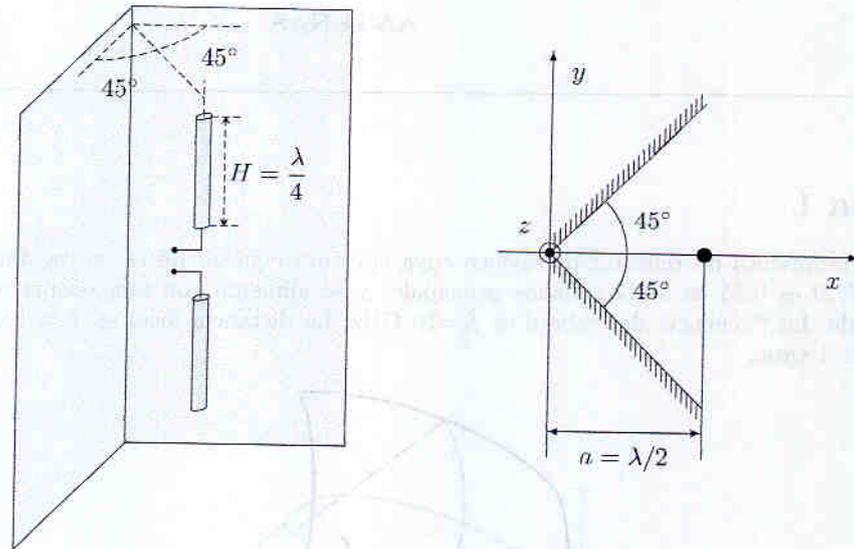


(a) Diagramas normalizados Plano H



(b) Diagramas normalizados Plano E

## Problema 2

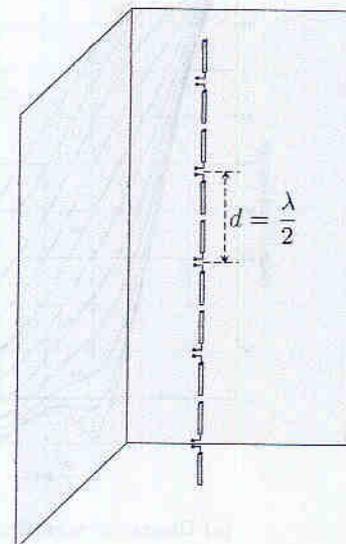
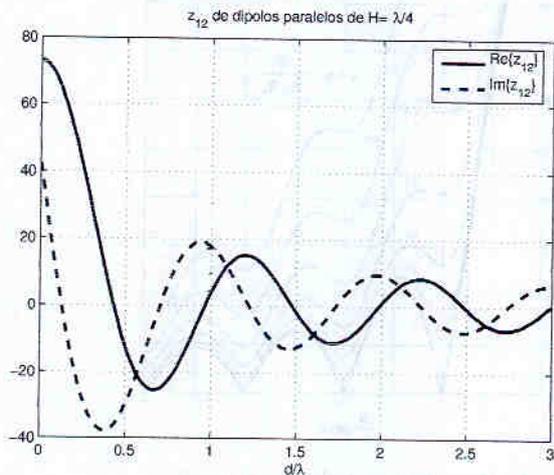


Un dipolo de semibraso  $H = \lambda/4$  se sitúa paralelo, y a una distancia  $a = \lambda/2$ , de un diedro de dos planos conductores perfectos que forman entre sí un ángulo de  $90^\circ$ , tal y como se muestra en la figura, y que se extienden hasta el infinito. El dipolo es paralelo al eje  $z$ , y los planos están situados en  $\phi = \pm 45^\circ$ . Para el dipolo frente al diedro conductor:

- Dibuje los diagramas plano E y plano H (2 puntos).
- Calcule la impedancia de entrada. Para ello utilice la gráfica de la impedancia mutua que se adjunta (2 puntos).
- Calcule la directividad máxima (2 puntos).

Ahora en lugar de un sólo dipolo se coloca una agrupación lineal uniforme broadside de 5 dipolos  $H = \lambda/4$  separados una distancia  $d = \lambda/2$  entre sí, tal y como se muestra en la figura. Considere que los dipolos están desacoplados entre sí y que la impedancia de entrada de cada uno de ellos es la calculada en el apartado b). Para la agrupación de dipolos frente al diedro:

- Dibuje los diagramas plano E y plano H (2 puntos).
- Calcule la directividad máxima (2 puntos).



## Solución al Problema 2

- a) Para analizar el dipolo frente al reflector aplicaremos la teoría de imágenes. En la siguiente figura se muestran los tres dipolos imagen que aparecen, su posición y el valor de la corriente que circula por ellos.

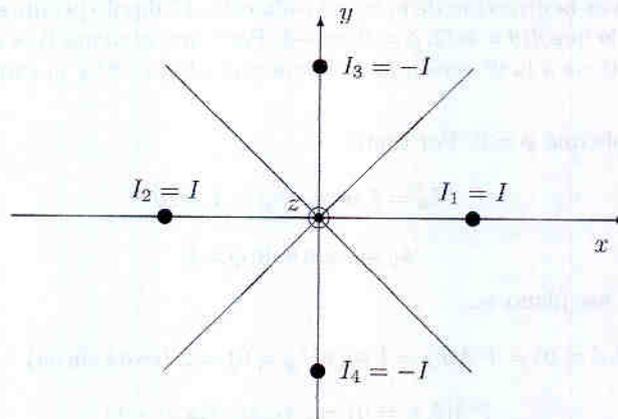


Figura 1:

El vector de radiación total será la superposición del vector de radiación de los cuatro dipolos:

$$\vec{N} = \vec{N}_{\lambda/4} e^{jk_x a} + \vec{N}_{\lambda/4} e^{-jk_x a} - \vec{N}_{\lambda/4} e^{jk_y a} - \vec{N}_{\lambda/4} e^{-jk_y a}$$

$$\vec{N} = 2 \vec{N}_{\lambda/4} (\cos(k_x a) - \cos(k_y a))$$

$$\vec{N} = \vec{N}_{\lambda/4} \cdot FA$$

donde  $\vec{N}_{\lambda/4}$  es el vector de radiación de un dipolo de semibrázo  $H = \lambda/4$  situado en el origen de coordenadas y paralelo al eje z:

$$\vec{N}_{\lambda/4} = \frac{\lambda}{\pi} I_m \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \hat{z}$$

Por tanto el vector de radiación total es el de un dipolo aislado por un factor de agrupación. Y el campo eléctrico radiado será el campo radiado por el dipolo  $H = \lambda/4$  por ese factor de agrupación:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\lambda/4} \cdot FA$$

$$\vec{E} = j \frac{60 I_m}{r} e^{-jkr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \hat{\theta} \cdot 2 (\cos(k_x a) - \cos(k_y a))$$

Para representar el diagrama de radiación en el plano E debemos en primer lugar determinar cuál es ese plano (formado por la dirección de máxima radiación y la polarización del campo eléctrico en esa dirección).

El campo radiado por el dipolo aislado ( $\vec{E}_{\lambda/4}$ ) es máximo en cualquier dirección del plano XY. El factor de agrupación será máximo cuando:

$$|\cos(k_x a) - \cos(k_y a)| = 2$$

$$|\cos(k \sin \theta \cos \phi a) - \cos(k \sin \theta \sin \phi a)| = 2$$

$$\left| \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cos \phi \frac{\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \frac{\lambda}{2}\right) \right| = 2$$

$$|\cos(\pi \sin \theta \cos \phi) - \cos(\pi \sin \theta \sin \phi)| = 2$$

La ecuación anterior se cumple cuando los argumentos de los cosenos son uno 0 y el otro  $\pi$ . Y eso sucede cuando  $\sin \theta = 1$  y  $\cos \phi$  y  $\sin \phi$  valen el uno 0 y el otro 1. Es decir, se cumple para los siguientes valores de  $\theta$  y  $\phi$ :

$\theta$	$\phi$	Dirección
$\pi/2$	0	$+\hat{x}$
$\pi/2$	$\pi/2$	$+\hat{y}$
$\pi/2$	$\pi$	$-\hat{x}$
$\pi/2$	$3\pi/2$	$-\hat{y}$

No obstante, hemos de recordar que hemos aplicado teoría de imágenes y que en el problema original existen dos planos metálicos que se extienden hasta el infinito en  $\phi = \pm\pi/4$ . Al aplicar teoría de imágenes los planos desaparecen, pero el campo radiado que obtenemos tan sólo es válido en  $\phi \in [-\pi/4, \pi/4]$ . Por tanto el único máximo válido es el de  $+\hat{x}$ . Así que en la dirección  $+\hat{x}$  tanto el diagrama del dipolo aislado como de la agrupación son máximos, y por tanto esa es la dirección de máxima radiación. El dipolo produce un campo eléctrico polarizado según  $\hat{\theta}$ , y en el eje  $\hat{x}$  se cumple que  $\hat{\theta}(\theta = \pi/2, \phi = 0) = -\hat{z}$ . Por tanto el plano E es el plano XZ. Y el plano H es el plano XY, que es el que contiene a la dirección de máxima radiación ( $+\hat{x}$ ) y al campo magnético en esa dirección ( $\hat{\phi}(\theta = \pi/2, \phi = 0) = \hat{y}$ ).

En el plano E (XZ) se cumple que  $\phi = 0$ . Por tanto:

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi = k \sin \theta$$

$$k_y = k \sin \theta \sin \phi = 0$$

Y el factor de agrupación en ese plano es:

$$FA(\theta, \phi = 0) = FA(k_x = k \sin \theta, k_y = 0) = 2 (\cos(k \sin \theta a) - \cos(0))$$

$$FA(\theta, \phi = 0) = 2 (\cos(\pi \sin \theta) - 1)$$

Para dibujar ese diagrama recurriremos al método gráfico. Si llamamos  $u = \pi \sin \theta$ , debemos representar la función  $f(u) = |2 (\cos(u) - 1)|$ . Como  $\sin \theta$  puede variar entre -1 y 1,  $u$  variará entre  $-\pi$  y  $\pi$ . En la figura 2 se ha utilizado el método gráfico para calcular el diagrama de la agrupación en el plano XZ.

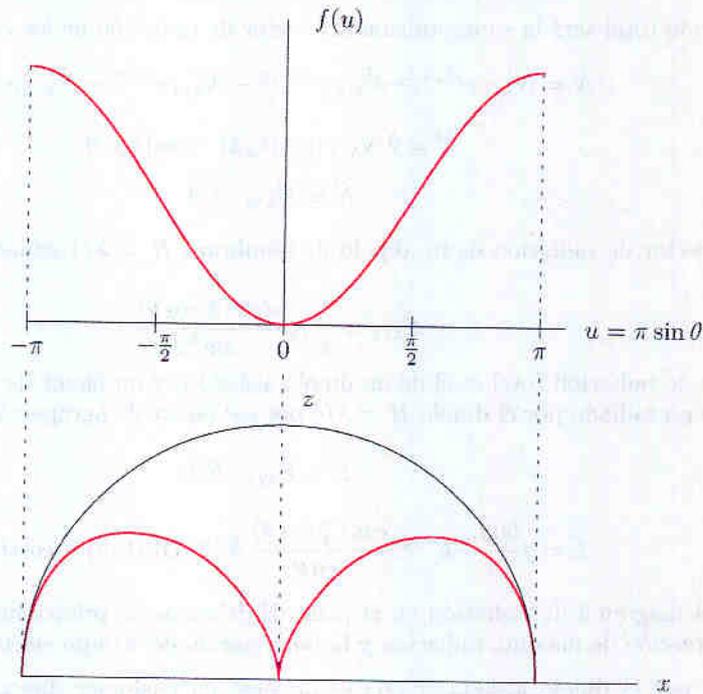


Figura 2: Determinación del diagrama de radiación de la agrupación en el plano XZ mediante el método gráfico

Ya estamos en condiciones de representar los diagramas de radiación del dipolo aislado (parecido al del dipolo elemental, pero un poco más directivo), de la agrupación (el calculado en la figura 2), y del dipolo frente al diedro (el producto de los dos diagramas), en el plano E. En la tabla 1 se muestran dichos diagramas. Obsérvese que se ha anulado la parte del diagrama en el semiplano  $z < 0$  porque en ese semiplano están los planos conductores y en su interior el campo es nulo.

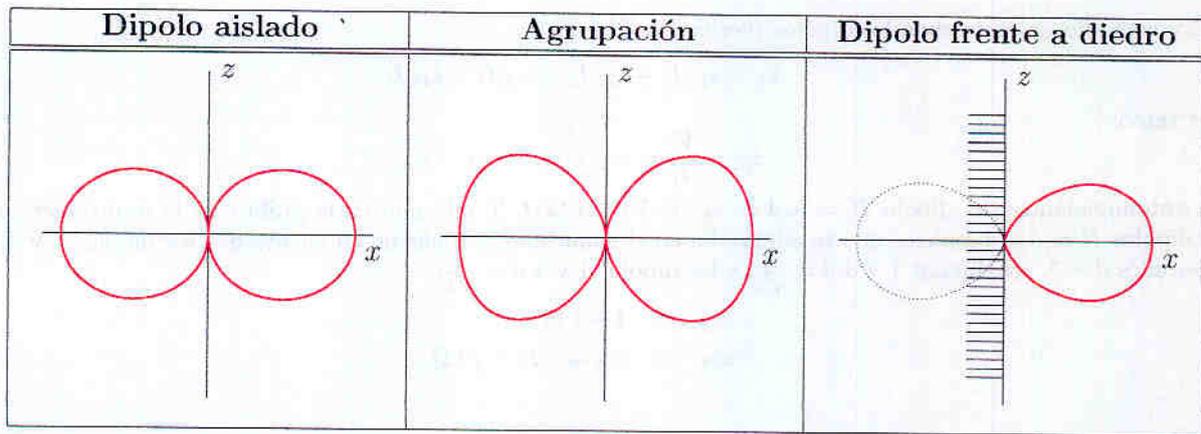


Tabla 1: Diagramas en el plano E (XZ)

Ahora representaremos el diagrama del dipolo frente al diedro en el plano H (plano XY). El diagrama de radiación del dipolo aislado es omnidireccional en ese plano. El factor de agrupación particularizado en el plano XY ( $\theta = \pi/2$ ) es:

$$FA(\theta = \pi/2, \phi) = FA(k_x = k \cos \phi, k_y = k \sin \phi) = 2(\cos(k \cos \phi a) - \cos(k \sin \phi a))$$

$$FA(\theta = \pi/2, \phi) = f(\phi) = 2(\cos(\pi \cos \phi) - \cos(\pi \sin \phi))$$

Para representar este diagrama podemos buscar los nulos y los máximos. Para encontrar los nulos igualamos el diagrama a cero y despejamos la posición de los nulos ( $\phi_c$ ):

$$f(\phi) = 2(\cos(\pi \cos \phi_c) - \cos(\pi \sin \phi_c)) = 0$$

$$\cos(\pi \cos \phi_c) = \cos(\pi \sin \phi_c)$$

$$\pi \cos \phi_c = \pm \pi \sin \phi_c$$

$$\tan \phi_c = \pm 1 \rightarrow \phi_c = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}$$

Los máximos del diagrama ya los hemos obtenido con anterioridad y han resultado estar en las direcciones  $\pm \hat{x}$  y  $\pm \hat{y}$ . Por tanto ya podemos dibujar también el diagrama de la agrupación en el plano H. El dibujo se muestra en la tabla 2, junto con el diagrama del dipolo aislado y el diagrama total. De nuevo se observa que en el diagrama total se ha anulado la parte del diagrama que queda dentro de los planos conductores.

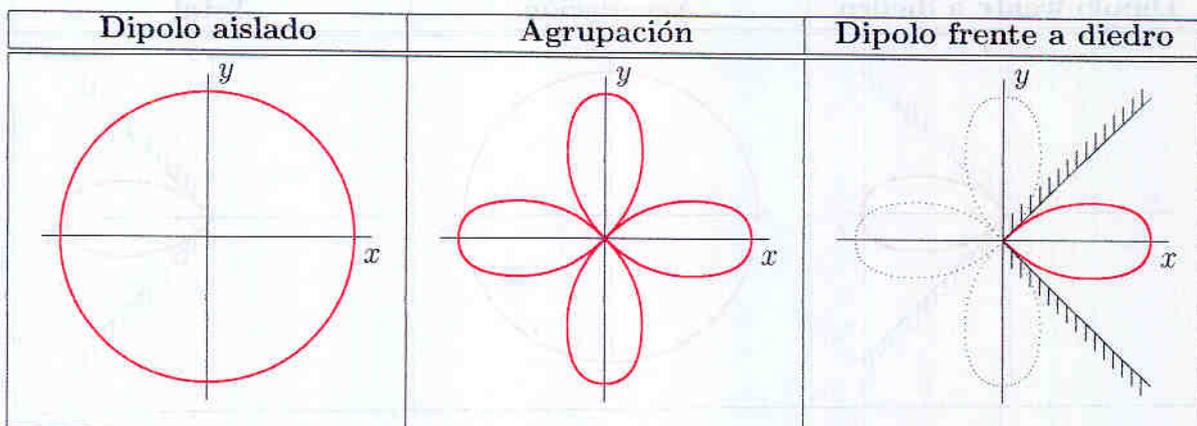


Tabla 2: Diagramas en el plano H (XY)

- b) Para cálculos de impedancia hemos de tener en cuenta la influencia mutua entre el dipolo original y los tres dipolos más que aparecieron al aplicar la teoría de imágenes. Como en total hay 4 dipolos, la tensión en el primer dipolo será:

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 + z_{13} I_3 + z_{14} I_4$$

Tal y como hemos numerado los dipolos (ver figura 1):

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_1 - z_{13} I_1 - z_{14} I_1$$

Por tanto:

$$z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} + z_{12} - z_{13} - z_{14}$$

La autoimpedancia del dipolo  $H = \lambda/4$  es  $z_{11} = 73 + j43 \Omega$ . Y mirando en la gráfica de la impedancia mutua de dipolos  $H = \lambda/4$  paralelos que se adjuntaba en el enunciado, y teniendo en cuenta que los dipolos 1 y 2 están separados  $d = \lambda$ , los dipolos 1 y 3  $d = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ , y los dipolos 1 y 4  $d = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ :

$$z_{12} = 4 + j18 \Omega$$

$$z_{13} = z_{14} = -25 + j1 \Omega$$

Por tanto:

$$z_{in} = 73 + j43 + 4 + j18 - 2 * (-25 - j1) = 127 + j59 \Omega$$

c) La directividad se puede calcular de la siguiente manera:

$$D = \frac{\frac{|\vec{E}|_{max}^2}{\eta}}{\frac{W_r}{4\pi r^2}} = \frac{|\vec{E}|_{max}^2 4\pi r^2}{\eta W_r}$$

El campo radiado máximo es el campo radiado en la dirección  $\hat{x}$ . Y ese campo será el radiado por el dipolo  $H = \lambda/4$  aislado por el factor de agrupación:

$$|\vec{E}|_{max} = |\vec{E}|(\theta = \pi/2, \phi = 0) = |\vec{E}|_{\lambda/4}(\theta = \pi/2, \phi = 0) \cdot FA(\theta = \pi/2, \phi = 0)$$

$$|\vec{E}|_{max} = \frac{60 I_m}{r} 4$$

Y la potencia radiada por la antena es la radiada por el dipolo (los dipolos imagen no cuentan):

$$W_r = \Re\{z_{in}\} I^2(0) = 127 I_m^2$$

Finalmente:

$$D = \frac{|\vec{E}|_{max}^2 4\pi r^2}{\eta W_r} = \frac{\left(\frac{60 I_m}{r} 4\right)^2 4\pi r^2}{120\pi 127 I_m^2} = 15,11 = 11,8 \text{ dB}$$

d) Si en lugar de tener un único dipolo frente al diedro tenemos una agrupación de 5 dipolos, los diagramas serán los mismos de antes pero multiplicados por el factor de agrupación de una agrupación lineal uniforme a lo largo del eje  $z$  con  $\alpha = 0$  y  $d = \lambda/2$ . Por tanto se trata de una agrupación broadside cuyo diagrama será omnidireccional en el plano perpendicular al eje de la agrupación (plano  $XY$ ). De modo que el diagrama plano H será el mismo que para un único dipolo frente al diedro (ver tabla 3).

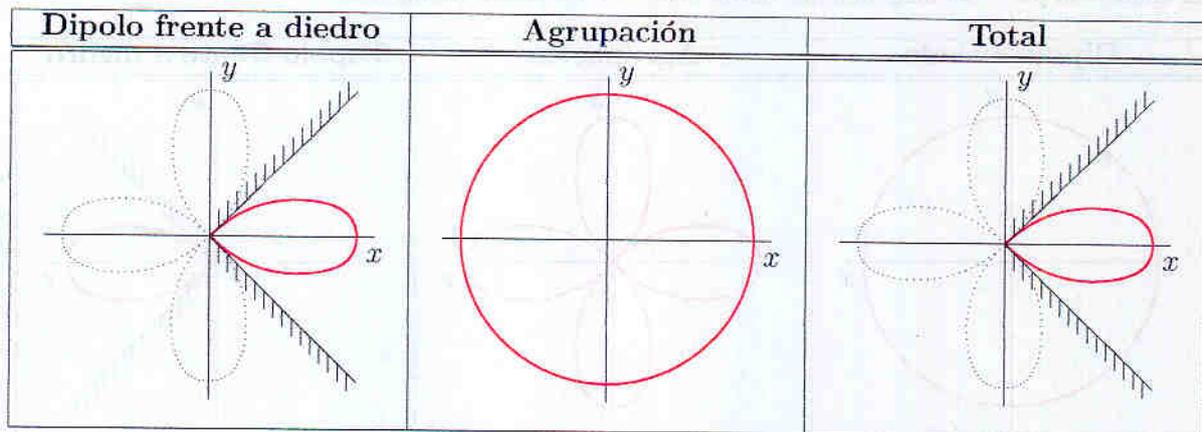


Tabla 3: Diagramas en el plano H (XY)

En el plano E el diagrama será el obtenido en el apartado a) para un único dipolo frente al diedro multiplicado por el factor de agrupación. Como  $\alpha = 0$  y  $d = \lambda/2$ , el margen visible es  $\Psi_z \in [-\pi, \pi]$ . Por otro lado en una agrupación uniforme de 5 antenas en el factor de agrupación hay 4 ceros simples entre 0 y  $2\pi$  en las posiciones  $2\pi/5$ ,  $4\pi/5$ ,  $6\pi/5$  y  $8\pi/5$  (ver figura 3). Utilizando el método gráfico se puede obtener el diagrama de radiación de la agrupación en un plano que contenga al eje  $z$  (ver figura 3).

Finalmente en la tabla 4 se muestra el diagrama de radiación en el plano E.

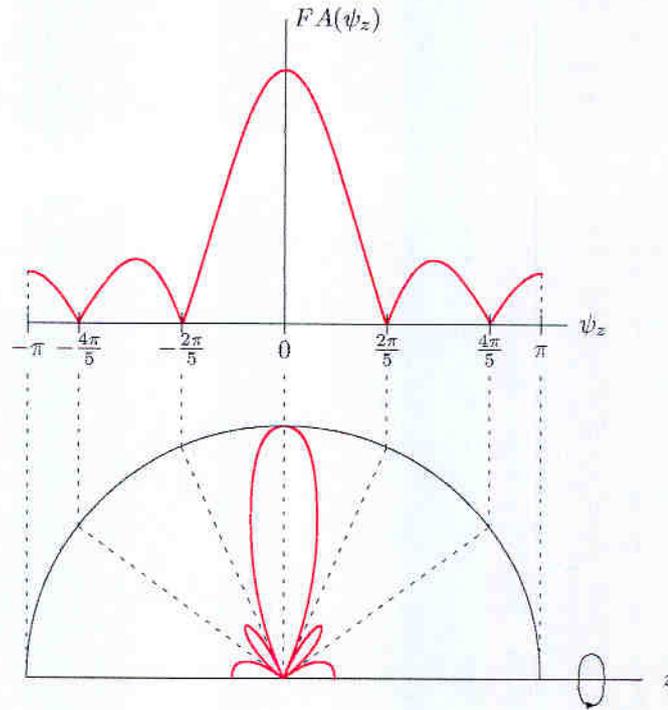


Figura 3: Determinación del diagrama de radiación de la agrupación en el eje  $z$  mediante el método gráfico

Dipolo frente a diedro	Agrupación	Total

Tabla 4: Diagramas en el plano E (XZ)

e) Para calcular la directividad seguiremos el mismo procedimiento que en el apartado c):

$$D = \frac{|\vec{E}|_{max}^2 4\pi r^2}{\eta W_r}$$

En este caso el campo radiado máximo es el mismo que en el apartado c) pero multiplicado por el factor de agrupación. Como la agrupación es uniforme broadside, en la dirección perpendicular al eje  $z$  el diagrama de la agrupación es máximo e igual al número de antenas. Por tanto:

$$|\vec{E}|_{max} = |\vec{E}|(\theta = \pi/2, \phi = 0) = |\vec{E}|_{\lambda/4}(\theta = \pi/2, \phi = 0) \cdot FA_1(\theta = \pi/2, \phi = 0) \cdot FA_2(\theta = \pi/2, \phi = 0)$$

$$|\vec{E}|_{max} = \frac{60 I_m}{r} \cdot 4 \cdot 5$$

Y la potencia radiada es la radiada por los cinco dipolos (los dipolos imagen no cuentan):

$$W_r = 5 \Re\{z_{in}\} I^2(0) = 5 \cdot 127 I_m^2$$

Finalmente:

$$D = \frac{|\vec{E}|_{max}^2 4\pi r^2}{\eta W_r} = \frac{\left(\frac{60 I_m}{r} \cdot 4 \cdot 5\right)^2 4\pi r^2}{120\pi \cdot 5 \cdot 127 I_m^2} = 75,55 = 18,8 \text{ dB}$$



Figure 1. Diagrams illustrating the concept of a normal distribution curve.

Figure 1	Figure 2	Figure 3

Figure 2. Diagrams illustrating the concept of a normal distribution curve.

Figure 3. Diagram illustrating the concept of a normal distribution curve.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

The normal distribution is a continuous probability distribution that is symmetric and bell-shaped. It is characterized by its mean, standard deviation, and variance. The normal distribution is widely used in statistics and probability theory.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

The normal distribution is a continuous probability distribution that is symmetric and bell-shaped. It is characterized by its mean, standard deviation, and variance. The normal distribution is widely used in statistics and probability theory.

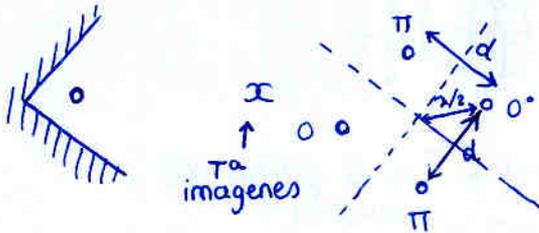
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

The normal distribution is a continuous probability distribution that is symmetric and bell-shaped. It is characterized by its mean, standard deviation, and variance. The normal distribution is widely used in statistics and probability theory.

Problema 2. Enero 2006

a)



$$h = \lambda/2$$

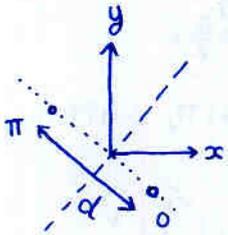
$$d = 2 \cdot h \cos \pi/4$$

$$= \sqrt{2}h = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda$$

Es un array de arrays de dipolos resonantes

$$\vec{E} = \vec{E}_{\lambda/2} \cdot FA_1(\psi_1) \cdot FA_2(\psi_2)$$

$$\vec{E}_{\lambda/2} = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\theta}$$



$$FA_1(\psi_1) = 1 + e^{j\psi_1}$$

$$= e^{j\frac{\psi_1}{2}} [e^{-j\frac{\psi_1}{2}} + e^{j\frac{\psi_1}{2}}]$$

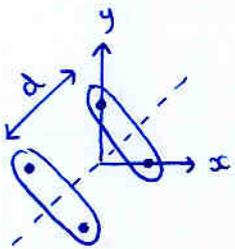
$$= e^{j\frac{\psi_1}{2}} \cdot 2 \cos(\frac{\psi_1}{2})$$

siendo  $\psi_1 = \vec{k} \cdot \vec{r}_d + \alpha$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \hat{r} \cdot d \left( \frac{\hat{y} - \hat{x}}{\sqrt{2}} \right) + \pi$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} [\hat{r} \cdot (\hat{y} - \hat{x})] + \pi$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{\sqrt{2}} [\sin \theta \sin \phi - \sin \theta \cos \phi] + \pi$$



$$FA_2(\psi_2) = 1 + e^{j\psi_2}$$

$$= e^{j\frac{\psi_2}{2}} \cdot 2 \cos(\frac{\psi_2}{2})$$

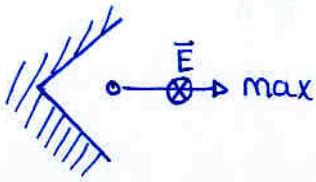
siendo  $\psi_2 = \vec{k} \cdot \vec{r}_d + \alpha$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} [\hat{r} \cdot (\hat{y} + \hat{x})] + \pi$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{\sqrt{2}} [\sin \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi] + \pi$$

Plano E:

Sabiendo que un dipolo con el diedro



Por tanto el plano  $\vec{E}$  es el plano XZ  
 $\phi = 0 \begin{cases} \cos \phi = 1 \\ \sin \phi = 0 \end{cases}$

$$FA_1(\psi_1) = e^{i\frac{\psi_1}{2}} \cdot 2 \cos\left(\frac{\psi_1}{2}\right)$$

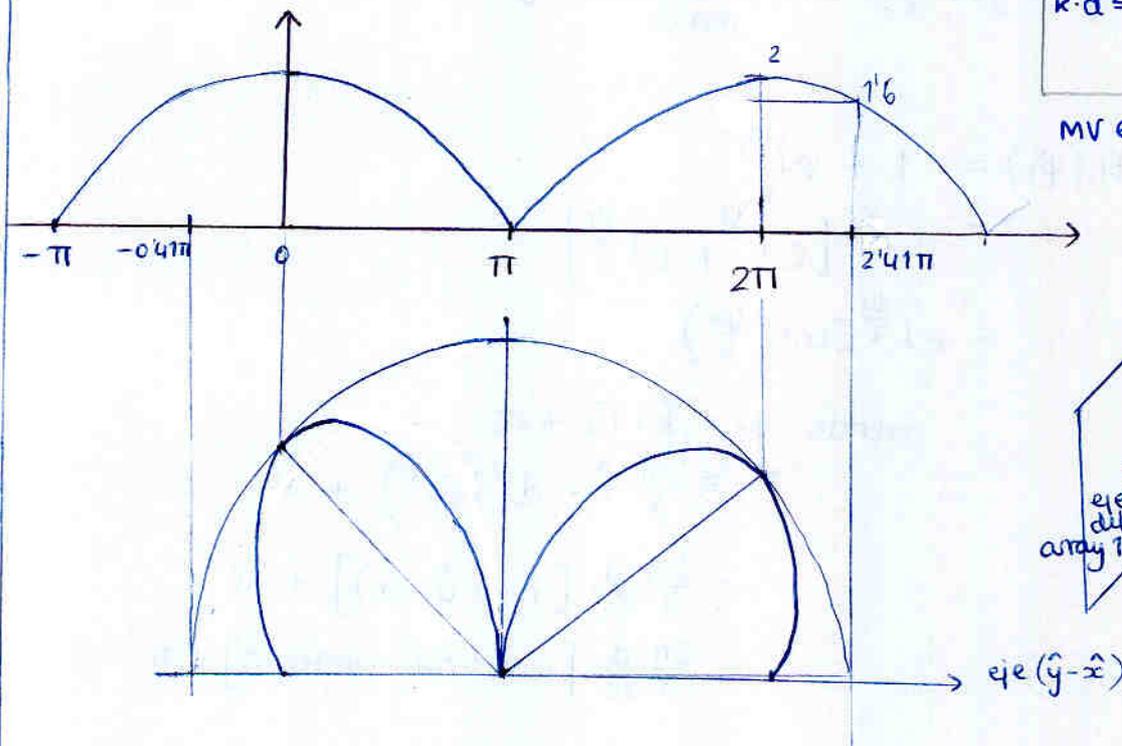
$$|FA(\psi_1)| = \left| 2 \cos\left(\frac{\psi_1}{2}\right) \right|$$

$$M.V. \in [-kd + \alpha, kd + \alpha]$$

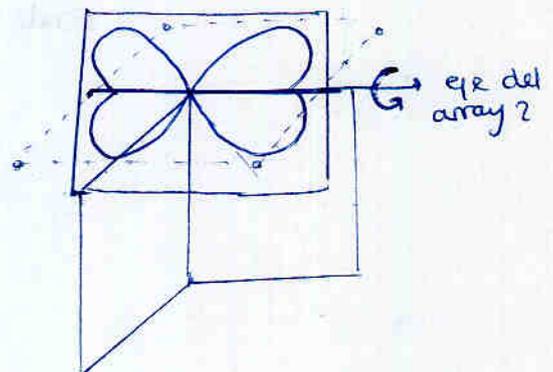
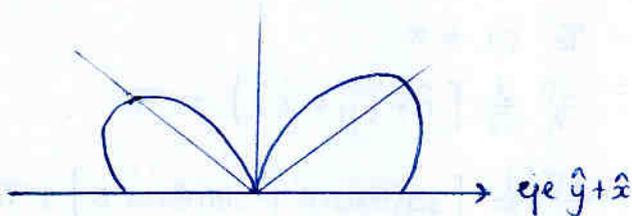
$$k \cdot d = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d = \sqrt{2}\pi = 1.41\pi$$

$$d = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda$$

$$M.V. \in [-0.41\pi, 2.41\pi]$$

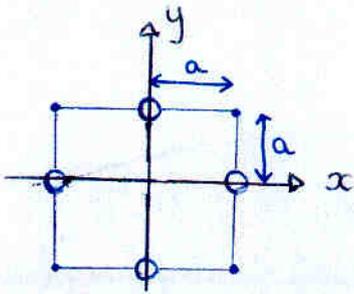


$|FA_2(\psi_2)| = \left| 2 \cos\left(\frac{\psi_2}{2}\right) \right|$  con misma d y  $\alpha$  y por tanto mismo M.V.



multiplicar  $|FA_1(\psi_1)| \cdot |FA_2(\psi_2)|$   
 es ahora practicamente imposible; debemos escoger otro método

Intentemos el método de un array plano 3x3 con algunos huecos y con el origen de fases en el origen de coordenadas



	$e^{j\psi_1}$	$e^{j\psi_2}$	$e^{j\psi_3}$
$e^{j\psi_1}$	0	1	0
$e^{j\psi_2}$	1	0	1
$e^{j\psi_3}$	0	1	0

$$\psi_1 = ka \sin\theta \cos\phi + \pi$$

$$= k_x a + \pi$$

$$\psi_2 = ka \sin\theta \sin\phi + \pi$$

$$= k_y a + \pi$$

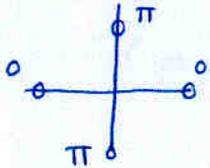
esta x no está muy clara porque el elem  $e^{j\psi_1}$  tiene fase 0 y no  $\pi$

$$FA(\psi_1, \psi_2) = e^{-j\psi_2} + e^{-j\psi_1} + e^{j\psi_1} + e^{j\psi_2}$$

$$= e^{-jk_y a} e^{-j\pi} + e^{-jk_x a} e^{-j\pi} + \dots$$

X

mejor hace lo de las fases más "a pelo" porque no hay fase lineal



$$FA(k_x, k_y) = -e^{-jk_y a} + e^{-jk_x a} + e^{jk_x a} - e^{jk_y a}$$

$$= 2 \cos(k_x a) - 2 \cos(k_y a)$$

$$= 2 [\cos(k_x a) - \cos(k_y a)]$$

¿En qué dirección es  $FA(k_x, k_y)$  máximo?

$$k_x = ka \sin\theta \cos\phi$$

$$k_y = ka \sin\theta \sin\phi$$

$$FA(k_x, k_y) = 2 |\cos(ka \sin\theta \cos\phi) - \cos(ka \sin\theta \sin\phi)| = 4$$

$$= \frac{k \cdot a}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$= \pi$$

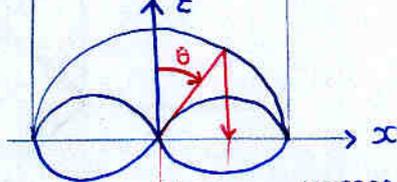
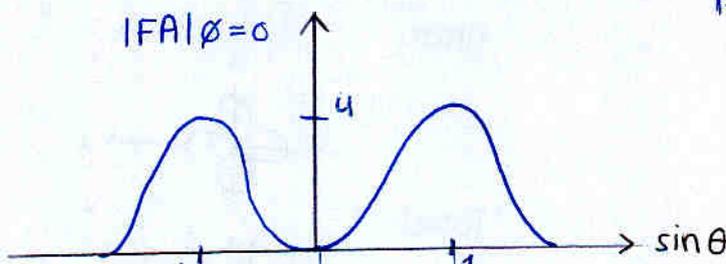
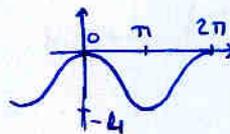
$$\left. \begin{aligned} \sin\theta \cos\phi &= 0 \\ \sin\theta \sin\phi &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \pi/2 \\ \phi = \pi/2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta \cos\phi &= -1 \\ \sin\theta \sin\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$$

Por tanto el plano E es en efecto XZ ( $\phi=0$ )

(ya que la solución  $\phi = \pi/2$  cae dentro del conductor y no es válida)

$$FA_{\phi=0} = 2(\cos(\pi \sin\theta) - 1)$$

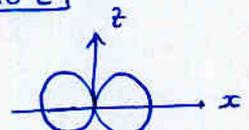


vemos que los ejes dibujados tienen sentido

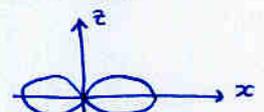
Por tanto

**Plano E**

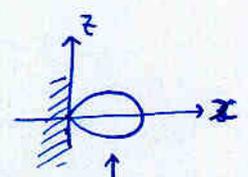
Dipolo:



Array



Total



solo tiene significado físico la zona fuera del conductor

**Plano H**

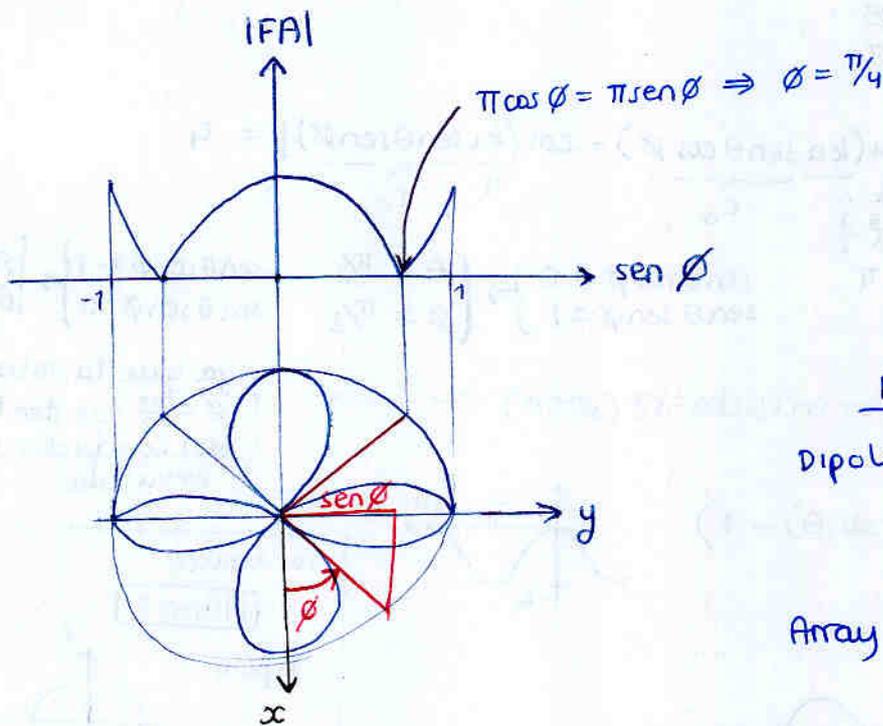
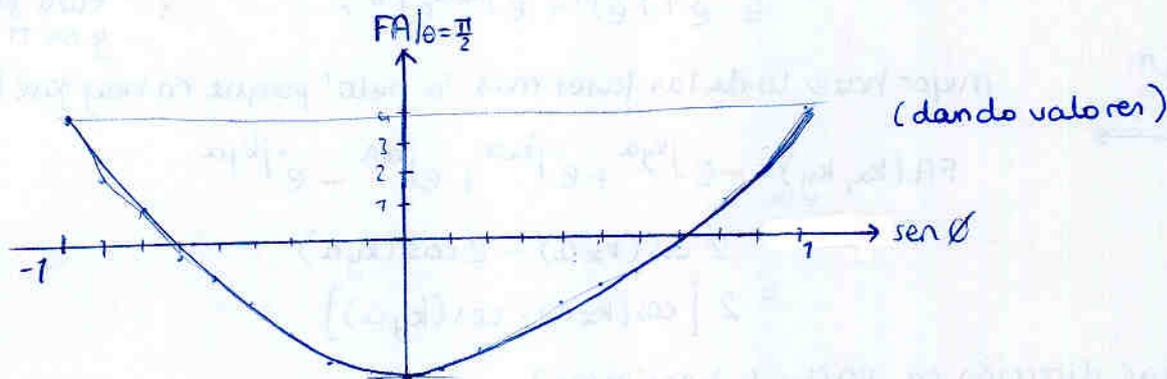
$$\theta = \frac{\pi}{2} \begin{cases} k_x = k \cos \phi \\ k_y = k \sin \phi \end{cases}$$

$$FA(k_x, k_y) \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = 2 \left( \cos \left( \frac{k \cos \phi}{\pi} \right) - \cos \left( \frac{k \sin \phi}{\pi} \right) \right)$$

$$= 2 \left( \cos (\pi \cos \phi) - \cos (\pi \sin \phi) \right)$$

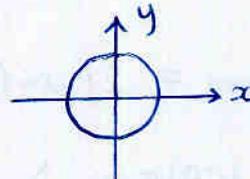
~~sen(A-B) = sen A cos B - sen B cos A~~

$$= 2 \left( \cos (\pi \sqrt{1-x^2}) - \cos (\pi x) \right)$$

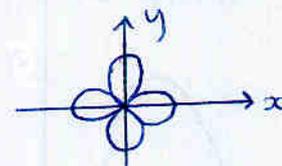


Por tanto  
Plano H

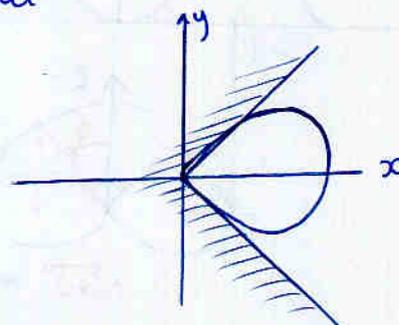
Dipolo



Array

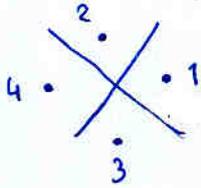


Total



b) Calcule la impedancia de entrada. Para ello utilice la grafica de la impedancia mutua que se adjunta

Tenemos 4 dipolos  
(por 2 imágenes)



$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} + I_3 Z_{13} + I_4 Z_{14}$$

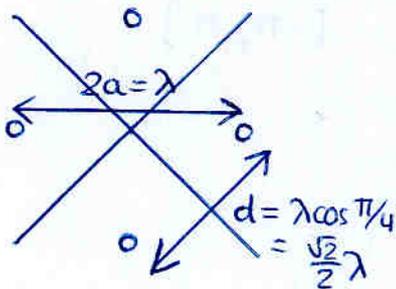
sabemos  $I_1 = I_4 = -I_2 = -I_3 = I$

$$V_1 = I (Z_{11} + Z_{14} - Z_{12} - Z_{13})$$

$$\frac{V_1}{I} = Z_{in1} = Z_{11} + Z_{14} - Z_{12} - Z_{13}$$

↑  
autoimpedancia de un dipolo  
↑  
impedancia mutua cuando  $d \rightarrow 0$

↑  
impedancia mutua que depende de la separación entre dipolos



$$Z_{in} = Z_{12}(0) + Z_{12}(\lambda) - 2Z_{12}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$$

$$\begin{cases} Z_{12}(0) = 73 + j43 \Omega \text{ (resultado conocido)} \\ Z_{12}(\lambda) = 4 + j18 \Omega \\ Z_{12}(0.707\lambda) = -25 + j1 \Omega \end{cases}$$

Por tanto:

$$Z_{in} = (73 + j43) + (4 + j18) - 2 \cdot (-25 + j1)$$

$$Z_{in} = 127 + j58$$

$$Z_{in} = 127 + j59 \Omega$$

c) Directividad máxima

$$D_{max} = \frac{P_{max}}{W_{rad}/4\pi r^2} = \frac{|E|_{max}^2/\eta}{I^2 R_{in}/4\pi r^2}$$

$$D_{max} = \frac{\frac{240^2}{r^2}/120\pi}{I^2 \cdot 127/4\pi r^2}$$

$$= 15.12 \rightarrow 11.79 \text{ dB}$$

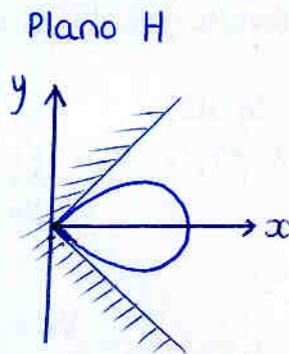
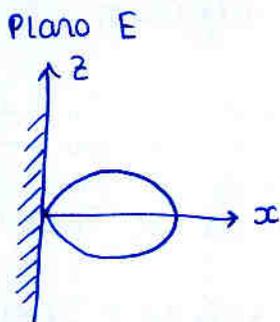
$$\begin{aligned} |E|_{max} &= |E_z|_{max} \cdot |FA|_{max} \\ &= |E_z(\theta = \frac{\pi}{2})| \cdot |FA(\theta = \frac{\pi}{2})| \\ &= \left| j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \cdot 1 \right| \cdot |4| \\ &= \left| \frac{4 \times 60 \times I_m}{r} \right| \end{aligned}$$

en este caso  $I_m = I(0)$  por ser  $\lambda/2$  normalmente  $I(0) = I_m \cdot \sin kh$

$$= \left| \frac{4 \times 60 \times I}{r} \right|$$

d) Elemento del array:  
 $\vec{E}_0 \Rightarrow$

Dipolo frente a diédrico

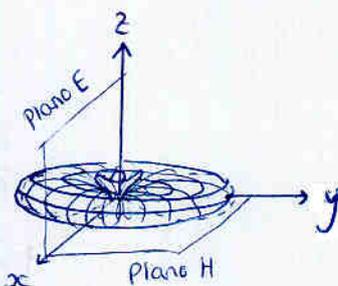
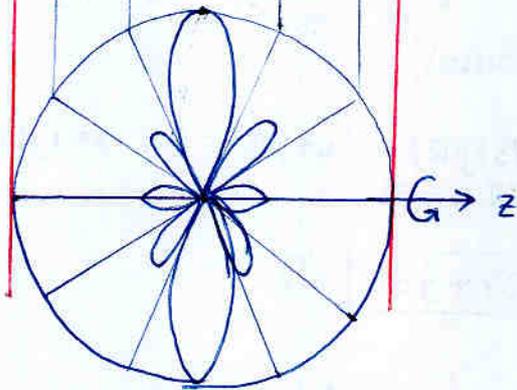
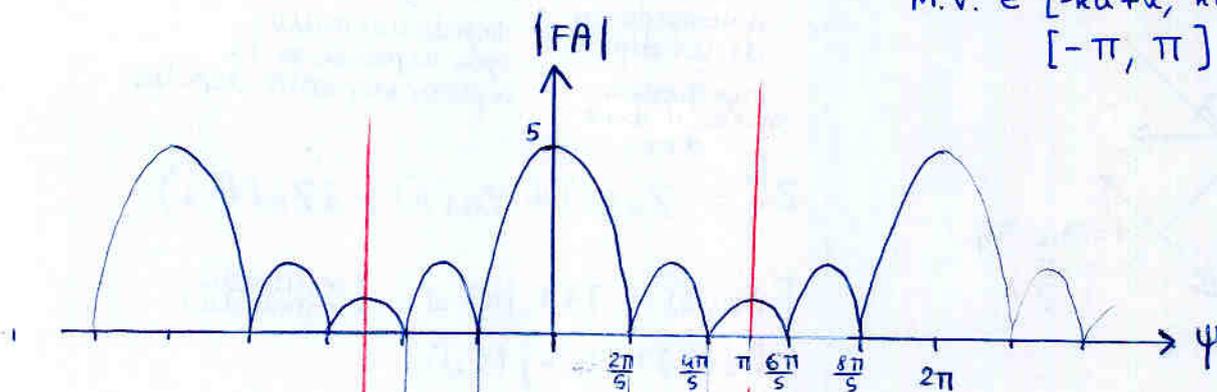


Array uniforme de  $N=5$ ,  $d = \lambda/2$ ,  $\alpha = 0$

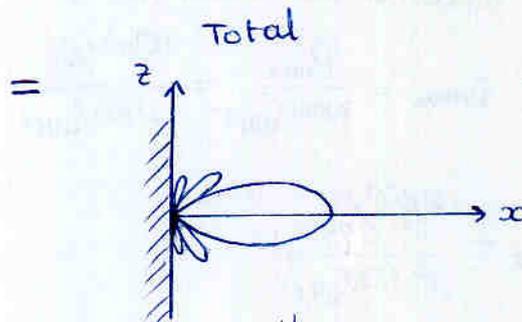
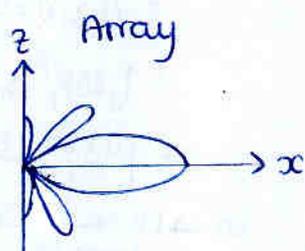
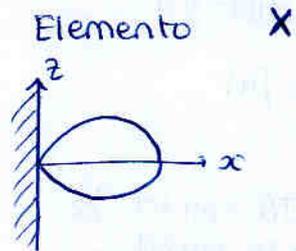
$$|FA(\psi)| = \left| \frac{\text{sen}(5\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)} \right|$$

$$\psi = kd \cos \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} \cos \theta = \pi \cos \theta$$

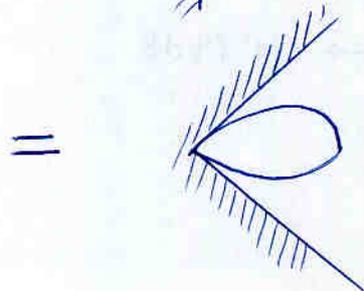
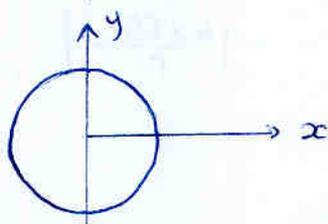
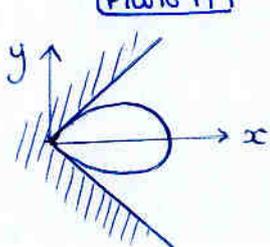
M.V.  $\in [-kd + \alpha, kd + \alpha]$   
 $[-\pi, \pi]$



Plano E



Plano H



e) Directividad máxima

$$D_{\max} = \frac{P_{\max}}{\frac{W_{\text{rad}}}{4\pi r^2}} = \frac{|E|_{\max}^2}{2} \frac{4\pi r^2}{W_{\text{rad}}}$$

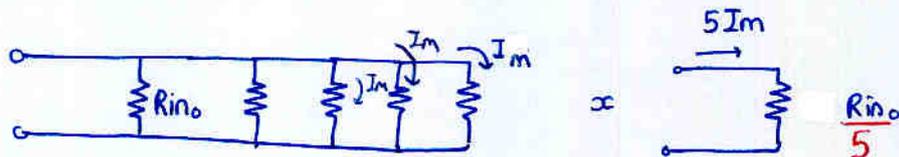
$$|E|_{\max}^2 = |E_0|_{\max}^2 \cdot |FA|_{\max}^2 \rightarrow \text{el máximo es } N=5$$

$$= \left(\frac{240 I_m}{r}\right)^2 \cdot (5)^2$$

Cuidado, en este caso  $I_m = I(0)$  de CADA ANTENA

$$W_{\text{rad}} = I^2 \cdot R_{\text{in}} \rightarrow \text{Re}\{Z_{\text{in}}\}$$

Como las antenas del array se alimentaban en paralelo (sin desfase entre corrientes)



$$W_{\text{rad}} = (5I_m)^2 \cdot \left(\frac{R_{in_0}}{5}\right)$$

$$= (5I_m)^2 \cdot \left(\frac{127}{5}\right)$$

$$= 5 \cdot I_m^2 \cdot 127$$

↑ suponiendo que no se han visto modificadas

← Vemos que sale simplemente 5 veces más potencia radiada que antes

Por tanto

$$D_{\max} = \frac{\left(\frac{240}{r}\right)^2 \cdot 5^2 \cdot (I_m)^2 \cdot 4\pi r^2}{127 \cdot 5 \cdot (I_m)^2 \cdot 120\pi} = 75.6 \rightarrow 18.78 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{1}{x_i}$$

Method 1:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 2:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 3:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 4:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 5:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 6:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 7:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$



Method 8:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 9:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 10:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 11:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 12:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 13:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

Method 14:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{1}{x_i}$$

**PROBLEMA 1**

Una antena conocida por los radioaficionados como W8JK, consta en su configuración más simple de dos dipolos muy próximos de longitud  $\lambda/2$ . Para la antena de la figura, donde A-A' son los puntos de alimentación, obtener

- La impedancia de entrada de cada dipolo (B-B' y C-C') (1 punto)
- Indique cuál es el diagrama plano E y representelo gráficamente (2 puntos)
- Indique cuál es el diagrama plano H y representelo gráficamente (2 puntos)
- Obtenga la directividad máxima (2 puntos)
- Si la antena se sitúa paralela al suelo y a una altura  $h=3\lambda/4$  de éste, dibuje el diagrama plano H resultante. (3 puntos)

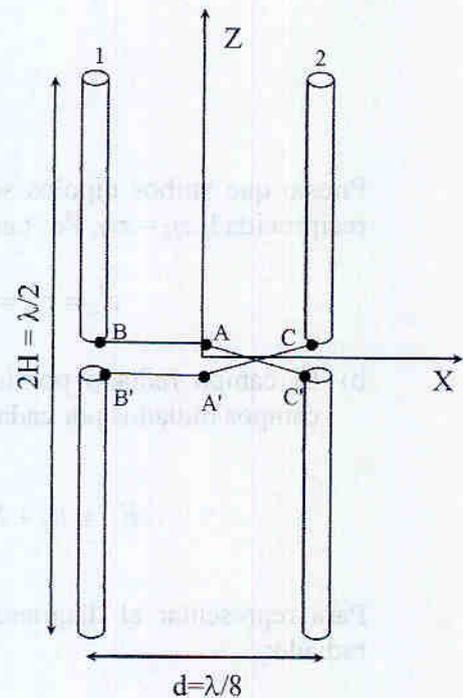
$$Z_{11} = Z_{22} = 73 + j42 \Omega$$

$$Z_{12} = 64 + j2 \Omega$$

$$N_z = 2kI_m \frac{\cos(k_z H) - \cos(kH)}{k^2 - k_z^2}$$

$$\begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{A'B'} = \overline{A'C'}$$



## SOLUCIÓN

- a) La relación entre la tensión en bornes de cada dipolo ( $V_1$  y  $V_2$ ) y la corriente a la entrada de los mismos ( $I_1$  e  $I_2$ ) viene dada por los parámetros de impedancia de la siguiente forma:

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2$$

$$V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2$$

La alimentación de la antena se produce en los puntos A-A'. Puesto que dicha alimentación se reparte por igual entre los dos dipolos,  $I_1$  e  $I_2$  serán de la misma amplitud. Y como la alimentación va directa de A-A' a B-B', pero se cruzan los cables al pasar de A-A' a C-C',  $I_1$  e  $I_2$  tendrán signos contrarios ( $I_1 = -I_2$ ). Por lo tanto:

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 = I_1 (z_{11} - z_{12})$$

$$V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 = I_2 (-z_{21} + z_{22})$$

Y las impedancias de entrada de ambos dipolos serán:

$$z_{in}^1 = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} - z_{12}$$

$$z_{in}^2 = \frac{V_2}{I_2} = -z_{21} + z_{22}$$

Puesto que ambos dipolos son iguales,  $z_{11} = z_{22}$ . Y como consecuencia del teorema de reciprocidad,  $z_{12} = z_{21}$ . Por tanto:

$$z_{in}^1 = z_{in}^2 = z_{11} - z_{12} = 73 + j42 - (64 + j2) = 9 + j40$$

- b) El campo radiado por los dos dipolos lo podemos calcular como la suma de los campos radiados por cada dipolo:

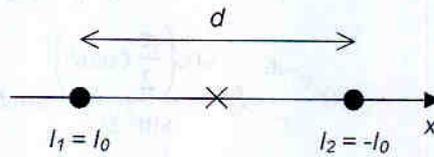
$$E_T = E_1 + E_2 = E_0 e^{jk_x \frac{d}{2}} - E_0 e^{-jk_x \frac{d}{2}} = E_0 2j \sin\left(k_x \frac{d}{2}\right)$$

Para representar el diagrama de radiación nos interesa obtener el módulo del campo radiado:

$$|E_T| = |E_0| \left| 2 \sin\left(k_x \frac{d}{2}\right) \right| \quad (1)$$

donde  $E_0$  es el campo radiado por un dipolo de longitud  $\lambda/2$  situado en el origen de coordenadas y alimentado con una corriente  $I_0 = I_1$  (como la del dipolo 1). También se puede considerar al conjunto de los dos dipolos como una agrupación, puesto que ambos dipolos son iguales. En ese caso, el campo radiado por la agrupación será el campo radiado por un solo dipolo ( $E_1$ ) multiplicado por el factor de la agrupación:

$$E_T = E_1 \cdot FA = E_0 e^{jk_x \frac{d}{2}} \cdot FA$$



Puesto que ambos dipolos están alimentados por corrientes de la misma amplitud, como se muestra en la figura, constituyen una agrupación uniforme de  $N = 2$  elementos. El desfase progresivo en la alimentación de los dipolos es  $\alpha = \pi$ . De modo que:

$$FA(z) = 1 + z$$

$$FA(\psi_x) = FA(z = e^{-j\psi_x}) = e^{-j\frac{(N-1)\psi_x}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\psi_x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_x}{2}\right)} = e^{-j\frac{\psi_x}{2}} \frac{\sin(\psi_x)}{\sin\left(\frac{\psi_x}{2}\right)}$$

$$|E_T| = \left| E_0 e^{jk_x \frac{d}{2}} \right| \cdot |FA| = |E_0| \cdot \left| \frac{\sin(\psi_x)}{\sin\left(\frac{\psi_x}{2}\right)} \right| \quad (2)$$

Se puede comprobar que las expresiones (1) y (2) coinciden:

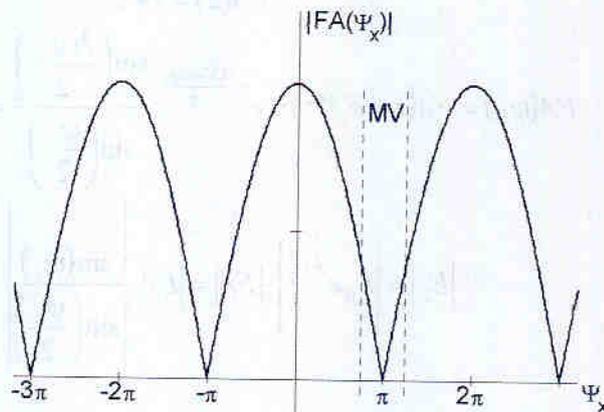
$$\frac{\sin(\psi_x)}{\sin\left(\frac{\psi_x}{2}\right)} = \frac{\sin(k_x d + \pi)}{\sin\left(\frac{k_x d + \pi}{2}\right)} = -2 \sin\left(\frac{k_x d}{2}\right)$$

El diagrama de radiación será el producto del diagrama de radiación de un dipolo de longitud  $\lambda/2$  por el diagrama de la agrupación. Si no se conoce el campo radiado por un dipolo de longitud  $\lambda/2$  ( $E_0$ ), éste se puede calcular a partir de la expresión del vector de radiación para un dipolo, que se daba como dato, de la siguiente forma:

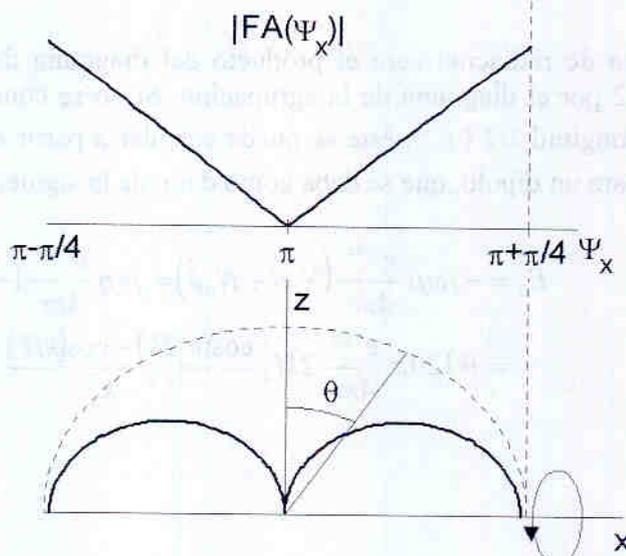
$$\begin{aligned} E_0 &= -j\omega\mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi}) = jk\eta \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} (-N_z \sin \theta) \hat{\theta} \\ &= jk120\pi \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} 2kl_0 \frac{\cos(k_x H) - \cos(kH)}{k^2 - k_z^2} \sin \theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_0 &= j60 \frac{e^{-jkr}}{r} k^2 I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k^2(1 - \cos^2\theta)} \sin\theta \hat{\theta} \\
 &= j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \sin\theta \hat{\theta} \\
 &= j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \hat{\theta}
 \end{aligned}$$

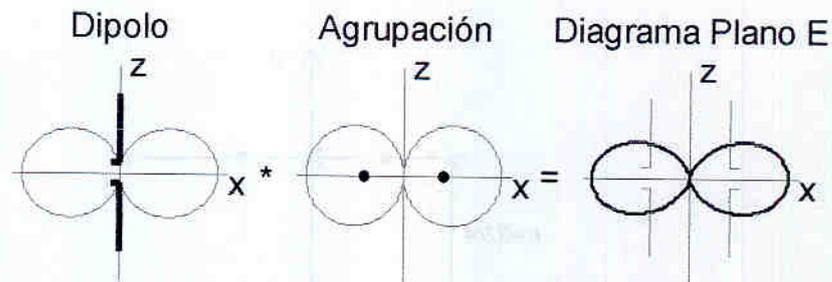
El factor de la agrupación se muestra en la siguiente figura:



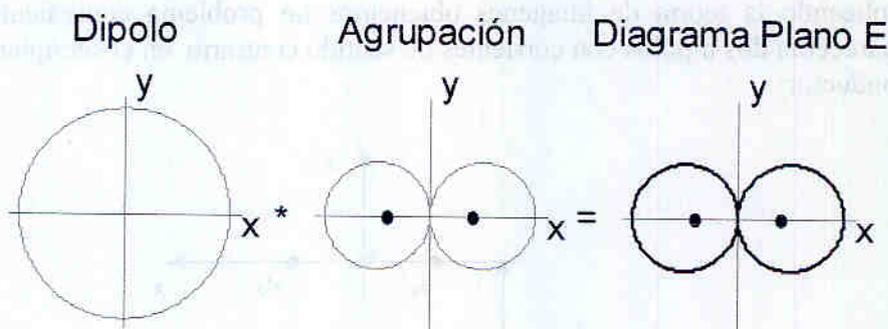
El margen visible es  $MV = [-kd + \alpha, kd + \alpha] = [\pi - \pi/4, \pi + \pi/4]$ . El diagrama de radiación de la agrupación será por tanto:



La dirección de máxima radiación será el eje X, pues tanto el diagrama del dipolo como el de la agrupación son máximos en esa dirección. Y como el campo eléctrico está polarizado en el eje X según  $\hat{z}$ , el diagrama plano E es el diagrama en el plano XZ. En la siguiente figura se muestra dicho diagrama:



c) El diagrama plano H es el diagrama en el plano XY, pues es el plano ortogonal al plano E. En la siguiente figura se muestra dicho diagrama:



d) La directividad la podemos calcular a partir del campo radiado máximo:

$$D_{\max} = D(\theta, \phi) \Big|_{\substack{\theta=\pi/2 \\ \phi=0, \pi}} = \frac{P_{\max}}{W_t / 4\pi r^2} = \frac{|E_r|^2}{\eta} \frac{4\pi r^2}{W_t} = \frac{|E_0|^2 |FA|^2}{\eta} \frac{4\pi r^2}{2R_{in} I_0^2}$$

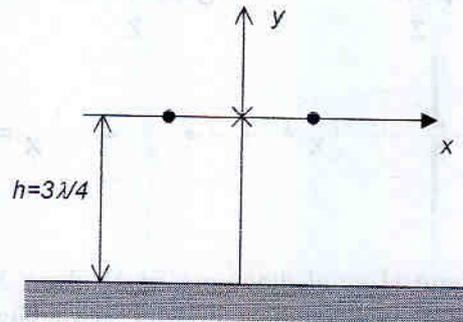
$$|E_0(\theta = \pi/2, \phi = 0)| = 60 \frac{1}{r} I_0$$

$$|FA(\theta = \pi/2, \phi = 0)| = \left| 2 \sin\left(\frac{k_x d}{2}\right) \right| = \left| 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right|$$

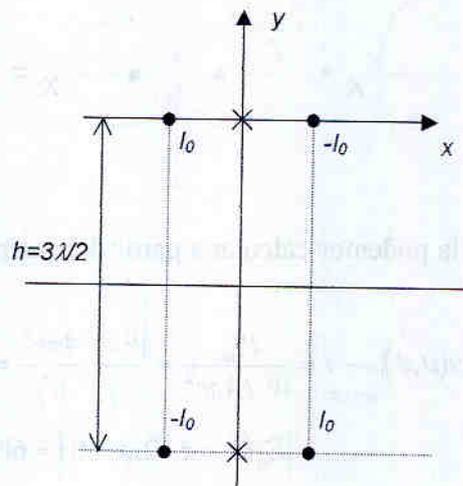
$$D_{\max} = \frac{60^2 I_0^2}{r^2} \cdot \frac{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{120 \pi} \cdot \frac{4\pi r^2}{2 \cdot 9 I_0^2} = 3,9 = 6 \text{ dB}$$

Nótese que la potencia radiada se obtiene como dos veces la potencia radiada por un dipolo. Es totalmente incorrecto suponer que la resistencia a la entrada de la antena es el paralelo de las resistencias obtenidas para cada dipolo. Es igualmente incorrecto suponer que la corriente a la entrada de la antena es el doble de la corriente por cualquiera de los dipolos.

- e) La antena se sitúa paralela al suelo (plano conductor perfecto) como se muestra en la figura:



Aplicando la teoría de imágenes obtenemos un problema equivalente en el que nos aparecerán dos dipolos con corrientes de sentido contrario en el semiplano ocupado por el conductor:



Podemos considerar que tenemos una agrupación de dos antenas del tipo W8JK analizada en los apartados anteriores, de manera que el campo radiado total en el semiespacio superior (en el inferior, dentro del conductor, el campo es nulo), será:

$$|E_T| = |E_{W8JK}| \cdot |FA_2(\psi_y)|$$

siendo

$$|E_{W8JK}| = |E_0| \cdot |FA_1(\psi_x)|$$

donde  $FA_2$  es el factor de la agrupación de dos elementos con alimentación inversa separados  $3\lambda/2$  a lo largo del eje  $y$  (agrupación uniforme de dos elementos con  $\alpha=\pi$ ):

$$|FA_2(\psi_y)| = \left| \frac{\sin(\psi_y)}{\sin\left(\frac{\psi_y}{2}\right)} \right|$$

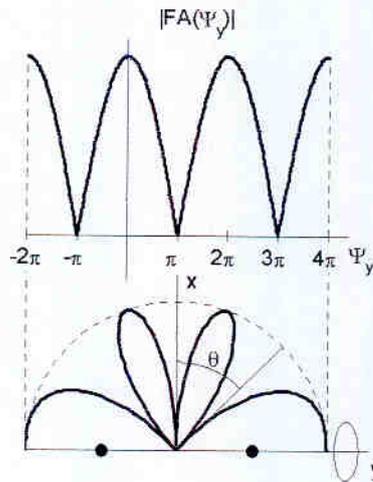
$$\psi_y = k_y \frac{3\lambda}{2} + \pi = 3\pi \sin\theta \sin\phi + \pi$$

El diagrama de la agrupación de dos dipolos presenta dos lóbulos de tipo pincel dirigidos hacia valores positivos y negativos del eje X, respectivamente, como se ha comprobado en apartados anteriores. Por otro lado, el factor de la agrupación de dos elementos a lo largo del eje y ( $FA_2$ ) tendrá simetría alrededor de dicho eje, y por tanto la dirección de máxima radiación debe estar contenida en el plano XY. En dicho plano la polarización del campo magnético es  $\hat{\phi}$ . Por tanto el plano H es el plano XY.

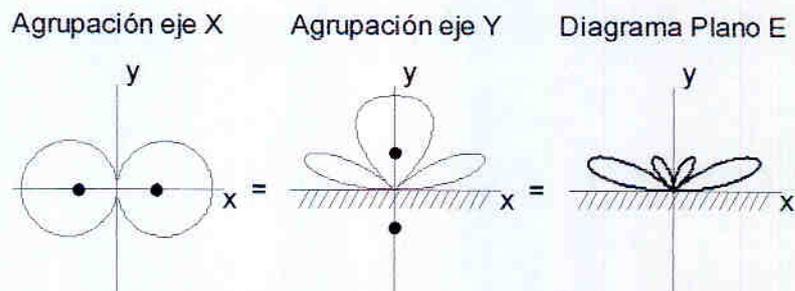
En el plano XY,  $\theta = \pi/2$ . Por tanto:

$$\psi_y = 3\pi \sin\theta \sin\phi + \pi = 3\pi \sin\phi + \pi$$

Y el margen visible será  $MV = [-3\pi + \pi, 3\pi + \pi] = [-2\pi, 4\pi]$ . El diagrama de radiación de la agrupación en el eje y  $FA_2$  será el que se muestra en la siguiente figura:



Finalmente el diagrama plano H de la agrupación de dos dipolos frente al plano de masa es:



$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{x^3}$$

$$y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = -\frac{2}{x^3}$$

El problema de la geometría de los datos se resuelve en el plano XY. Por tanto el punto de corte de la recta tangente con el eje Y es  $a = -\frac{2}{x^3}$ . Por tanto el punto de corte de la recta tangente con el eje X es  $b = \frac{1}{x^2}$ .

$$\text{El área es } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^5}$$

$$A(x) = \frac{1}{x^5}$$

La función  $A(x)$  es decreciente en  $(0, \infty)$ . Por tanto el área máxima se alcanza cuando  $x$  es el menor valor posible, es decir,  $x = 1$ .



El problema de la geometría de los datos se resuelve en el plano XY. Por tanto el punto de corte de la recta tangente con el eje Y es  $a = -\frac{2}{x^3}$ . Por tanto el punto de corte de la recta tangente con el eje X es  $b = \frac{1}{x^2}$ .



Enero 2003 - Problema 1

a) 
$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$V_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12}$

$V_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22}$

Por la forma en que están alimentados se deduce

$V_1 = -V_2$

$I_1 = -I_2$

$Z_{in1} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - Z_{12}$

$Z_{in2} = \frac{V_2}{I_2} = -Z_{21} + Z_{22}$

$Z_{in1} = Z_{in2} = (73 + j42) - (64 + j2)$

$Z_{in1} = Z_{in2} = 9 + j40 \Omega$

b) El vector de radiación de un dipolo en el origen de  $2H = \lambda/2$

$$\bar{N}_{\frac{\lambda}{2}} = \hat{z} \cdot 2 I_m \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{k \sin^2 \theta} \quad \leftarrow \begin{aligned} k^2 - k_z^2 &= k^2(1 - \cos^2 \theta) \\ &= k^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$= \hat{z} \cdot \frac{\lambda}{\pi} \cdot I_m \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

El vector de radiación de la WBJK será

$$\bar{N} = \bar{N}_{\frac{\lambda}{2}} \cdot (e^{jk_x \frac{\lambda}{16}} - e^{-jk_x \frac{\lambda}{16}})$$

$$= \bar{N}_{\frac{\lambda}{2}} \cdot 2j \sin(k_x \frac{\lambda}{16})$$

$$= \bar{N}_{\frac{\lambda}{2}} \cdot 2j \sin(k \sin \theta \cos \phi \cdot \frac{\lambda}{16})$$

$$= \bar{N}_{\frac{\lambda}{2}} \cdot 2j \sin(\frac{\pi}{8} \sin \theta \cos \phi)$$

Por tanto:

$$\bar{N} = 2j I_m \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \cdot \sin(\frac{\pi}{8} \sin \theta \cos \phi) \hat{z}$$

↓ Pasando a esféricas (ignorando componente  $\hat{r}$ )

$$\bar{N} = -2j I_m \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \cdot \sin(\frac{\pi}{8} \sin \theta \cos \phi) \cdot \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\bar{N} = -2j I_m \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \cdot \sin(\frac{\pi}{8} \sin \theta \cos \phi) \hat{\theta}$$

Como  $\bar{E} \propto N_{\theta} \hat{\theta} + N_{\phi} \hat{\phi}$   

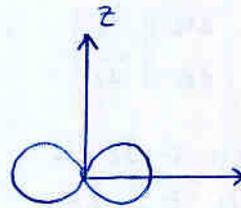
$$d(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{|N_{\theta}|^2 + |N_{\phi}|^2}}{|N_{max}|}$$

no es  $d(\theta, \phi)$  porque el máximo no llega a 1 sino a  $\sin(\frac{\pi}{8})$

Otra forma de hacerlo es con el factor de array

$$\vec{E} = \vec{E}_{\frac{\lambda}{2}} \cdot FA(\psi)$$

$$\vec{E}_{\frac{\lambda}{2}} = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\theta}$$



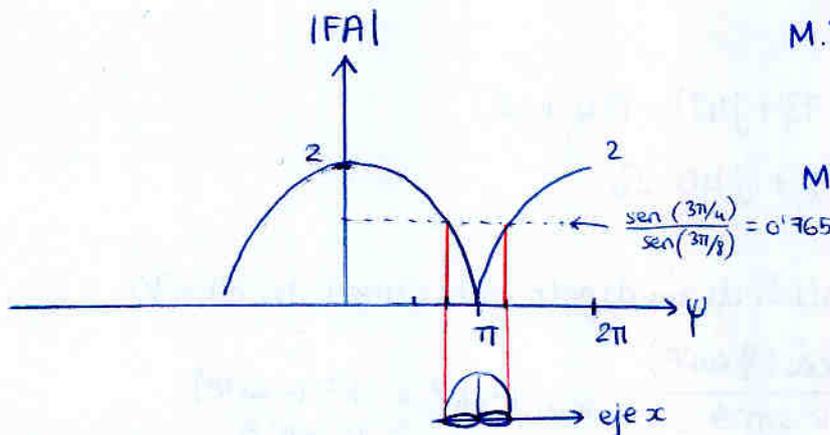
$$|FA(\psi)| = \left| \frac{\sin(N \frac{\psi}{2})}{\sin(\frac{\psi}{2})} \right|$$

siendo  $\psi = \vec{k} \cdot \vec{r}_d + \alpha$   
 $= kd \sin \theta \cos \phi + \pi$

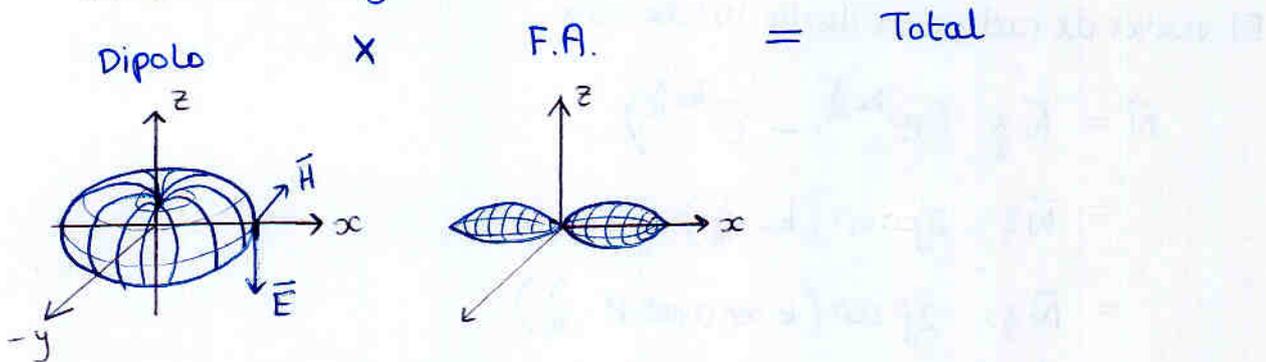
M.V.  $\in [-kd + \alpha, kd + \alpha]$

$kd = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{2}$

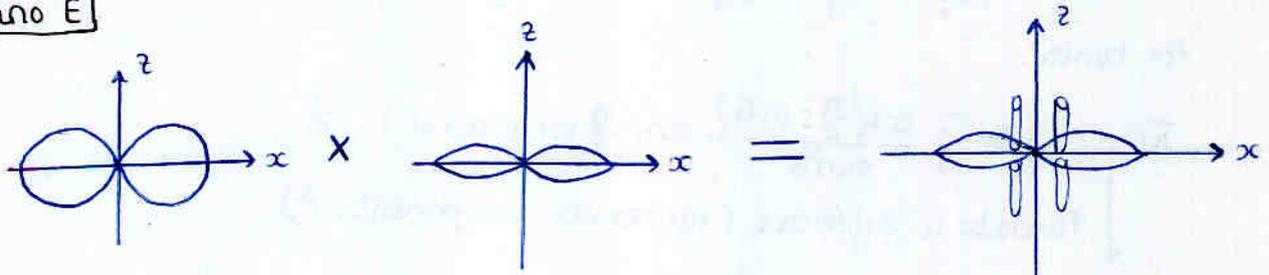
M.V.  $\in [\pi - \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}]$



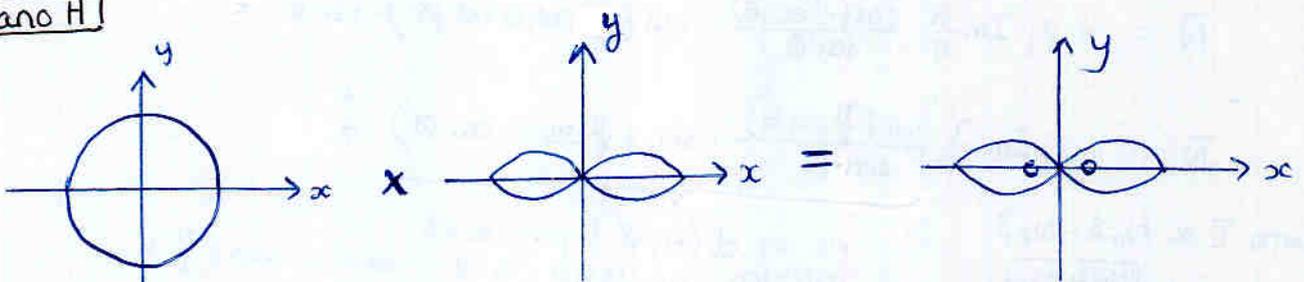
El máximo del FA se da para  $\pm \hat{x}$   
 Por tanto el diagrama total:



Plano E



Plano H



e)

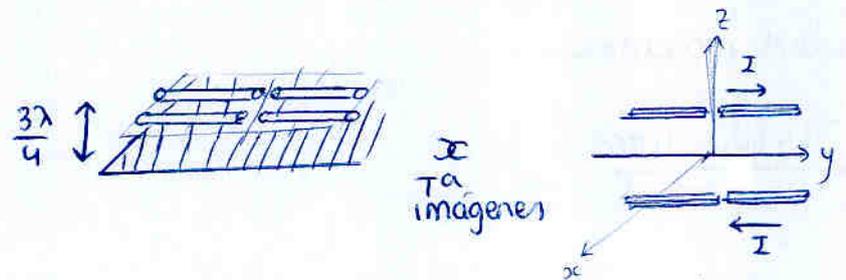
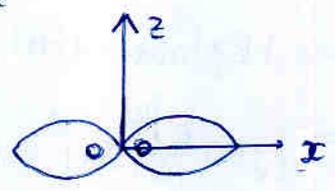


Diagrama plano H del elemento en esa posición

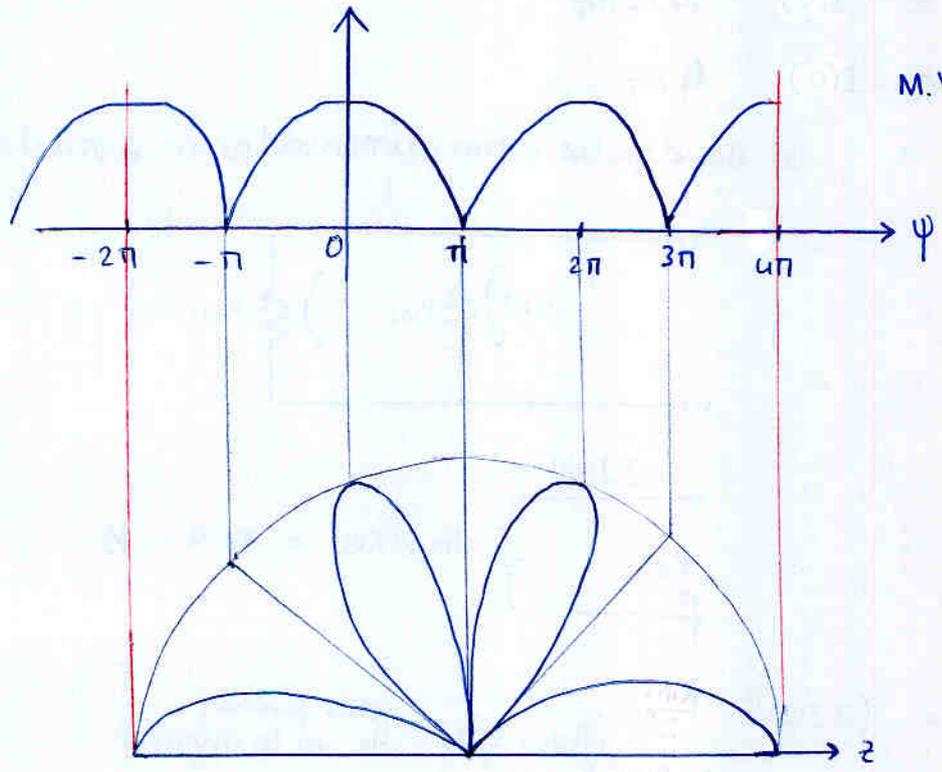


Ahora este elemento forma un array uniforme  $N=2, d=2h=\frac{3\lambda}{2}$   
 $\alpha = \pi$

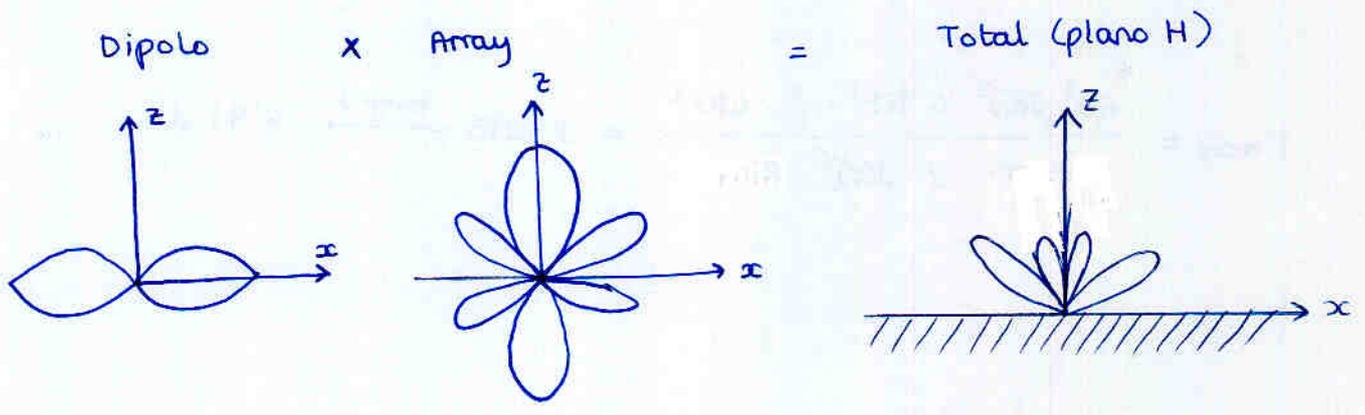
uniforme  $N=2 \Rightarrow FA_2(\psi_2) = \left| \frac{\text{sen}(N\frac{\psi}{2})}{\text{sen}(\frac{\psi}{2})} \right|$

M.V.  $\in [-kd+\alpha, kd+\alpha]$   
 $kd = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 \cdot \frac{3\lambda}{4} = 3\pi$

M.V.  $\in [\pi-3\pi, \pi+3\pi]$



Por tanto:



d) obtenga la directividad máxima

$$D_{\max} = \frac{P_{\max} \cdot 4\pi r^2}{W_{\text{rad}}} = \frac{|E|_{\max}^2 \cdot 4\pi r^2}{\eta \cdot W_{\text{rad}}}$$

$$|E|_{\max}^2 = |E_{\frac{\lambda}{2}}|_{\max}^2 \cdot |FA|_{\max}^2$$

$$= \left| j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \right|^2 \cdot |0.765|^2$$

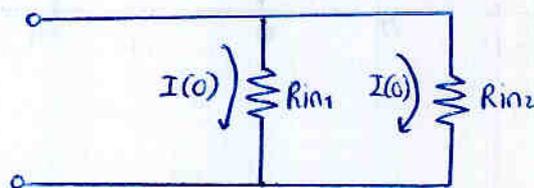
$$= \left( \frac{60 I_m}{r} \right)^2 \cdot 0.765^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} I(0) = I_m \sin(kH) \stackrel{zH = \lambda/2}{=} I_m$$

$$= \left( \frac{60 I(0)}{r} \right)^2 \cdot 0.765^2$$

$$W_{\text{rad}} = I_{\text{in}}^2 \cdot \text{Re}(Z_{\text{in}})$$

$$= I_{\text{in}}^2 \cdot R_{\text{inT}}$$

Los dos dipolos están alimentados en paralelo



$$= (2I(0))^2 \cdot R_{\text{inT}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} R_{\text{in}} = \frac{R_{\text{in1}}}{2} \quad \begin{array}{l} \text{dos formas} \\ \text{de ver lo mismo} \end{array}$$

$$= 2 \cdot \underbrace{I(0)^2 \cdot R_{\text{in1}}}_{W_{\text{dipolo}}}$$

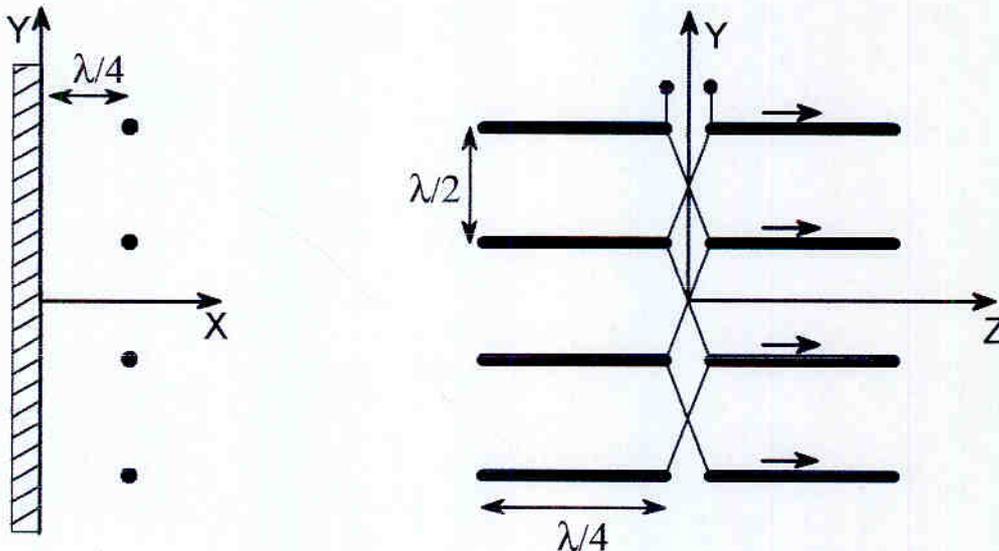
$$D_{\max} = \frac{60^2 \cancel{I(0)^2} \cdot 0.765^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2}{120\pi \cdot 2 \cdot \cancel{I(0)^2} \cdot 9} = 3.9015 \xrightarrow{10 \log(\cdot)} 5.91 \text{ dB}$$

**PROBLEMAS**

- Duración: 2 horas

**PROBLEMA 1**

La antena de la figura consiste en un panel de 4 dipolos separados una distancia  $d = \lambda/2$  y alimentados en serie mediante tomas a una línea de transmisión, espaciadas también  $\lambda/2$ . El sentido de la corriente es el mismo para los cuatro dipolos. La impedancia de entrada de cada dipolo, incluyendo efectos mutuos es  $Z_{\text{dipolo}} = 80 \Omega$ . El panel de dipolos se sitúa paralelo a un plano conductor a una distancia  $h = \lambda/4$  de éste.



- Razone por qué en el array de la figura las corrientes de los 4 dipolos llevan el mismo sentido. (1 punto)
- Analice el array de 4 dipolos en ausencia del plano conductor. Obtenga la expresión de los campos radiados. Indique cuáles son los planos E y H de la antena y dibuje los diagramas en dichos planos. (3 puntos)
- Considere ahora la antena junto al plano conductor. Obtenga la nueva expresión del campo radiado y dibuje los nuevos diagramas plano E y H. (2 puntos)
- Obtenga la impedancia de entrada de la antena (1 punto)
- Obtenga la longitud efectiva máxima (1 punto)
- Obtenga la directividad máxima de la antena (2 puntos)

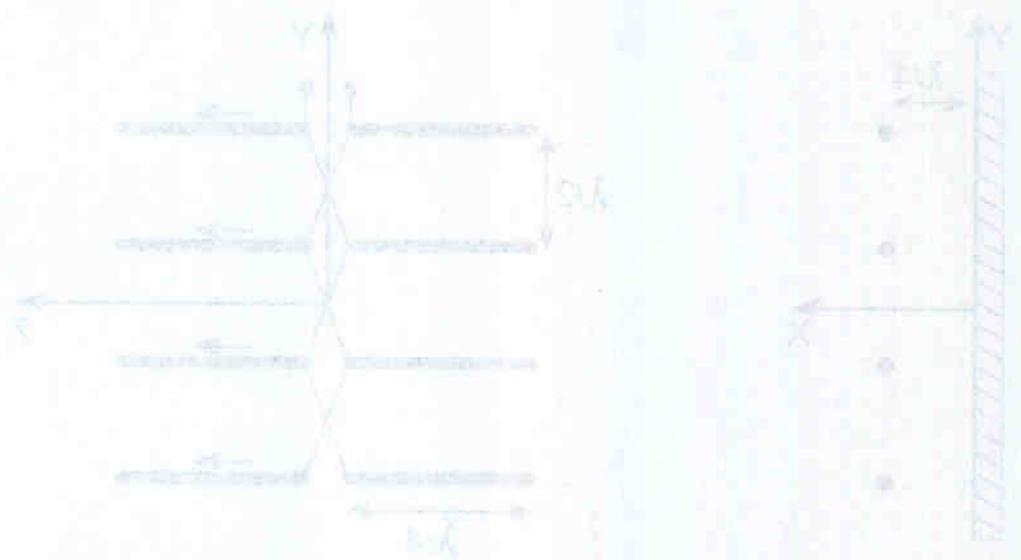
ANÁLISE

11 de Maio de 2002

PROBLEMA 2  
 7.5.2002

PROBLEMA 1

Um sistema de linhas coaxiais em regime permanente é representado no domínio da frequência  $\omega$  por um circuito equivalente a um sistema de ondas viajantes. A tensão de alimentação  $V_0$  é aplicada ao sistema de ondas viajantes em cada extremo, mantendo-se a diferença de fase entre os dois terminais  $\pi$  radianos. A tensão de alimentação  $V_0$  é aplicada ao sistema de ondas viajantes em cada extremo, mantendo-se a diferença de fase entre os dois terminais  $\pi$  radianos.



- a) Escreva a expressão da tensão e da corrente em função da distância  $z$  ao longo da linha.
- b) Calcule a tensão e a corrente em cada extremo da linha.
- c) Calcule a potência média e a potência complexa em cada extremo da linha.
- d) Calcule a potência média e a potência complexa em cada extremo da linha.
- e) Calcule a potência média e a potência complexa em cada extremo da linha.
- f) Calcule a potência média e a potência complexa em cada extremo da linha.

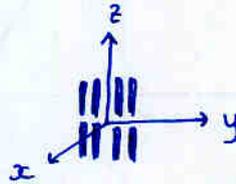
**Problema 1. Enero 2002**

a) Aunque los bornes van "cambiándose", entre un borne y el siguiente hay una línea  $\lambda/4$  que invierte la corriente, por tanto, realmente la corriente de los 4 dipolos lleva el mismo sentido.

b) Array de 4 dipolos en ausencia del plano conductor

$$\bar{E} = \bar{E}_\lambda \cdot FA(\psi)$$

$$\bar{E}_\lambda = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\theta}$$



Array:

Agrupación uniforme  
N=4

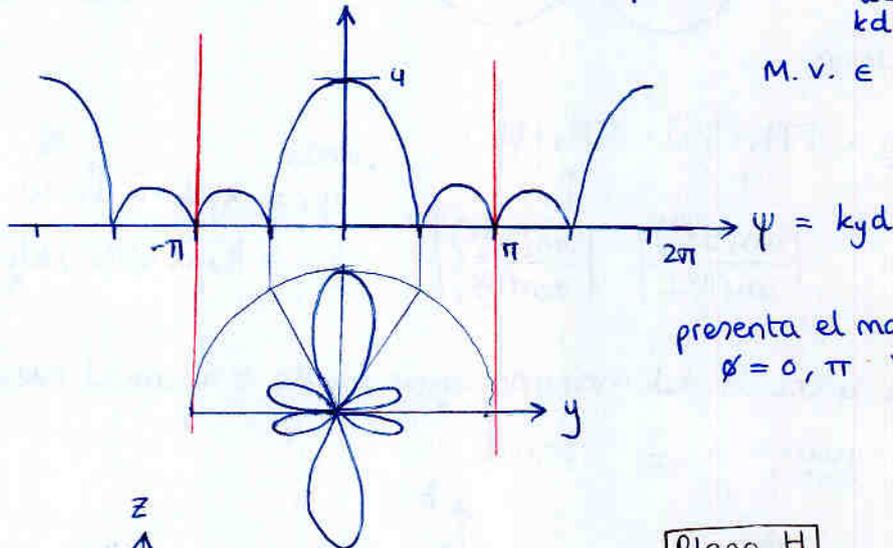
$$|FA(\psi)| = \left| \frac{\text{sen}(N\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)} \right|$$

$$M.V. \in [-kd + \alpha, kd + \alpha]$$

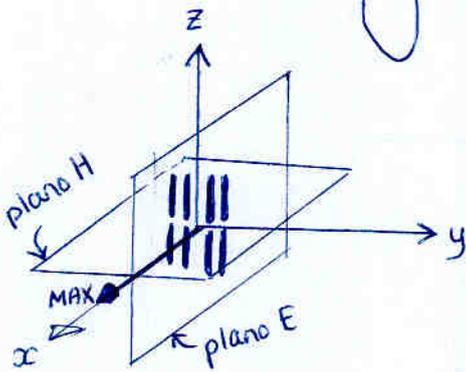
$$\alpha = 0$$

$$kd = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$$

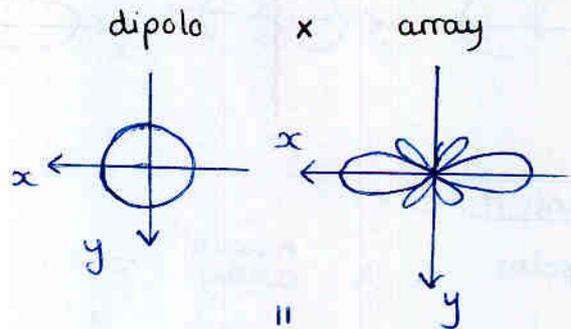
$$M.V. \in [-\pi, \pi]$$



presenta el máximo en  $\psi = 0, \pi \quad \forall \theta$

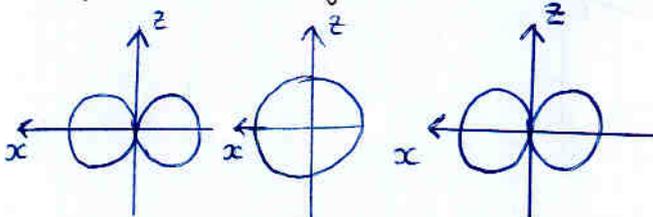


**Plano H**

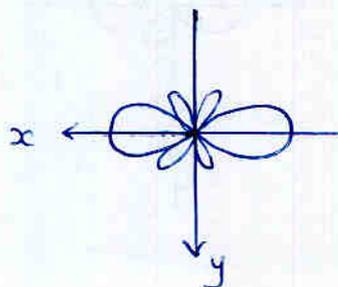


**Plano E**

dipolo x array = total

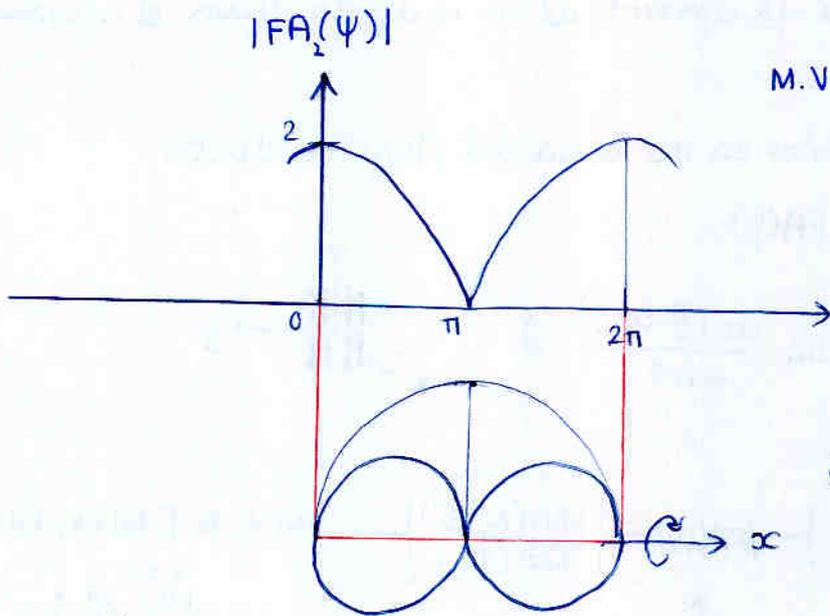


total



c)  $\bar{E} = \bar{E}_{\text{dipolos}}^4 \cdot FA_2(\psi)$

$\leftarrow$  nuevo array  $\begin{cases} \text{uniforme} \\ N=2 \\ \alpha = \pi \text{ (1ª imagen)} \rightarrow \text{endfire} \\ d = 2 \cdot \lambda/4 = \lambda/2 \quad kd = \pi \end{cases}$



M.V  $\in [-kd + \alpha, kd + \alpha]$   
 $[0, 2\pi]$

**!** no es un donut, hay que hacer "revolución"



expresión del campo

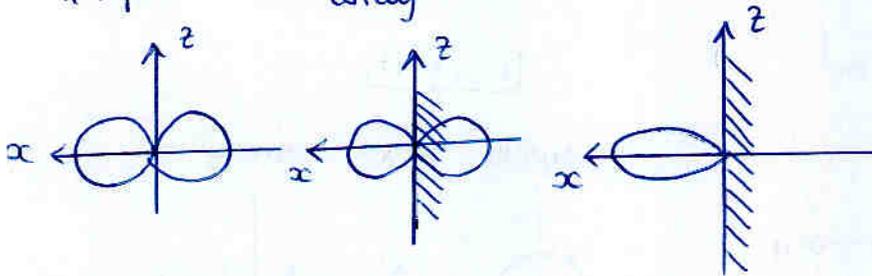
$$\bar{E} = \bar{E}_{\frac{\lambda}{2}} \cdot FA_1(\psi_1) \cdot FA_2(\psi_2)$$

$\uparrow$  conocido       $\uparrow$        $\uparrow$   
 $\left| \frac{\sin(5\frac{\psi_1}{2})}{\sin(\frac{\psi_1}{2})} \right|$        $\left| \frac{\sin(2\frac{\psi_2}{2})}{\sin(\frac{\psi_2}{2})} \right|$

siendo  $\psi_1 = k_y d = kd \sin\theta \sin\phi$  (with  $\lambda/2$  above  $kd$ )  
 $\psi_2 = k_x (2h) \cos\theta = 2kh \sin\theta \cos\phi + \pi$  (with  $\lambda/4$  below  $2kh$ )

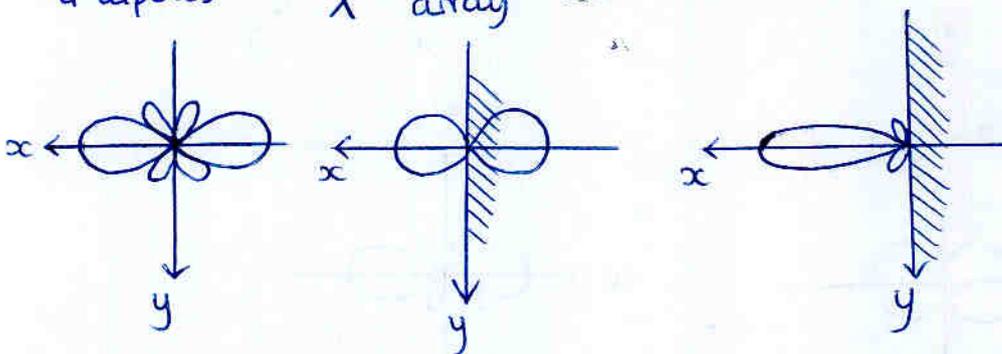
**Plano E** (la dirección del máximo sigue siendo  $\pm \hat{x}$  con el nuevo array)

4 dipolos  $\times$  nuevo array = total



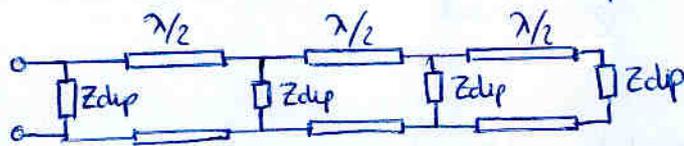
**Plano H**

4 dipolos  $\times$  nuevo array = total

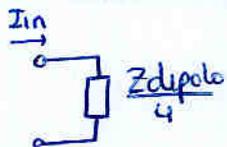
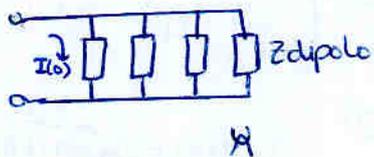


d) Impedancia de entrada de la antena

cada dipolo tiene una impedancia de entrada (contando ya todos los efectos mutuos) de  $Z_{dipolo} = 80 \Omega$



$\lambda/2$  línea  $\lambda/2 \rightarrow$  vuelta completa carta de smith



$$Z_{in} = \frac{80}{4} = 20 \Omega$$

e) Longitud efectiva Ⓢ

$$l_{efmax} = \frac{N_{max}}{I_{in}} = \frac{|N_{\frac{\lambda}{2}}|_{max} \cdot |FA_1|_{max} \cdot |FA_2|_{max}}{4 I(0)}$$

$$\begin{aligned} |N_{\frac{\lambda}{2}}|_{max} &= \left| 2k I_m \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{k^2 \sin^2 \theta} \cdot \sin \theta \hat{\theta} \right|_{max} \quad I(0) = I_m \overbrace{\sin kH}^1 \\ &= \left| \frac{2 I_m}{k} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \sin \theta)}{\sin \theta} \right|_{max} = \frac{2 I_m}{k} = \frac{2 I(0)}{k} = \frac{\lambda}{\pi} I(0) \end{aligned}$$

$$|FA_1|_{max} = 4$$

$$|FA_2|_{max} = 2$$

mejor aún

$$l_{efmax} = \frac{|N_{\frac{\lambda}{2}}|_{max}}{I(0)} \cdot \frac{|FA_1|_{max} \cdot |FA_2|_{max}}{4}$$

$$l_{efmax} \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{\pi}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{4 \cdot 2}{4} = 2 \frac{\lambda}{\pi}$$

f) Directividad máxima

$$D_{\max} = \frac{P_{\max}}{W_{\text{rad}}/4\pi r^2} = \frac{|E|_{\max}^2 \cdot 4\pi r^2}{\eta W_{\text{rad}}}$$

$$|E|_{\max}^2 = |E_{\frac{\lambda}{2}}|_{\max}^2 \cdot |FA_1|_{\max}^2 \cdot |FA_2|_{\max}^2$$

$$= \left| j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin(\theta)} \right|_{\max}^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2$$

$$= \left| \frac{60 I_m}{r} \right|^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2$$

$$= \left| \frac{60 \cdot I(0)}{r} \right|^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{en dipolo } \lambda/2 \\ H = \lambda/4 \end{array} \right\} I(0) = I_m \sin(kH)$$

$$W_{\text{rad}} = I_{\text{in}}^2 \cdot R_{\text{in}} \quad \leftarrow \text{Re}(Z_{\text{in}})$$

$$= (4 \cdot I(0))^2 \cdot \frac{R_{\text{in}}}{4}$$

$$= 4 \cdot I(0)^2 R_{\text{in}}$$

$$D_{\max} = \frac{\frac{60^2}{r^2} \cdot 4^2 \cdot 2^2 \cdot I(0)^2 \cdot 4\pi r^2}{120\pi \cdot 4 \cdot I(0)^2 \cdot 80} = 24$$

$$10 \log 24 = 13.8 \text{ dB}$$

ANTENAS

• Duración : 2 horas

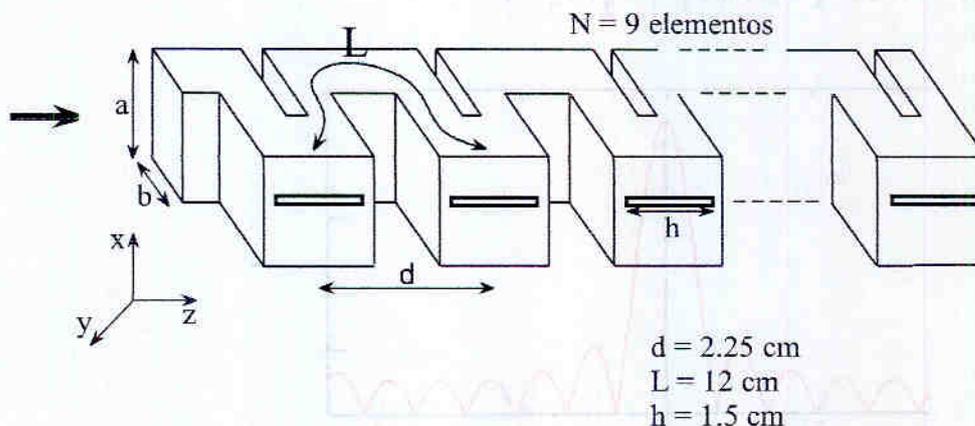
20 de abril de 2004

**PROBLEMA 1**

La antena de la figura es un array de barrido en frecuencia formado por 9 ranuras en una guía en forma de meandro. Esta antena puede modificar el apuntamiento del haz variando la frecuencia de trabajo de la onda que circula por la guía. Las dimensiones de la guía son  $a \times b = 2.286 \times 1.016$  cm y por ella se propaga el modo  $TE_{10}$ . Suponga que las ranuras están débilmente acopladas, por lo que se puede suponer que el array es uniforme en amplitud. La guía está terminada en una carga adaptada y la frecuencia de trabajo es  $f_0 = 10$  GHz.

- Obtenga el campo producido por una ranura corta (longitud  $h$ ) aislada. Dibuje sus diagramas plano E y plano H. (1 punto)
- Obtenga el espaciado eléctrico  $d/\lambda$  y el desfase entre los elementos del array a la frecuencia  $f_0$ . Indique en qué dirección del espacio apunta el máximo del array. (1 punto)
- Considerando ahora el array de 9 elementos, obtenga el campo radiado y dibuje los diagramas plano E y plano H, incluyendo el efecto de la ranura, a la frecuencia de trabajo  $f_0$ . (2 puntos)
- Obtenga el apuntamiento del máximo del haz para las frecuencias 9 GHz y 11 GHz. (2 puntos)
- Dibuje el diagrama de radiación plano H a estas frecuencias. (1 punto)
- Calcule cuánto se puede desajustar el haz como máximo, sin que aparezcan lóbulos de difracción. Para este apartado puede suponer que el espaciado eléctrico entre elementos,  $d/\lambda$ , no varía respecto al que habría a  $f_0$ . Indique para qué frecuencia se obtiene el desplazamiento máximo calculado. (3 puntos)

$$\lambda_g = \lambda / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$



Solución al problema 1

a) Una ranura corta de anchura  $w$  iluminada con un campo  $E_0$  tiene una distribución de tensión

$$V(z) = V_0 \left( 1 - 2 \frac{|z|}{h} \right), \text{ siendo } V_0 = -E_0 w$$

El vector de radiación es  $\vec{L} = 2hV_0 \hat{z}$ , y el vector potencial,  $\vec{F} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} 2hV_0 \hat{z}$ .

Por tanto el campo radiado por la ranura aislada se puede expresar como  $\vec{E}_{ranura} = E_0 \hat{\phi} = -j\omega\eta F_z \text{sen}\theta \hat{\phi}$

A la vista de la expresión del campo el diagrama plano E de la ranura corta es igual al diagrama plano H del dipolo corto (omnidireccional) mientras que el diagrama plano H de la ranura coincide con el diagrama plano E del dipolo.

b) a la frecuencia de trabajo,  $\lambda_0 = \frac{30}{f_0 \text{ (GHz)}} = 3 \text{ cm}$ .

El espaciado eléctrico es  $d/\lambda_0 = 0.75$ .

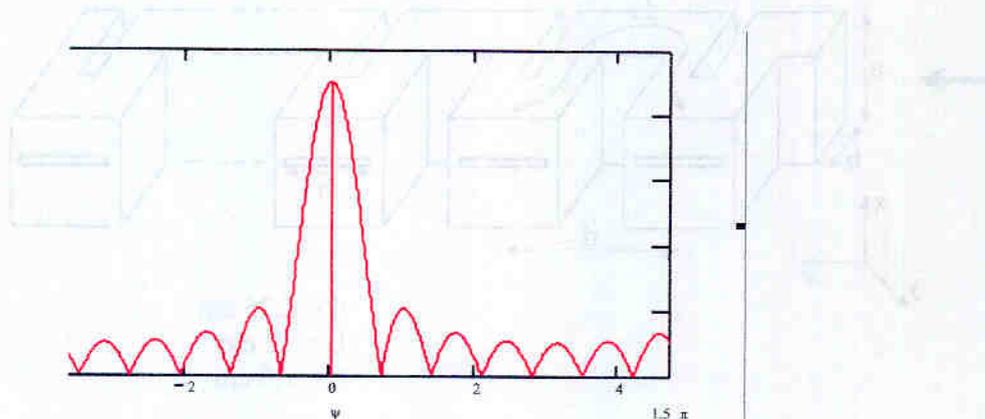
El desfase entre elementos  $\alpha_0 = -k_g L = -6\pi = 0$ . Ya que  $\lambda_g = 3.975 \text{ cm}$ .

El array apunta por tanto en la dirección broadside, que en este caso es el eje Y ( $\theta = \pi/2$ ,  $\phi = \pi/2$ ).

c) El campo total se obtiene como producto del campo de una ranura por el factor de array

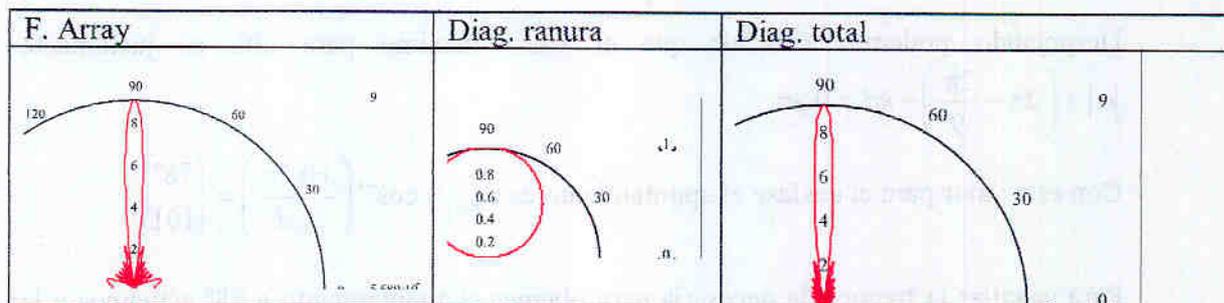
$$\vec{E} = \vec{E}_{ranura} FA(\psi_z), \quad FA(\psi_z) = \frac{\text{sen}\left(\frac{9\psi_z}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\psi_z}{2}\right)}, \quad \psi_z = kd \cos\theta + \alpha$$

El margen visible es  $[-k_0 d, k_0 d] = \left[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$



El diagrama plano E es omnidireccional en el semiespacio  $y > 0$ . Asumimos que la radiación hacia atrás es nula.

En cuanto al diagrama plano H (plano YZ), lo obtenemos como producto de los diagramas de la ranura y el factor de array:



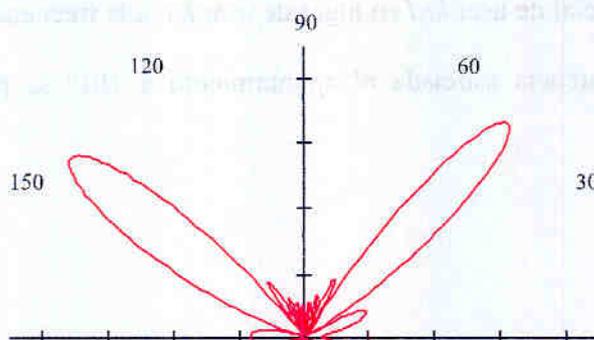
- d) A la frecuencia  $f_1 = 9$  GHz,  $\lambda_1 = 3.33$  cm, y  $\lambda_{g1} = 4.86$  cm. Por tanto  $\alpha_1 \cong \pi$   
 A la frecuencia  $f_2 = 11$  GHz,  $\lambda_2 = 2.73$  cm, y  $\lambda_{g2} = 3.4$  cm. Por tanto  $\alpha_2 \cong -\pi$

El apuntamiento se calcula haciendo  $0 = kd \cos \theta_{\max} + \alpha$

Para  $\alpha_1$  el apuntamiento resulta  $\theta_{\max 1} = 137^\circ$

Para  $\alpha_2$  el apuntamiento resulta  $\theta_{\max 2} = 52^\circ$

e) El margen visible a la frecuencia  $f_1$  es  $[-k_1 d + \alpha_1, k_1 d + \alpha_1] = [-0.35\pi, 2.35\pi]$ , mientras que para  $f_2$  es  $[-2.65\pi, 0.65\pi]$ . En ambos casos los diagramas son muy similares ya que el margen visible está centrado en  $\pm\pi$  y abarca aproximadamente lo mismo. La gráfica adjunta muestra el FA, antes de multiplicarlo por el diagrama de la ranura, a la frecuencia  $f_1$ .



f) Si se quiere evitar que aparezcan lóbulos de difracción en el diagrama de radiación, el margen visible no debe alcanzar valores  $\psi = \pm 2\pi$ . Como criterio vamos a escoger que el extremo del margen visible no rebase el nulo anterior al lóbulo de difracción. Es decir, en este caso  $kd + \alpha \leq 2\pi - \frac{2\pi}{9}$ .

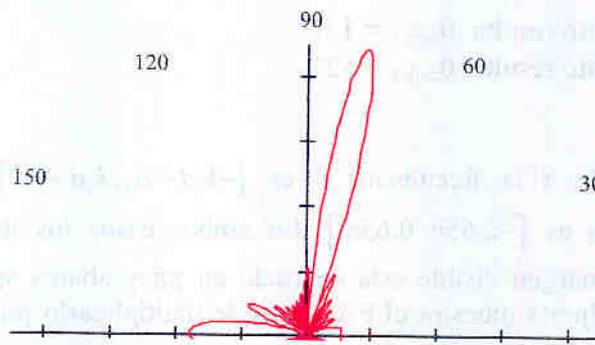
NOTA: Es igualmente aceptable considerar otros criterios menos restrictivos, como por ejemplo  $kd + \alpha \leq 2\pi$  ya que el lóbulo de difracción que aparecería en este caso se cancela con el nulo que presenta la ranura en esa dirección

Despejando podemos concluir que el valor máximo para alfa es justamente  $|\alpha| \leq \left(2\pi - \frac{2\pi}{9}\right) - kd \cong 0.3\pi$

Con este valor para el desfase el apuntamiento es  $\theta_{\max} = \cos^{-1}\left(\frac{\pm 0.3\pi}{k_0 d}\right) = \begin{cases} 78^\circ \\ 101^\circ \end{cases}$

Para calcular la frecuencia necesaria para obtener el apuntamiento a  $78^\circ$  actuamos a la inversa que en el apartado d).

Dado que  $\alpha = -k_g L$ , despejamos el valor de  $\lambda_g = 3.8$  cm. Y a su vez obtenemos  $\lambda$  en función de  $\lambda_g$ ,  $\lambda = \frac{\lambda_g}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_g}{2a}\right)^2}} = 2.92$ . La frecuencia es por tanto  $f_s = 10.26$  GHz



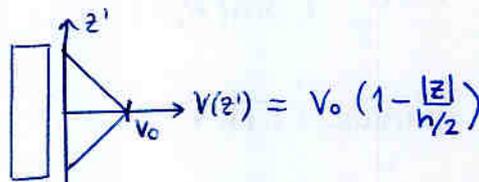
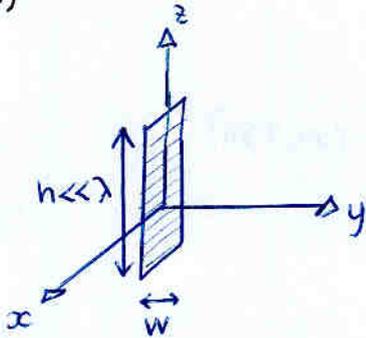
En la dirección de  $180^\circ$  aparece un lóbulo y no un nulo como habíamos impuesto debido a la aproximación inicial de usar  $k_0 d$  en lugar de usar  $k_s d$  a la frecuencia  $f_s$ .

Para obtener la frecuencia asociada al apuntamiento a  $101^\circ$  se procede de manera análoga.

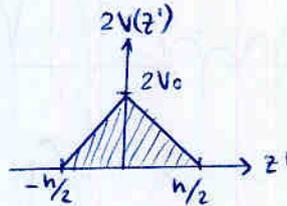


Abril de 2004. Problema 1

a)



$$\begin{aligned} \bar{L} &= \hat{z} \int_{-h/2}^{h/2} 2 \cdot V(z') e^{jk_z z'} dz' \\ &\approx 1 \text{ por ser } h \ll \lambda \\ &= \hat{z} \int_{-h/2}^{h/2} 2V(z') dz' \\ &= \hat{z} V_0 h \end{aligned}$$

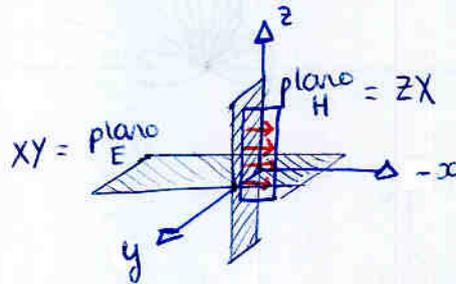


siendo  $V_0 = -E_0 \cdot W$

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} L_z \hat{z} \\ &= -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} L_z \sin\theta \hat{\theta} + \frac{\text{no importa}}{Fr} \hat{r} \end{aligned}$$

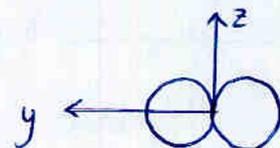
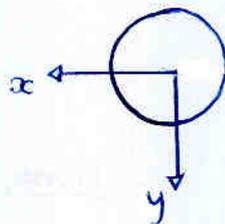
$$\begin{aligned} \bar{E} &= -j\omega\eta F_z \sin\theta \hat{\phi} \\ &= +j\omega \frac{\eta\epsilon}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} V_0 h \sin\theta \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$\bar{E} = j \frac{k}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} V_0 h \sin\theta \hat{\phi}$$



Plano E ( $\theta = \pi/2$ )

Plano H ( $\phi = \pi/2$ )



b)

$$f_0 = 10 \text{ GHz}$$

$$\lambda_0 = c/f_0 = 0.03 \text{ m}$$

$$\lambda_{og} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{2a})^2}} = \frac{0.03}{\sqrt{1 - (\frac{0.03}{2 \times 0.02286})^2}} = 0.03976 \text{ m}$$

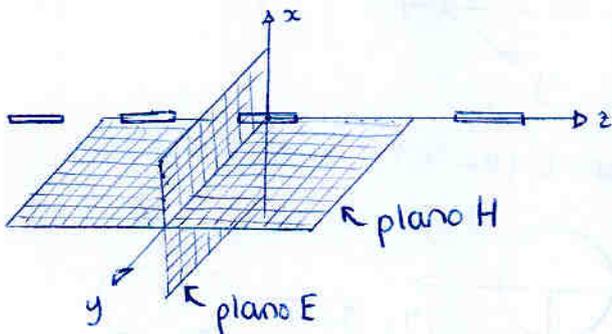
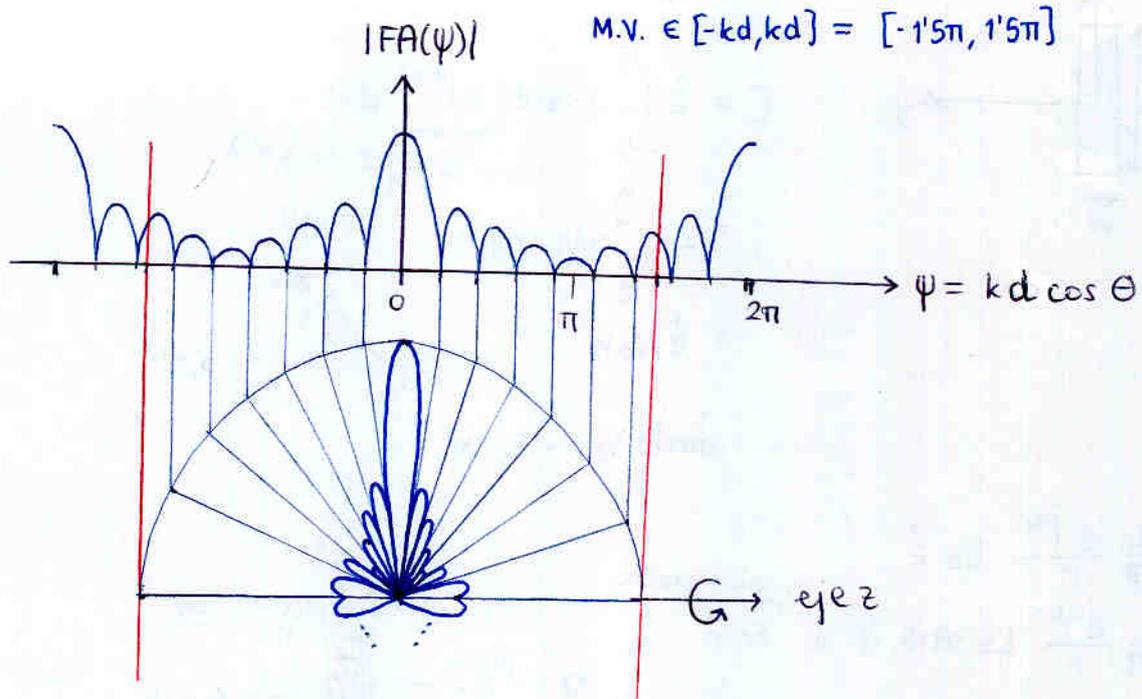
$$\text{espaciado eléctrico a } f_0 = \frac{d}{\lambda_0} = \frac{0.0225}{0.03} = 0.75$$

$$\begin{aligned} \text{desfase entre elementos } \alpha &= \beta \cdot L = \frac{2\pi}{\lambda_{og}} \cdot L = \frac{2\pi}{0.03976} \cdot 0.12 = 18.96 \text{ rad} \\ &= 6.04\pi \text{ rad} \\ &= 0.0362\pi \text{ rad} \\ &\approx 0 \text{ rad} \end{aligned}$$

Es un array broadside;  
el máximo está en  $\theta = \pi/2$

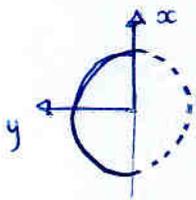
c)  $N=9$  uniforme  $\Rightarrow |FA(\psi)| = \left| \frac{\text{sen}(N\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)} \right|$   $\psi = kd + \alpha = k \cos \theta d$

$\bar{E}_{\text{total}} = \bar{E}_{\text{ranura}} \cdot FA(\psi)$

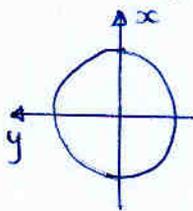


Plano E

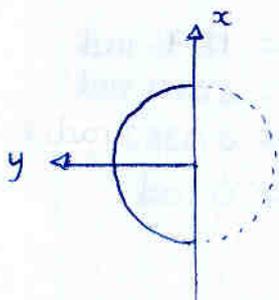
ranura



array

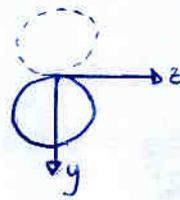


Total

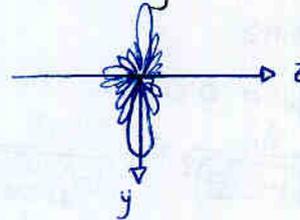


Plano H

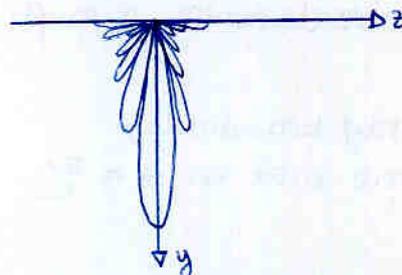
ranura



array



total



d) Apuntamiento máximo del haz para las frecuencias 9GHz y 10GHz

$$f = 9\text{GHz} \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{1}{30}\text{ m}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = 0'0487\text{ m}$$

$$\frac{d}{\lambda} = 0'675$$

$$\alpha = \beta \cdot L = \frac{2\pi}{\lambda_g} \cdot L = 1'548\text{ rad} \approx 5\pi\text{ rad} = \pi\text{ rad}$$

$$k \cdot d = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d = 1'35\pi$$

en el FA  $\rightarrow |FA|_{\max} \leftrightarrow \psi = kd \cos \theta_m + \alpha = 0$

$$\theta_m = \cos^{-1}\left(\frac{-\alpha}{kd}\right) = 2'405\text{ rad} = 138^\circ$$

$f = 11\text{GHz}$  (lo mismo)

e) f) triviales

1) Find the value of  $\sin^{-1}(\sin \frac{5\pi}{6})$

$$\sin^{-1}(\sin \frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

2) Find the value of  $\cos^{-1}(\cos \frac{7\pi}{6})$

$$\cos^{-1}(\cos \frac{7\pi}{6}) = \frac{7\pi}{6}$$

3) Find the value of  $\tan^{-1}(\tan \frac{3\pi}{4})$

$$\tan^{-1}(\tan \frac{3\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

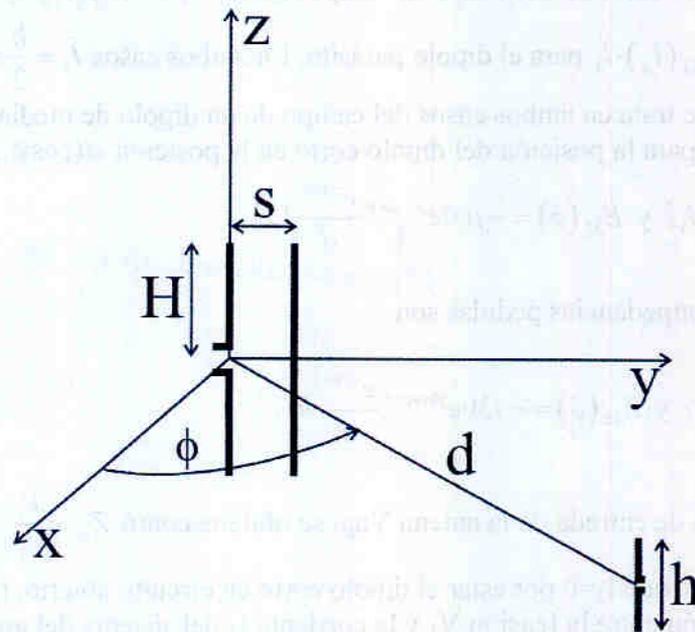
ANTENAS

• Duración : 2 horas

6 de abril de 2005

**PROBLEMA 1** Muy bueno para entender interacción entre antenas

Considere el radioenlace de la figura formado por dos antenas. En un extremo se sitúa una antena Yagi, formada por un elemento activo y un parásito, ambos de la misma longitud,  $H = \lambda/4$ . En el otro extremo, un dipolo corto de longitud total  $h$ . Puede suponer que las antenas se encuentran en campo lejano una de la otra.



- Escriba la matriz de impedancias asociada al sistema formado por el dipolo activo, el elemento parásito y el dipolo corto. (1 punto)
- Obtenga una expresión para las impedancias mutuas entre el dipolo activo y el corto, y entre el dipolo parásito y el corto. (2 puntos)
- Obtenga la impedancia de entrada de la antena Yagi cuando actúa como transmisora. Suponga que el dipolo corto está en circuito abierto. (2 puntos)
- Obtenga una expresión para la tensión recibida en circuito abierto en bornes del dipolo corto,  $V_3(\phi)$ , cuando la antena Yagi se alimenta con una corriente  $I_1 = 1$  A. Considere como datos  $d$ ,  $s$ ,  $h$  y las impedancias mutuas entre los elementos de la Yagi. (2 puntos)
- Obtenga la impedancia de entrada de la antena Yagi cuando ésta actúa como receptora. Considere que la corriente a la entrada del dipolo corto es  $I_3 = 1$  A. (3 puntos)

SOLUCIÓN PROBLEMA 1:

a)

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3$$

$$0 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3$$

$$V_3 = Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3$$

b) La impedancias mutuas pedidas son por definición  $Z_{31} = \left. \frac{V_3}{I_1} \right|_{I_2, I_3=0}$  y  $Z_{32} = \left. \frac{V_3}{I_2} \right|_{I_1, I_3=0}$ .

Dado que el dipolo corto se encuentra en campo lejano,  $V_3 = -\vec{E}_{31}(I_1) \cdot \vec{l}_3$  para el dipolo activo y  $V_3 = -\vec{E}_{32}(I_2) \cdot \vec{l}_3$  para el dipolo parásito. En ambos casos  $\vec{l}_3 = \frac{h}{2} \hat{z}$ . En cuanto al campo radiado, se trata en ambos casos del campo de un dipolo de media onda.

Particularizando para la posición del dipolo corto en la posición  $d(\cos \phi, \sin \phi, 0)$ :

$$\vec{E}_{31} = -j60 \frac{e^{-jkd}}{d} I_1 \hat{z} \text{ y } \vec{E}_{32}(\phi) = -j60 e^{jks \sin \phi} \frac{e^{-jkd}}{d} I_2 \hat{z}$$

*jky's particularizado en  $\theta = \pi/2$*

Por lo tanto, las impedancias pedidas son

$$Z_{31} = -j30 \frac{e^{-jkd}}{d} h \text{ y } Z_{32}(\phi) = -j30 e^{jks \sin \phi} \frac{e^{-jkd}}{d} h$$

c) La impedancia de entrada de la antena Yagi se obtiene como  $Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$ . Teniendo en

cuenta que  $V_2=0$  y que  $I_3=0$  por estar el dipolo corto en circuito abierto, podemos despejar la relación entre la tensión  $V_1$  y la corriente  $I_1$  del sistema del apartado a), obteniendo

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$$

d) En el sistema del apartado a) es fácil observar que  $V_3(\phi) = Z_{31}I_1 + Z_{32}(\phi)I_2$ .

Particularizando las impedancias mutuas, la relación entre las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ , y sabiendo que  $I_1=1$ ,

$$\vec{E}_{yagi} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_1 \left( 1 + \frac{I_2}{I_1} e^{jks \sin \phi} \right)$$

*FA*  
 $\frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$  i

$$V_3(\phi) = -j30 \frac{e^{-jkd}}{d} h \left[ 1 - \frac{Z_{12}}{Z_{22}} e^{jks \sin \phi} \right]$$

e) Para obtener la impedancia de entrada de la antena Yagi en recepción debemos

calcular el cociente  $Z_{in} = -\frac{V_{ca}}{I_{cc}}$

En primer lugar calculamos  $V_{ca}$ , lo que implica que  $I_1=0$ :

Teniendo en cuenta que  $I_3=1$ ,

$$V_{ca} = V_1 = Z_{12}I_2 + Z_{13}$$

$$0 = Z_{22}I_2 + Z_{23}$$

$$\text{Despejando, } V_{ca} = -\frac{Z_{23}Z_{12}}{Z_{22}} + Z_{13}$$

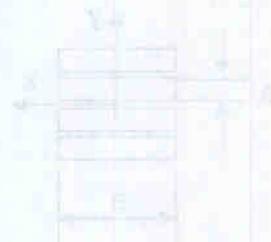
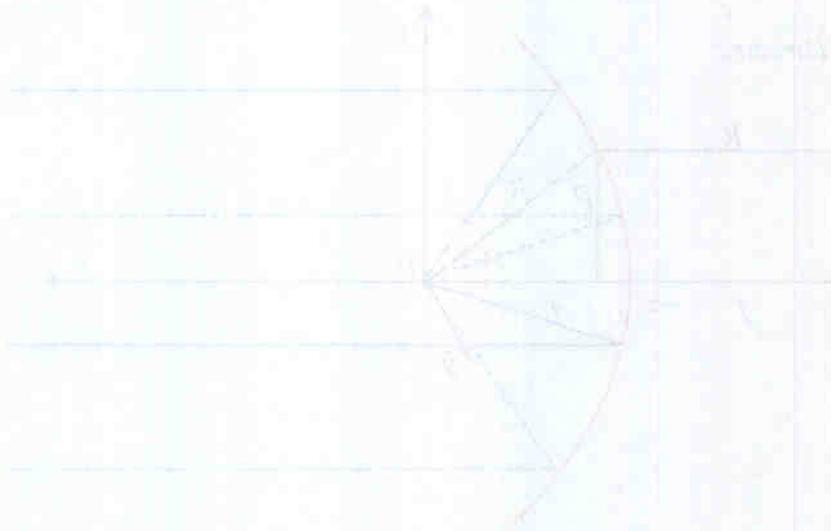
A continuación calculamos la corriente en cortocircuito  $I_{cc} = -I_1$ . Ahora  $V_1=0$

$$0 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}$$

$$0 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}$$

$$\text{Despejando, } I_{cc} = -I_1 = \frac{Z_{13}Z_{22} - Z_{12}Z_{23}}{Z_{21}Z_{12} - Z_{11}Z_{22}}$$

La impedancia resultante del cociente de ambas cantidades es  $Z_m = -\frac{V_{ca}}{I_{cc}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$



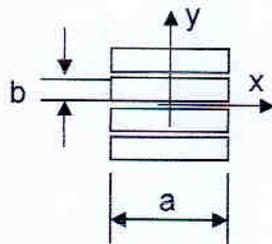
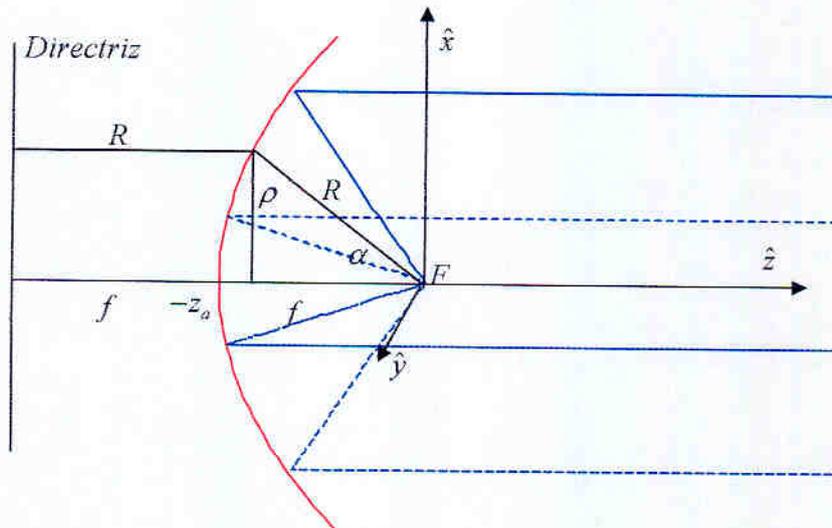
## PROBLEMA 2

Un reflector parabólico con simetría de revolución tiene una distancia focal  $f=30\lambda$  y diámetro  $D$ . El reflector se alimenta en su foco con una agrupación de 4 guías de onda que propagan el modo fundamental  $TE_{10}$ .

Las dimensiones de las guías son  $a=2\lambda$ ,  $b=\lambda/2$ . El espaciado de las guías es  $\lambda/2$ . El polinomio de la agrupación es:

$$p(z) = 1 + 2z + 2z^2 + z^3$$

- Obtenga los ceros del polinomio de la agrupación de las 4 guías de onda. Represente gráficamente dicho factor de array a partir de la situación de los ceros (2 puntos).
- Obtenga una expresión para el factor de array tomando como origen de coordenadas el centro de la agrupación. Represente el diagrama de radiación de la agrupación, calculando el ancho de haz entre ceros. (2 puntos)
- Obtenga una expresión para los campos radiados por la agrupación de 4 guías en todo el espacio (sin reflector). (2 puntos)
- Calcule el ancho de haz entre ceros de la agrupación de guías en el plano E y en el plano H. (2 puntos)
- Calcule el diámetro que debe tener el reflector para que el cero de radiación del diagrama en el plano H coincida con el borde del reflector. (2 puntos)



$$R = \frac{f}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$(z + z_a) = f \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\rho = 2f \tan \frac{\alpha}{2}$$

## SOLUCIÓN PROBLEMA 2

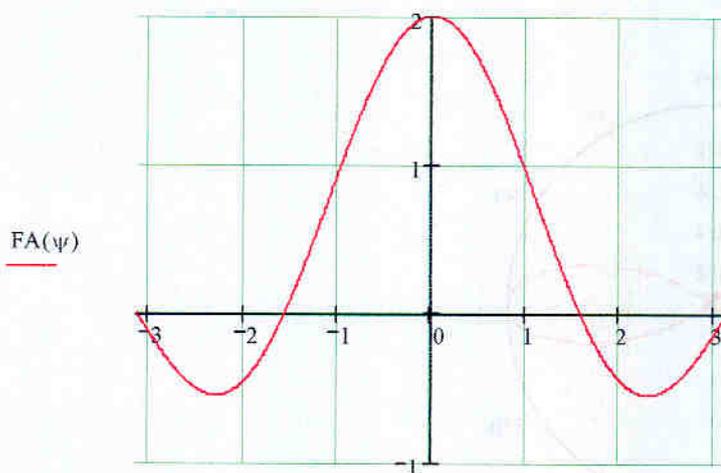
### a) **Ceros del polinomio**

El polinomio se puede descomponer como el producto de dos polinomios unifomes. Tendrá 3 ceros situados sobre el círculo unidad en  $120^\circ, 180^\circ$  y  $240^\circ$

$$p(z) = (1 + 2z + 2z^2 + z^3) = (1 + z)(1 + z + z^2) = (z - e^{j\pi}) \left( z - e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) \left( z - e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right)$$

### **Representación gráfica del factor de la agrupación**

El Factor de la agrupación se puede representar gráficamente a partir de los ceros del polinomio.



### b) **Factor de array**

Tomando como referencia el centro de la agrupación, el polinomio es

$$p(z) = \left( z^{\frac{3}{2}} + 2z^{\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}} \right) = 2 \left( z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} \right) + \left( z^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} \right) =$$

El factor de la agrupación se puede calcular como

$$FA(\psi_y) = 4 \cos\left(\frac{\psi_y}{2}\right) + 2 \cos\left(3\frac{\psi_y}{2}\right)$$

También es válida la siguiente solución

$$p(z) = \left( z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}} \right) (z^{-1} + 1 + z)$$

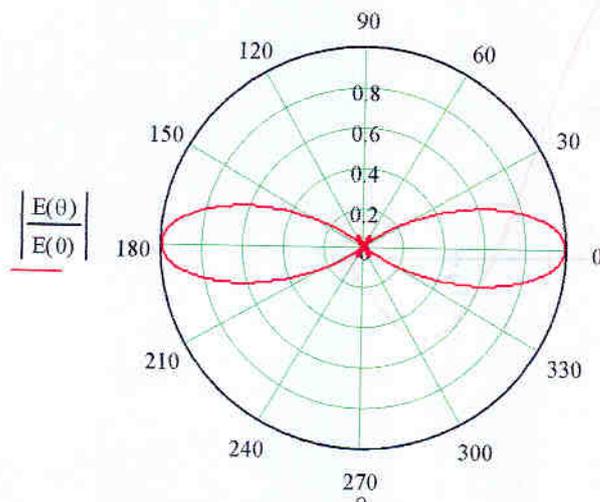
$$FA(\psi_y) = \cos\left(\frac{\psi_y}{2}\right) (1 + 2 \cos \psi_y)$$

$$\psi_y = k_y \frac{\lambda}{2} = \pi \sin \theta \sin \phi$$

### Diagrama de radiación de la agrupación de 5 antenas.

Los ceros del factor de array están situados en  $120^\circ$  y  $-120^\circ, 180^\circ$ .

Los ceros corresponden a un ángulo en el espacio real, en el plano YZ  $\theta = 41.81^\circ$ . El ancho de haz es el doble  $83.621^\circ$



### c) Campos radiados por una guía (por las 4 guías)

Una guía equivale a una apertura con polarización vertical y distribución coseno en el eje x y uniforme en el y

$$E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_0}$$

$$Z_0 = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

Los campos radiados por una apertura con polarización vertical son

$$E_{\theta} = j \frac{e^{-jk_r}}{2\lambda r} \sin \phi \left( \frac{\eta}{Z_0} \cos \theta + 1 \right) \iint_{s'} E(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

$$E_{\phi} = j \frac{e^{-jk_r}}{2\lambda r} \cos \phi \left( \frac{\eta}{Z_0} + \cos \theta \right) \iint_{s'} E(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

La transformada de fourier bidimensional se puede calcular como el producto de dos transformadas unidimensionales. En el eje y hay que incluir el factor de array.

$$\iint_{s'} E(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' = E_0 \int_{x'} f(x') e^{jk_x x'} dx' \int_{y'} g(y') e^{jk_y y'} dy'$$

$$F(k_x, a) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x') e^{jk_x x'} dx' = \frac{\pi}{2} a \frac{\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{k_x a}{2}\right)^2}$$

$$G(k_y, b) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g(y') e^{jk_y y'} dy' = b \frac{\sin\left(\frac{k_y b}{2}\right)}{\left(\frac{k_y b}{2}\right)} FA\left(k_y \frac{\lambda}{2}\right)$$

### Anchos de haz

En el **plano E** el ancho de haz entre ceros será el calculado para el diagrama del array, dado que la transformada de la función uniforme no tiene ningún cero en el margen visible ya que el argumento nunca llega a valer  $\pi$ .

$$\frac{\sin\left(\frac{k_y b}{2}\right)}{\left(\frac{k_y b}{2}\right)}$$

$$\frac{k_y b}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \sin \theta \sin \phi = \frac{\pi}{2} \sin \theta \sin \phi$$

Por lo tanto el ancho de haz es el calculado previamente  $83.621^\circ$

En el **plano H** el primer cero de la transformada se tiene para

$$\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) = 0 \quad \frac{k_x a}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cos \phi \frac{2\lambda}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) = 48.59^\circ$$

El ancho de haz es el doble:  $97.181^\circ$

### Diámetro del reflector

La relación entre el diámetro y la distancia focal es

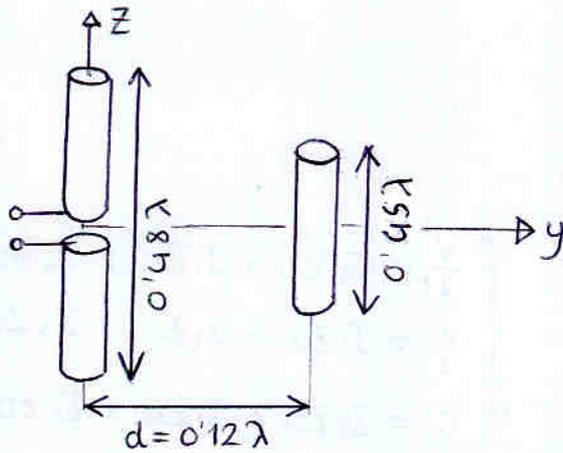
$$\frac{D}{2} = 2f \tan \frac{\beta}{2}$$

Dicho ángulo debe coincidir con el nulo de radiación en el plano H.

$$\beta = 48.59^\circ$$

$$D = 54.17 \lambda$$

# Problema. Antena Yagi



$$\begin{aligned} Z_{11} &= 75.8 + j14 \Omega \\ Z_{22} &= 60.6 - j29.6 \Omega \\ Z_{12} &= 52 - j21.6 \Omega \end{aligned}$$

a) Hallar  $\frac{I_2}{I_1}$  y  $Z_{in}$

$$\begin{cases} V_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} \\ V_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22} \end{cases} \xrightarrow{V_2=0} \begin{aligned} I_1 Z_{21} &= -I_2 Z_{22} \rightarrow \frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = -0.77 \angle -2.7 \text{ rad} \\ \frac{V_1}{I_1} &= Z_{11} + I_2 \frac{Z_{12}}{I_1} \rightarrow Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} = 38 \Omega \end{aligned}$$

b) Diagrama de radiación suponiendo  $H_1 = H_2 = \lambda/4$

$$\vec{E}_{\frac{\lambda}{2}} = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\theta}$$

$$FA = 1 + \frac{I_2}{I_1} e^{jk_y d} \quad \begin{aligned} k_y &= k \cdot \sin \theta \sin \phi \\ d &= 0.12 \lambda \end{aligned}$$

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{\frac{\lambda}{2}} \cdot FA(k_y)$$

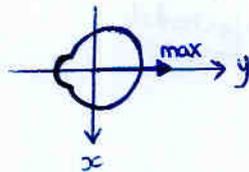
c) Diagrama plano H

Por lo que sabemos de la Yagui, será el plano XY ( $\theta = \pi/2$ )

$$FA|_{\theta=\pi/2} = 1 + 0.77 e^{-j2.7} e^{j0.24\pi \sin \phi}$$

$$E_{\frac{\lambda}{2}}|_{\theta=\pi/2} = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I_m \quad (\text{cte. con } \phi)$$

Dando valores



$\Delta\theta_{-3dB}$

$$FA_{max} = FA|_{\theta=\pi/2, \phi=\pi/2} = 1 + 0.77 e^{-j2.7} e^{j0.24\pi} e^{\textcircled{1}}$$

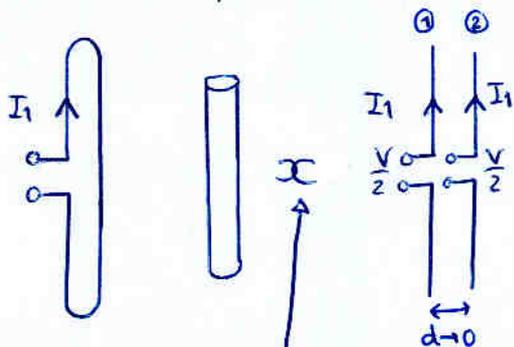
$$FA_{3dB} = \frac{FA_{max}}{\sqrt{2}} \rightarrow \Delta\theta_{3dB} \approx 12^\circ$$

$$FBR = 20 \log \left| \frac{FA_{max}}{FA|_{\theta=\pi/2, \phi=3\pi/4}} \right| = 8.3 \text{ dB}$$

$$l_{ejmax} = \frac{N_{max}}{I_{in}} = \frac{\left(\frac{N \lambda}{2} / max\right) |FA|_{max}}{I_{in}} \approx \frac{\lambda}{\pi}$$

$l_{ejmax} \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{\pi}$

d) Tenemos dipolo doblado



suponemos que el modo línea de tx del dipolo doblado se anula

$$\begin{cases} V_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} + I_3 Z_{13} \\ V_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22} + I_3 Z_{23} \\ V_3 = I_1 Z_{31} + I_2 Z_{32} + I_3 Z_{33} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = V_2 = \frac{V}{2} \\ I_1 = I_2 \quad | \quad V_3 = 0 \end{cases}$$


---


$$\begin{cases} Z_{11} = Z_{22} \\ Z_{12} = Z_{21} = Z_{11} \\ Z_{13} = Z_{23} \end{cases}$$

$d \rightarrow 0$

con todas esas igualdades se obtiene

$$\begin{cases} \frac{V}{2} = I_1 Z_{11} + I_1 Z_{11} + I_3 Z_{13} \\ \frac{V}{2} = I_1 Z_{11} + I_1 Z_{11} + I_3 Z_{13} \\ 0 = I_1 Z_{13} + I_1 Z_{13} + I_3 Z_{33} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{V}{2} = 2I_1 Z_{11} + I_3 Z_{13} \\ 0 = 2I_1 Z_{13} + I_3 Z_{33} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{I_3}{I_1} = - \frac{2Z_{13}}{Z_{33}}$$

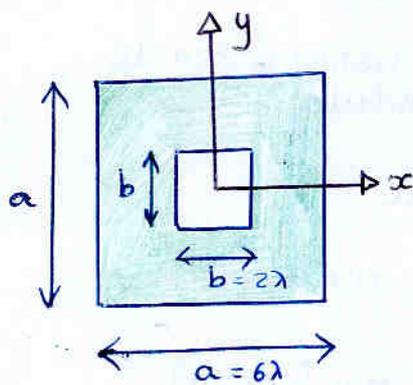
$$\Rightarrow \begin{aligned} V &= 4I_1 Z_{11} + 2I_3 Z_{13} \\ \frac{V}{I_1} &= 4Z_{11} + 2 \frac{I_3}{I_1} Z_{13} \\ &= 4Z_{11} - 4 \frac{Z_{13}^2}{Z_{33}} \end{aligned}$$

$$Z_{in} = 4 \left[ Z_{11} - \frac{Z_{13}^2}{Z_{33}} \right]$$

↑  
efecto del dipolo doblado

↑  
efecto del director

**Problema : bloqueo de una apertura cuadrada**



$$\vec{E} = E_0 \hat{x}$$

calcular NLPS en Plano E

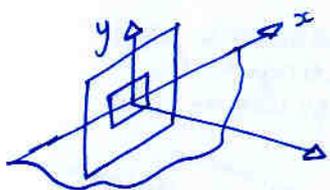
Polarización en  $\hat{x}$



$$E_0 = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \cos\phi (\cos\theta + 1) \iint_{s'} E_{ap}(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

$$E_\phi = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \sin\phi (\cos\theta) \iint_{s'} E_{ap}(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

Como sólo me piden cálculos en el Plano E, voy a particularizar el plano E desde el principio



Plano E  $\rightarrow \phi = 0, 2\pi \left\{ \begin{array}{l} \cos\phi = 1 \\ \sin\phi = 0 \end{array} \right\}$

$$k_x = k \sin\theta \cos\phi = k \sin\theta$$

$$k_y = k \sin\theta \sin\phi = 0$$

Además  $E_\phi$  se anula y sólo queda  $E_0$

$$E_0|_{\text{plano E}} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (\cos\theta + 1) \cdot \iint_{s'} E_{ap}(x', y') e^{j \underset{k \sin\theta}{k_x} x'} e^{j \underset{0}{k_y} y'} dx' dy'$$

en este problema puedo ignorar el diagrama de la apertura elemental. Domina la TF bidimensional

$$E_0|_{\text{plano E}} \propto \iint_{s'} E_{ap}(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

TF. uniforme (tablas)

$$\propto \iint_{s_a} E_0 e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' - \iint_{s_b} E_0 e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

$$\propto E_0 \cdot \left[ \underbrace{a \frac{\sin(k_x a/2)}{k_x a/2}}_{F(k_x, a)} \cdot \underbrace{a \frac{\sin(k_y a/2)}{k_y a/2}}_{G(k_y, a)} - \underbrace{b \frac{\sin(k_x b/2)}{k_x b/2}}_{F(k_x, b)} \cdot \underbrace{b \frac{\sin(k_y b/2)}{k_y b/2}}_{F(k_y, b)} \right]$$

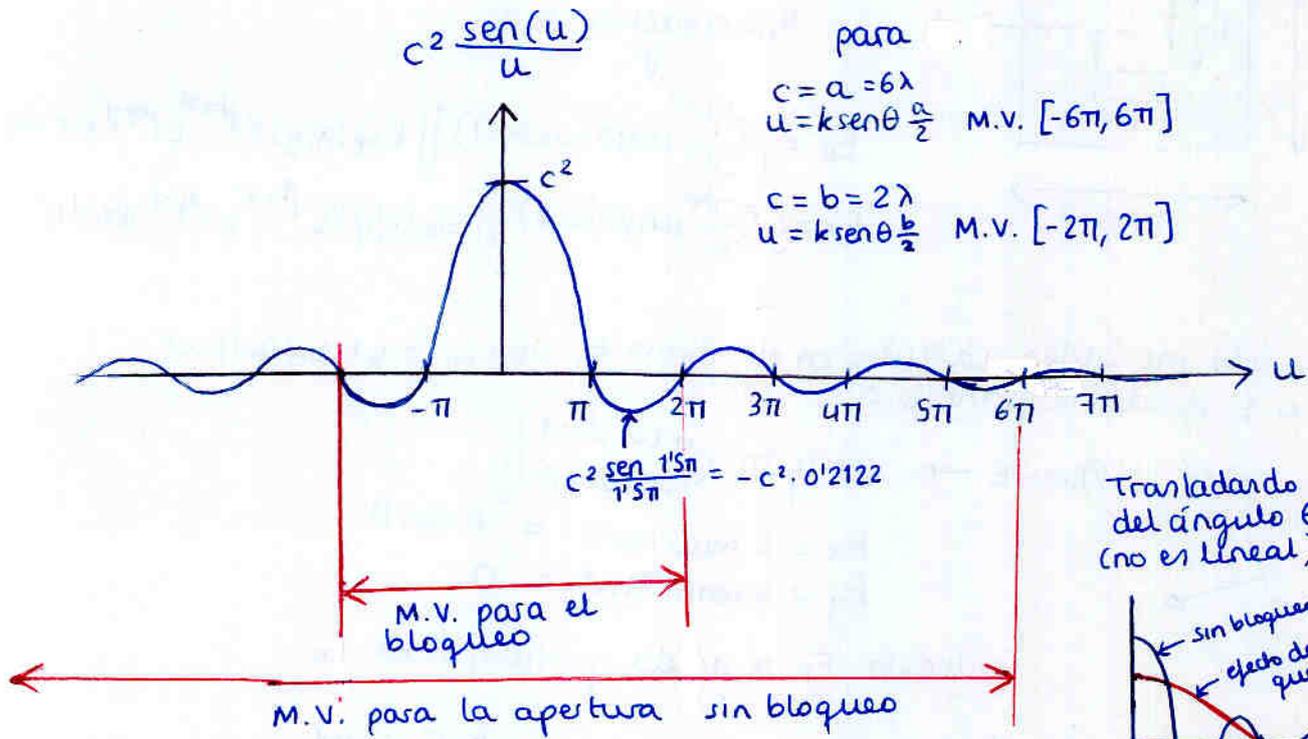
como  $k_x = k \sin\theta$  } Plano E (i)  
 $k_y = 0$

$$\propto E_0 \cdot \left[ F(k \sin\theta, a) \cdot \underbrace{G(0, a)}_{=a} - F(k \sin\theta, b) \cdot \underbrace{G(0, b)}_{=b} \right]$$

(comprobar con el límite) (i)

$$E_{\theta} |_{\text{plano}} \propto E_0 \left[ a^2 \frac{\text{sen}(k \text{sen} \theta \frac{a}{2})}{k \text{sen} \theta \frac{a}{2}} - b^2 \frac{\text{sen}(k \text{sen} \theta \frac{b}{2})}{k \text{sen} \theta \frac{b}{2}} \right]$$

⚠ Hay que restar con SIGNO antes de poder aplicar el módulo



Trasladando al eje del ángulo  $\theta$  (no es lineal)



Para la apertura sin bloqueo:

lóbulo principal en  $k \text{sen} \theta \frac{a}{2} = 0 \rightarrow$  valor  $a^2$

lóbulo secundario en  $k \text{sen} \theta \frac{a}{2} = 6\pi \text{sen} \theta = 1.5\pi$

$\hookrightarrow$  ángulo  $\Rightarrow \text{sen} \theta = \frac{1.5}{6} \rightarrow \theta = \text{sen}^{-1}(\frac{1.5}{6}) = 0.2527 \text{ rad}$

$\hookrightarrow$  valor  $\Rightarrow a^2 \frac{\text{sen } 1.5\pi}{1.5\pi} = -0.2122 a^2$

Para el bloqueo

lóbulo principal  $\rightarrow$  valor  $b^2$

lóbulo secundario

sabiendo  $\theta = 0.2527 \text{ rad} \rightarrow k \text{sen}(\theta) \frac{b}{2} = \frac{\pi}{2}$

valor:  $b^2 \frac{\text{sen } \pi/2}{\pi/2} = 0.6366 b^2$

miramos el efecto del bloqueo en el ángulo al cual estaba el lóbulo secundario de la apertura sin bloqueo (que no coincide con el verdadero lóbulo secundario de esta función)

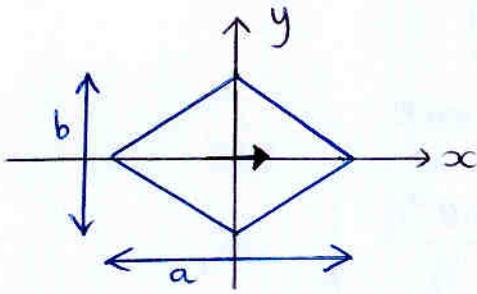
Para la resta (i.e. diagrama real)

lóbulo principal: valor:  $a^2 - b^2 = (6^2 - 2^2)\lambda^2 = 32\lambda^2$

lóbulo secundario: valor:  $|-0.2122a^2 - 0.6366b^2|$   
 $= (6^2 \cdot 0.2122 + 2^2 \cdot 0.6366)\lambda^2$   
 $= 10.19\lambda^2$

$$NLPS = 20 \log \frac{32\lambda^2}{10.19\lambda^2} = 9.94 \text{ dB} //$$

**Problema: Apertura Romboidal**



$$\vec{E}_{ap} = E_0 \hat{x} \text{ (uniforme)}$$

a) Directividad

$$D_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \text{Area} \cdot \eta_{il} = \frac{2\pi}{\lambda^2} ab$$

$\uparrow$   
 $\eta_{il} = 1$  por ser una distribución uniforme  
 $\frac{1}{2} ab$

b) Hallar el campo en el plano E

$$E_{\theta} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \cos \phi (\cos \theta + 1) \iint_S E(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

$$E_{\phi} = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \sin \phi (\cos \theta) \iint_S E(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

como es dificil, sustituimos las condiciones del plano E antes de integrar

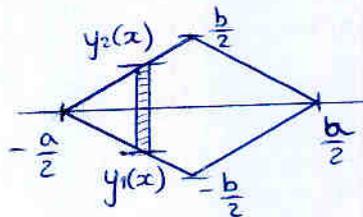
Plano E  $\Rightarrow \phi = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos \phi = 1 \\ \sin \phi = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_x = k \sin \theta \\ k_y = 0 \end{cases}$       componente  $E_{\phi}$  se anula



Por tanto queda

$$E_{\theta}|_{\text{plano E}} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (\cos \theta + 1) \iint_{S'} E(x', y') e^{jk_x x'} dx' dy'$$

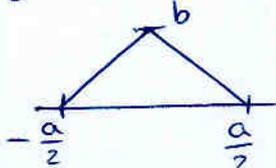
$$\iint_{S'} E(x', y') e^{jk_x x'} dx' dy'$$



$$= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} E_0 e^{jk_x x'} dy' dx' = \int_{-a/2}^{a/2} E_0 e^{jk_x x'} \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy' \right] dx'$$

$\underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy'}_{y_2(x) - y_1(x)}$

$$= E_0 \int_{-a/2}^{a/2} \underbrace{(y_2(x) - y_1(x))}_b e^{jk_x x'} dx' = E_0 b \frac{a}{2} \left( \frac{\sin(k_x a/4)}{k_x (a/4)} \right)^2$$



TF de una triangular. Lo tenemos en tablas

Por tanto

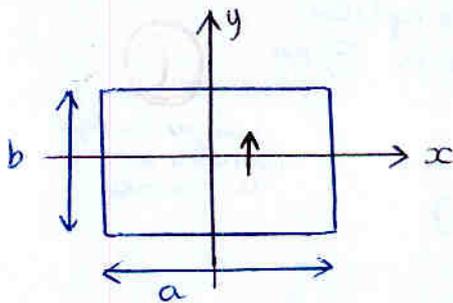
$$E_{\theta} |_{\text{plano E}} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (\cos \theta + 1) \cdot E_0 b \frac{a}{2} \left( \frac{\text{sen}(kx \frac{a}{2})}{kx \frac{a}{2}} \right)^2$$

y como en el plano E  $k_x = k \text{ sen } \theta$

$$\vec{E} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} E_0 b \frac{a}{2} \underbrace{(\cos \theta + 1)}_{\substack{\text{m\u00e1ximo} = 2 \\ \text{en } \theta = 0}} \underbrace{\left( \frac{\text{sen}(k \text{ sen } \theta \frac{a}{2})}{k \text{ sen } \theta \frac{a}{2}} \right)^2}_{\text{m\u00e1ximo} = 1 \text{ en } \theta = 0} \hat{\theta}$$

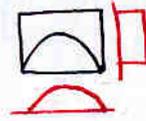
$$\vec{E} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} E_0 b a \underbrace{\frac{(\cos \theta + 1)}{2} \left( \frac{\text{sen}(k \text{ sen } \theta \frac{a}{2})}{k \text{ sen } \theta \frac{a}{2}} \right)^2}_{d(\theta)} \hat{\theta}$$

Problema: Apertura multimodo



$$a = b = 10\lambda$$

$$\vec{E}_{10} = E_{10} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{y}$$



$$\vec{E}_{20} = E_{20} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \hat{y}$$



Hallar el diagrama para cada modo

Como es polarización en  $\hat{y}$

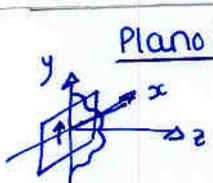
$$E_{\theta} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \sin\theta \left(\frac{a}{2\lambda} \cos\theta + 1\right) \cdot \iint_{S'} E(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

$$E_{\phi} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \cos\theta \left(\frac{a}{2\lambda} + \cos\theta\right) \cdot \iint_{S'} E(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

Esta es la parte interesante

Modo 10

$$\begin{aligned} \iint_S E(x', y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' &= E_0 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TF de coseno}}}{F(k_x, a)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TF de uniforme}}}{G(k_y, b)} \\ &= E_0 \cdot a \frac{\pi}{2} \frac{\cos(k_x a/2)}{(\frac{\pi}{2})^2 - (k_x a/2)^2} \cdot b \frac{\sin(k_y b/2)}{k_y b/2} \end{aligned}$$



Plano E:

$$\phi = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \cos\phi = 0 \\ \sin\phi = 1 \end{cases}$$

$E_{\phi} = 0$   
sólo queda  $E_{\theta}$

$$\begin{aligned} k_x &= k \sin\theta \cos\phi = 0 \longrightarrow F(k_x, a) = \frac{2a}{\pi} \\ k_y &= k \sin\theta \sin\phi = k \sin\theta \longrightarrow G(k_y, b) = b \frac{\sin(k \sin\theta b/2)}{k \sin\theta b/2} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\vec{E}_{\text{plano E}} = \left[ E_0 \cdot \frac{2a}{\pi} \cdot b \frac{\sin(k \sin\theta b/2)}{k \sin\theta b/2} \right] j \frac{e^{-jkr}}{r 2\lambda} (1 + \cos\theta) \hat{\theta}$$

Plano H:

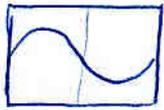
$$\phi = 0 \begin{cases} \cos\phi = 1 \\ \sin\phi = 0 \end{cases} \longrightarrow E_{\theta} = 0$$

$$\begin{aligned} k_x &= k \sin\theta \cos\phi = k \sin\theta \longrightarrow F(k_x, a) = a \frac{\pi}{2} \frac{\cos(k \sin\theta a/2)}{(\frac{\pi}{2})^2 - (k \sin\theta a/2)^2} \\ k_y &= k \sin\theta \sin\phi = 0 \longrightarrow G(k_y, b) = b \end{aligned}$$

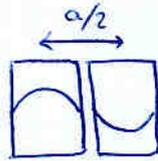
Por tanto:

$$\vec{E}_{\text{plano H}} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (1 + \cos\theta) \left[ E_0 \cdot a \frac{\pi}{2} \frac{\cos(k \sin\theta a/2)}{(\frac{\pi}{2})^2 - (k \sin\theta a/2)^2} \cdot b \right]$$

Modo 20



$\times$



Es un array de dos aperturas, pero podemos aplicar el factor de array sólo a  $F$ , no a todo el campo,

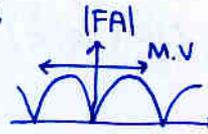


aunque luego resulta ser lo mismo

$$E_{z0} \cdot F(k_x, a/2) \cdot FA(\psi_x) \cdot G(k_y, b)$$

$$E_{z0} \cdot \frac{a}{2} \frac{\text{sen}(k_x a/4)}{k_x a/4} \cdot \underbrace{\left[ 1 - e^{jk_x a/2} \right]}_{e^{jk_x a/4} \left[ e^{-jk_x a/4} - e^{jk_x a/4} \right]} \cdot b \frac{\text{sen}(k_y b/2)}{k_y b/2}$$

$$2j \text{sen}(k_x a/4)$$

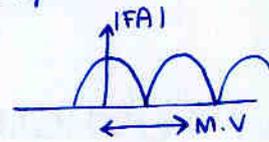


↑  
nota: también podríamos haber considerado array uniforme

$$|FA| = 2 \cos(k_x a/4)$$

$$\text{con } \alpha = \pi$$

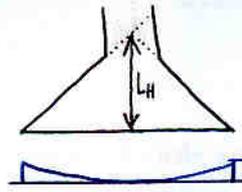
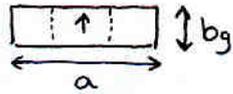
↓  
método más típico



Con ambos métodos lógicamente sale lo mismo

Problema: bocina plano H

$D_H = 16 \text{ dB}$   
 $f = 12 \text{ GHz}$   
 $b_g = 2.5 \text{ cm}$



máximo error de fase  $\pi/16$

a) Hallar la longitud  $a$  y  $L_H$

Sabiendo  $\Delta\phi_H = 2\pi t = \pi/16 \rightarrow t = 1/32 \approx 0$

Además  $D_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a \cdot b_g \cdot \eta_{ilx} \cdot \eta_{ily} = 10^{16/10} \rightarrow a = \frac{10^{16/10} \cdot \lambda^2}{4\pi b_g \cdot \frac{8}{\pi^2}}$

$\downarrow$   
 $\approx 1$  (uniforme)  
 $\approx \frac{8}{\pi^2}$  ya que  $t \approx 0$

y por tanto  $t = \frac{a^2}{8\lambda L_H} \rightarrow L_H = \frac{a^2}{8\lambda t} = 1.53 \text{ m}$

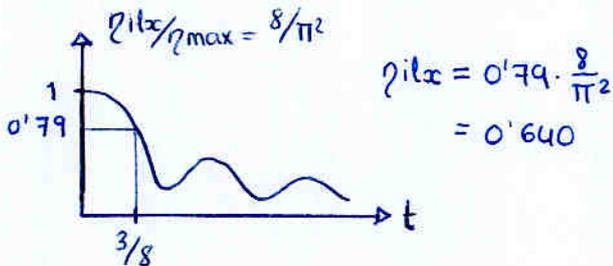
b) Ahora, en lugar de diseñar para mínimo error de fase, diseñar para directividad máxima (manteniendo  $D_H = 16 \text{ dB}$ ) y calcular de nuevo  $a$  y  $L_H$

maximizar directividad  $\rightarrow t = t_{\text{opt}} = \frac{3}{8} = \frac{a^2}{8\lambda L_H} \rightarrow a = \sqrt{3\lambda L_H}$

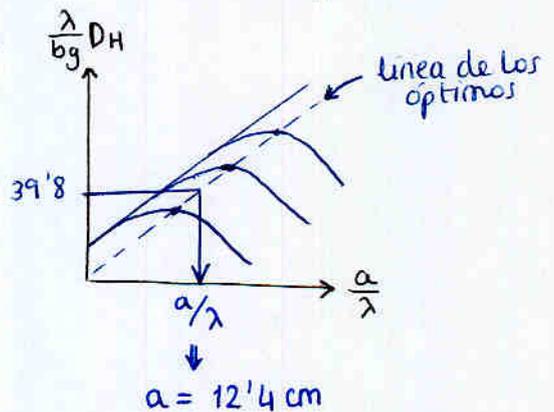
$D_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot a \cdot b_g \cdot \eta_{ilx} \cdot \eta_{ily} = 10^{16}$

mirarlo en gráficas

o bien  $\frac{\lambda}{b_g} D_H = 39.8$



$a = \frac{10^{16} \cdot \lambda^2}{4\pi \cdot b_g \cdot 0.64} = 12.4 \text{ cm}$



$L_H = \frac{a^2}{3\lambda} = 20.5 \text{ cm}$

$\uparrow$   
 $t = 3/8$

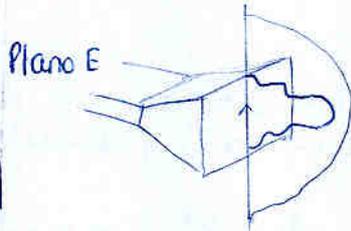
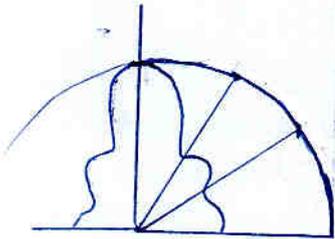
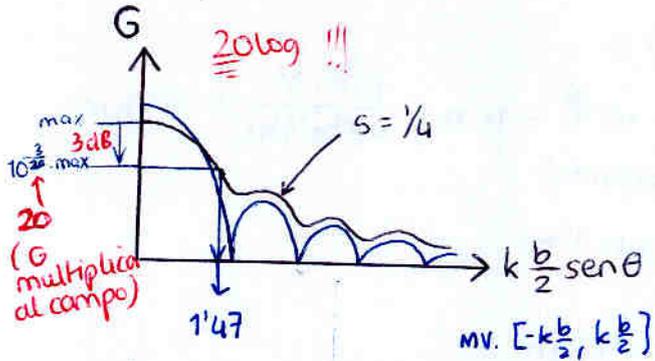
Problema: bocina piramidal

Bocina óptima

$f = 10\text{GHz}$

Diseñar  $b$  y  $L_E$  para  $\Delta\theta_{\text{plano E}} - 3\text{dB} = 20^\circ$

Diagrama universal  
Plano E



$$k \frac{b}{2} \sin \theta_{3\text{dB plano E}} = 1.47$$

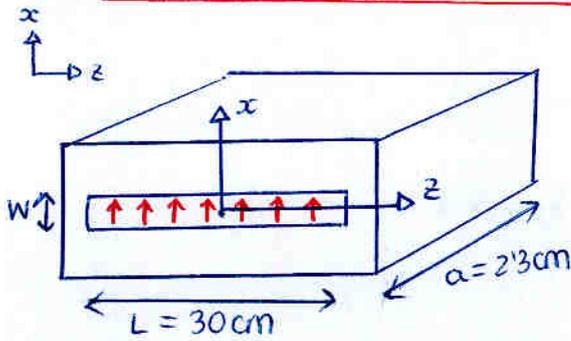
$$b = \frac{2 \cdot 1.47}{k \cdot \sin \theta_{\text{plano E}}}$$

$$= \frac{2 \cdot 1.47}{\frac{2\pi f}{c} \sin 20^\circ} = 41 \text{ cm}$$

$$L_E = \frac{b^2}{2\lambda}$$

$$s = 1/4$$

**Problema: Guia con ranura**



La fase va cambiando según se propaga el campo por la guía

$$\vec{E}_{ap} = \hat{x} E_0 e^{-j\beta z}$$

$$\beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

a) Hallar diagrama  $d(\theta)$

$$\vec{E}_{ap} = \hat{x} E_0 e^{-j\beta z}$$

$$2\vec{M} = 2 \cdot (-\hat{n} \times \vec{E}_{ap}) = 2 \cdot (-\hat{y} \times \vec{E}_{ap}) = \hat{z} 2E_0 e^{-j\beta z}$$

$$\vec{L} = \iint_S \hat{z} 2E_0 e^{-j\beta z'} \underbrace{e^{jk_x x'} e^{jk_z z'}}_1 dx' dz' \quad \text{por ser } w \ll \lambda$$

$$= \hat{z} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} dx' \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} 2E_0 e^{-j\beta z'} e^{jk_z z'} dz'$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{-j\beta z'} e^{jk_z z'} dz' = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{j(k_z - \beta) z'} dz' = \left[ \frac{1}{j(k_z - \beta)} e^{j(k_z - \beta) z'} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{e^{j(k_z - \beta) \frac{l}{2}} - e^{-j(k_z - \beta) \frac{l}{2}}}{j(k_z - \beta)} = 2 \frac{\text{sen}\left[(k_z - \beta) \frac{l}{2}\right]}{(k_z - \beta)} = L \frac{\text{sen}\left((k_z - \beta) \frac{l}{2}\right)}{(k_z - \beta) \frac{l}{2}}$$

Que es justo lo que cabría esperar, la TF de una constante que ya conciamos pero desplazada en frecuencia.

$$\vec{L} = 2E_0 W L \cdot \frac{\text{sen}\left((k_z - \beta) \frac{l}{2}\right)}{(k_z - \beta) \frac{l}{2}} \hat{z}$$

$$\vec{F} = \frac{\epsilon}{4\pi r} e^{-jkr} \vec{L}$$

$$= \frac{\epsilon}{4\pi r} e^{-jkr} 2E_0 W L \frac{\text{sen}\left((k_z - \beta) \frac{l}{2}\right)}{(k_z - \beta) \frac{l}{2}} \hat{z}$$

$$= -\frac{\epsilon}{4\pi r} e^{-jkr} 2E_0 W L \text{sen}\theta \frac{\text{sen}\left((k_z - \beta) \frac{l}{2}\right)}{(k_z - \beta) \frac{l}{2}} \hat{\theta}$$

pasar a esféricas ignorando la componente  $\hat{r}$ .

$$\downarrow$$

$$E_{\theta} = j\omega\eta F_{\theta} \quad E_{\phi} = j\omega\eta F_{\phi} = 0$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\bar{E} &= -j \frac{\omega \mu \epsilon}{4\pi r} \frac{e^{-jkr}}{r} 2E_0WL \frac{\sin((kz-\beta)l/2)}{(kz-\beta)l/2} \sin\theta \hat{\phi} \\ &= -j \frac{k}{\omega\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} 2E_0WL \underbrace{\frac{\sin(kz-\beta)l/2}{(kz-\beta)l/2}}_{d(\theta)} \sin\theta \hat{\phi}\end{aligned}$$

siendo  $kz = k \cos\theta$

b) Apuntamiento para

(i)  $f = 8 \text{ GHz}$

el máximo  $d(\theta_{\max})$  se da cuando

$$(kz - \beta) = 0$$

$$k \cos\theta - \beta = 0$$

$$\theta = \cos^{-1}(\beta/k)$$