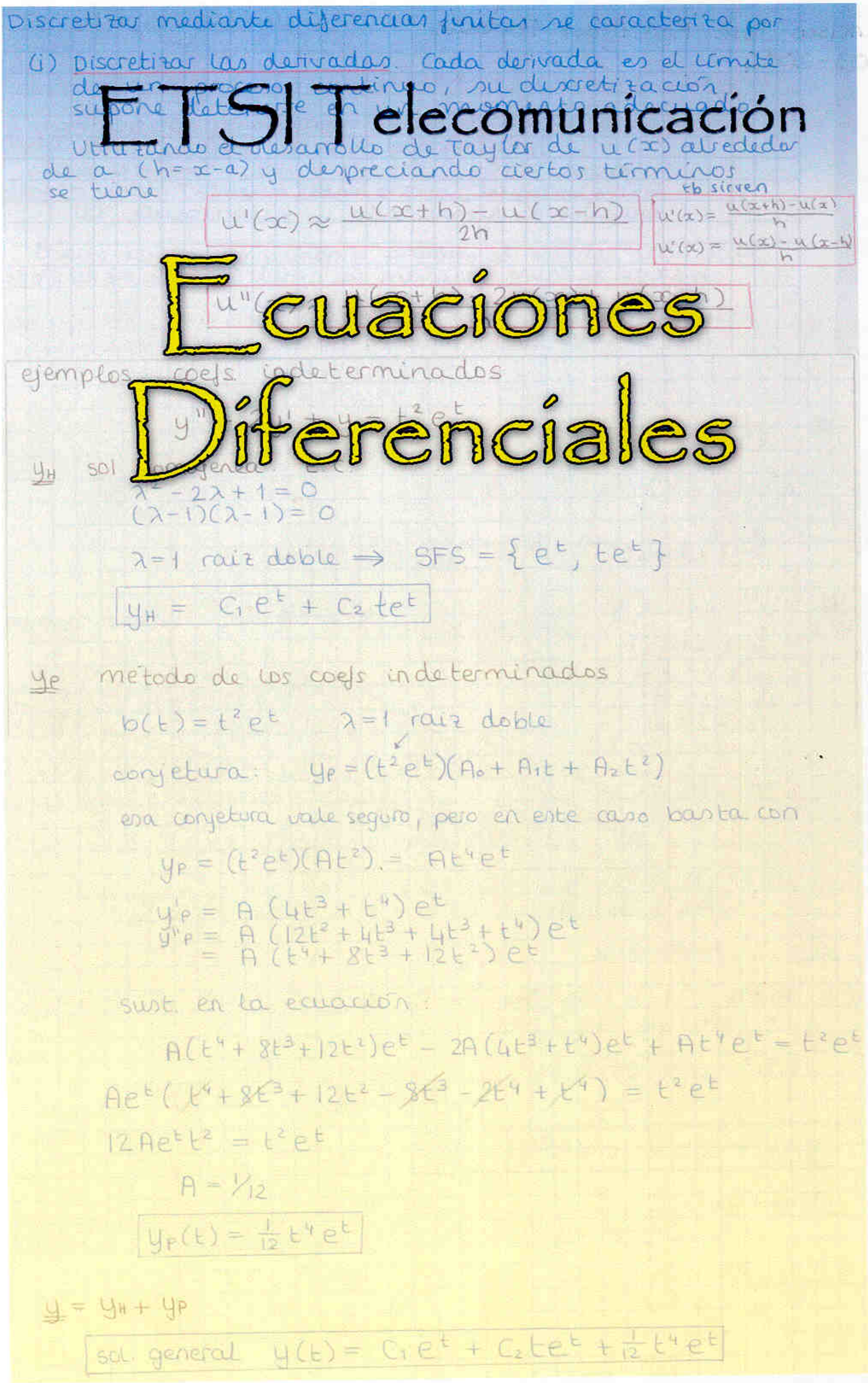
ETSIT elecomunicación

Ecuaciones Diferenciales



Discretizar mediante diferencias finitas se caracteriza por

(i) Discretizar las derivadas. Cada derivada es el límite de un proceso [illegible], su discretización supone [illegible] en un momento adecuado.

Utilizando el desarrollo de Taylor de u(x) alrededor de a (h = x − a) y despreciando ciertos términos se tiene

$$\boxed{u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}}$$

tb sirven

$$u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$
$$u'(x) = \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$$

$u''(x)$ [illegible]

ejemplos coefs indeterminados

$y'' - 2y' + y = t^2 e^t$

$\underline{y_H}$ sol homogénea

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$
$(\lambda-1)(\lambda-1) = 0$

$\lambda = 1$ raiz doble $\Rightarrow$ $SFS = \{e^t, te^t\}$

$$\boxed{y_H = C_1 e^t + C_2 te^t}$$

$\underline{y_p}$ método de los coefs indeterminados

$b(t) = t^2 e^t$ $\quad\lambda = 1$ raiz doble

conjetura: $y_p = (t^2 e^t)(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)$

esa conjetura vale seguro, pero en este caso basta con

$y_p = (t^2e^t)(At^2) = At^4e^t$

$y'_p = A(4t^3 + t^4)e^t$
$y''_p = A(12t^2 + 4t^3 + 4t^3 + t^4)e^t$
$= A(t^4 + 8t^3 + 12t^2)e^t$

sust. en la ecuación:

$A(t^4 + 8t^3 + 12t^2)e^t - 2A(4t^3 + t^4)e^t + At^4e^t = t^2e^t$

$Ae^t(\cancel{t^4} + \cancel{8t^3} + 12t^2 - \cancel{8t^3} - \cancel{2t^4} + \cancel{t^4}) = t^2e^t$

$12Ae^tt^2 = t^2e^t$

$A = 1/12$

$$\boxed{y_p(t) = \frac{1}{12}t^4e^t}$$

$\underline{y} = y_H + y_p$

$$\boxed{\text{sol. general} \quad y(t) = C_1e^t + C_2te^t + \frac{1}{12}t^4e^t}$$

Ecuaciones Diferenciales

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Segundo cuatrimestre de 1er curso
Curso 2003/2004

Contenido

- Referencia rápida
- Apuntes de la asignatura

Fecha de última actualización: 08 Marzo 2008

Tema 2.- EDO de orden 1

Solución → explícita : $y'(t)$

→ implícita (cerrada) : $F(t,y)=0$

Sol. general: ctes. arbitrarias

Sol. part: asignamos valores a esas ctes

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial F/\partial t}{\partial F/\partial y}}$$

- **Variables separables**

$$\int A(t)\,dt = \int B(y)\,dy$$

ej: $y' = 8t^3 y^2$

$y=0$ sol. SINGULAR

$y \neq 0 \rightarrow y'/y^2 = 8t^3 \rightarrow dy/y^2 = 8t^3 dt$

$\rightarrow -\frac{1}{y} = 2t^4 + c$

- **Reducibles a separables**

→ homogéneas: $\boxed{y' = f(y/t)}$ C.V $u = y/t \rightarrow \begin{cases} y = ut \\ y' = u't + u \end{cases}$

→ reducibles a homogéneas: $\boxed{y' = \frac{at+by+c}{dt+ey+f} \begin{matrix}\rightarrow \\ -\end{matrix} \text{2 rectas}}$

- Caso 1: se cortan en (t_0, y_0) $\boxed{\text{C.V.} \begin{cases} t = x + t_0 \\ y = u + y_0 \\ y' = u' \end{cases}}$ sale homogenea

- Caso 2: $c = f = 0$ $y' = \frac{at+by}{dt+ey}$
sin C.V. $= \frac{a + b(y/t)}{d + e(y/t)}$ homogenea

- Caso 3: rectas paralelas $at + by = \lambda(dt + ey)$

$\boxed{\text{C.V. } u = at+by}$

$$\underbrace{u' = a + by' \quad y' = \frac{u+c}{\lambda u + f}}$$

$$u' = a + b\frac{u+c}{\lambda u + f}$$

- **Exactas**

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{supongamos solución } f(t,y) = c \\ \text{derivando (regla de la cadena) } \frac{df(t,y)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \end{array}}$$ dem

si $M + Ny'$ es exacta $\leftrightarrow (M,N) = \Delta f$

$\leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$

$$\boxed{\begin{array}{c} M + Ny' = 0 \\ Mdt + Ndy = 0 \end{array}}$$

entonces $f(t,y) = c$ es solución (hay que utilizar el procedimiento de hallar función potencial)

- **Reducible a exacta** $Mdt + Ndy$ no exacta pero $\mu M dt + \mu N dy$ SI $\boxed{\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}}$

$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}}$ → salen las 4 con un par de pasos hallando $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ y $\frac{\partial \mu}{\partial t}$

- $\mu = \mu(t)$ $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$

- $\mu = \mu(y)$ $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial N/\partial t - \partial M/\partial y}{M}$

derivada respecto de v

- $\mu = \mu(at+by) = \mu(v)$ $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial N/\partial t - \partial M/\partial y}{bM - aN}$

- $\mu = \mu(ty) = \mu(v)$ $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial N/\partial t - \partial M/\partial y}{tM - yN}$

· Ecuaciones lineales de primer orden

$$y' + a(t)y = b(t)$$

$$L(y) = b(t)$$

op. lineal

sol. gen.

$$\boxed{y(t) = e^{-A(t)}\left[\int b(s)e^{A(s)}\,ds + C\right]}$$

Luego se mult por $e^{-A(t)}$

$$A(t) = \int a(t)\,dt$$

· Reducción del orden

- Ausencia de variable dependiente (y)

$$E(t, y', y'') \xrightarrow{\ \boxed{u = y'}\ } E(t, u, u')$$

- Ausencia de variable independiente (t)

$$E(y, y', y'') \xrightarrow{\ \boxed{u = y'}\ } E(y, u, u'u)$$

pasa a ser variable indep

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}$$

$$\boxed{y'' = u'u}$$

• Aplicaciones de las ED orden 1

- Familia de curvas:

ec de la curva → jugar para aislar las ctes → derivar hasta eliminar las constantes

ej: $x^2 + Ky^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2-4}{y^2} = K \rightarrow \frac{2xy^2 - 2yy'(x^2-4)}{y^4} = 0$

$= xy - y'(x^2-4) = 0$

- ED a familia de curvas → resolver la ED

Trayectorias	Ec. familia	ED familia	E.D. de nueva familia
Ortogonales	$F(x,y,K)=0$	$y' = f(x,y)$	$y' = -\frac{1}{f(x,y)}$ y'_0
Oblicuas ángulo α	$F(x,y,K)=0$	$y' = f(x,y)$	$y'_2 = \frac{\operatorname{tg}\alpha + f(x,y)}{1 - \operatorname{tg}\alpha\, f(x,y)}$ y'_0 y'_0
Ortogonales en polares	$F(\theta,\rho,K)=0$	$f(\theta,\rho,\rho')=0$	$\underline{f\left(\theta,\rho,-\frac{\rho^2}{\rho'}\right) = 0}$

factores integrantes: por simple inspección

$$y' + y = \operatorname{sen} t$$

claramente: $\mu(t) = e^t$

$$e^t y' + e^t y = e^t \operatorname{sen} t$$

$$(e^t y)' = e^t \operatorname{sen} t$$

$$e^t y = \int e^t \operatorname{sen} t\,dt$$

$$y = \frac{1}{e^t}\int e^t \operatorname{sen} t\,dt + \frac{c}{e^t}$$

$$y - ty' = 0$$

claramente $\mu(t) = 1/t^2$

$$\frac{y - ty'}{t^2} = 0$$

$$(y/t)' = 0$$

$$y/t = c$$

$$y' + ty = \cos t$$

$$\mu(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$e^{\frac{1}{2}t^2}y' + te^{\frac{1}{2}t^2}y = \cos t\, e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$\left(e^{\frac{1}{2}t^2}y\right)' = \cos t\, e^{\frac{1}{2}t^2}$$

---

otras expresiones sencillas son las que proporcionan las derivadas

$t^2 + y^2 \rightarrow (2t + 2yy')$

$\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{y}\right)$

$\frac{y}{t}$

$\ln(t/y)$

DEM:

$$y' + a(t)y = b(t)$$

$$\mu = e^{\int a(t)\,dt}$$

$$\left(e^{\int a(t)dt}y\right)' = e^{\int a(t)dt}b(t)$$

TEMA 3- Ecs. dif. lineales de orden superior

$$a_n(t)\,y^{(n)} + \dots + a_0(t)\,y = b(t)$$
$$L(y) = b(t)$$

sol. general: $y = y_H + y_P$ → sol. particular de $L(y) = b(t)$

↳ sol general de $L(y) = 0$ (S_H dimensión n)

• Lineal con coeficientes NO constantes

→ y_H: Ecuación homogénea

Dada y_1 solución no nula de $\boxed{\overbrace{1}y'' + P(t)\,y' + Q(t)\,y = 0}$

$$y_2 = v(t)\,y_1 \qquad \boxed{\underline{v(t)} = \int \frac{1}{y_1^2}\left[e^{-\int \underline{P(t)}\,dt}\right] dt}$$

se deben obtener n sols indep (wronskiano) $W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \neq 0$

⚠ → $1\,y'' + P(t)\,y' + Q(t)\,y = R(t)$

→ y_P: Variación de parámetros

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_k' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R(t) \end{pmatrix}}$$

$$v_k' = \frac{R(t)\,W_k(t)}{W(t)}$$

$W_k(t)$ es el det obtenido de $W(t)$ al sustituir k-ésima columna por $0, 0, \dots, R(t)$

$$v_k = \int \frac{R(t)\,W_k(t)}{W(t)}$$

$$y_P = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_n y_n$$

siendo $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$

• Lineal con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b(t)$$

→ y_H: ecuación característica:

· Raices Reales: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{simple}}}{\lambda_1}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mult } K}}{\lambda_2}$ $\quad SFS = \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, t e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda_2 t}\}$

· Raices complejas

$\lambda = \alpha \pm \beta i$ (simple) $\quad SFS = \{e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\}$

$\lambda = \alpha \pm \beta i$ (mult k) $\quad SFS = \{e^{\alpha t}\cos\beta t, t e^{\alpha t}\cos\beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$
$e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t, t e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t\}$

$\rightarrow y_p$: método de los coefts ind.

Casos según $b(t)$

$e^{\lambda t} \rightarrow y_p(t) = At^k e^{\lambda t} \quad (k = m(\lambda))$

$\alpha \operatorname{sen} bt + \beta \cos bt \rightarrow y_p(t) = t^k(A \operatorname{sen} b + B\cos b) \quad (k = m(\pm bi))$

$e^{at}(\alpha \operatorname{sen} bt + \beta \cos bt) \rightarrow y_p(t) = t^k e^{at}(A \operatorname{sen} b + B \cos b) \quad k = m(a \pm bi)$

$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{polinomio grado} \\ m \text{ de } t}}{P_m(t)} \rightarrow y_p = t^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio grado} \\ m \text{ de } t \text{ con coefts} \\ \text{indeterminados}}}{Q_m(t)} \quad k = m(\underline{0})$

combinación lineal

y_{p_1} sol de $L(y) = b_1(t)$
y_{p_2} sol de $L(y) = b_2(t)$

$\Rightarrow y_{p_1} + y_{p_2}$ sol de $L(y) = b_1(t) + b_2(t)$

luego derivar y_p n veces y sustituir en la ecuación

Ecuación de Euler-Cauchy

en cada termino coincide el exponente de la t con el orden de derivación

$$\boxed{a_n t^n y^{(n)} + \dots a_1 t y' + a_0 y = b(t)}$$

$$\boxed{\text{C.V.} \quad t = e^x \qquad x = \ln t \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}}$$

notación $\quad y' = \frac{dy}{dt} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dx}$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{\dot{y}}{t} \rightarrow \boxed{t y' = \dot{y}}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{y}\frac{1}{t}\right) = \frac{d(\dot{y})}{dt}\frac{1}{t} + \dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\frac{d\dot{y}}{dx}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{t^2}\dot{y} = \frac{1}{t^2}(\ddot{y} - \dot{y})$$

$$\boxed{t^2 y'' = (\ddot{y} - \dot{y})}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot{y} - \dot{y}}{t^2}\right) = \frac{1}{t^2}\frac{d}{dt}(\ddot{y} - \dot{y}) + (\ddot{y} - \dot{y})\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t^2}\frac{d}{dx}(\ddot{y} - \dot{y})\frac{dx}{dt} - \frac{2}{t^3}(\ddot{y} - \dot{y})$$

$$= \frac{1}{t^3}(\dddot{y} - \ddot{y}) - \frac{1}{t^3}(2\ddot{y} - 2\dot{y}) = \frac{1}{t^3}(\dddot{y} - 3\ddot{y} - 2\dot{y})$$

$$\boxed{t^3 y''' = (\dddot{y} - 3\ddot{y} - 2\dot{y})}$$

Casos análogos: $\quad (t-1)^2 y'' - 2(t-1)y' - 4y = 0$

C.V. $\quad t - 1 = e^x \rightarrow x = \ln(t-1)$

$(t-1)y' = \dot{y}$
$(t-1)^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$

Aplicaciones de las E.D. de orden n

Vibraciones en sistemas mecánicos

- Libres no amortiguadas: $y'' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} y = 0$

$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \nearrow \lambda_1 = \omega_0 i \searrow \lambda_2 = -\omega_0 i$

$y(t) = C_1 \,\text{sen}\, \omega_0 + C_2 \cos \omega_0$

- Libres amortiguadas:

$y'' + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2b} y' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} y = 0 \qquad \lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0 \nearrow \lambda_1 = -b + \sqrt{b^2-\omega_0^2} \searrow \lambda_2 = -b - \sqrt{b^2-\omega_0^2}$

→ $b^2 - \omega_0^2 > 0$ Sobreamortiguación λ_1 y λ_2 reales

$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

→ $b^2 - \omega_0^2 = 0$ Amortiguación crítica: $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$

$y(t) = e^{-bt}(C_1 + C_2 t)$

→ $b^2 - \omega_0^2 < 0$ Subamortiguación λ_1 y λ_2 complejas

$\lambda_1 = -b + i\alpha$ ($\alpha = \sqrt{a^2-b^2}$)

$\lambda_2 = -b - i\alpha$

$y(t) = e^{-bt}(C_1 \,\text{sen}\, \alpha t + C_2 \cos \alpha t)$

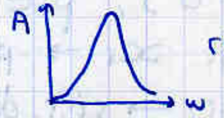
- Forzadas

$y'' + \frac{c}{m} y' + \frac{k}{m} y = F(t)$

$y = \underset{\uparrow \text{casos anteriores}}{y_H} + y_P \leftarrow$ coefts indeterminados: depende de $F(t)$

si $F(t) = R\cos \omega t \qquad y_P = A \,\text{sen}\, \omega t + B \cos \omega t$

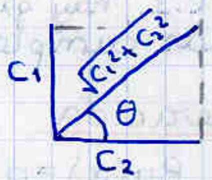
$= \underbrace{\sqrt{A^2+B^2}}_{A} \cos(\omega t - \delta)$



resonancia

Arreglar la solución:

$C_1 \,\text{sen}\, at + C_2 \cos at$



↓

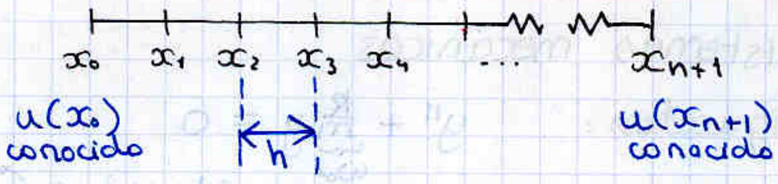
$= \sqrt{C_1^2+C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \,\text{sen}\, at + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \cos at\right)$

$= \sqrt{C_1^2+C_2^2}\,(\,\text{sen}\,\theta \,\text{sen}\, at + \cos\theta \cos at)$

$= \sqrt{C_1^2+C_2^2} \cos(at - \theta)$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \,\text{sen}\, a \,\text{sen}\, b$

Método de diferencias finitas



Para $x_1, x_2, \dots, x_n$ escribir la E.D. a aproximar pero sustituyendo

$$\boxed{\begin{aligned} u'(x) &= \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} \\ u''(x) &= \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} \end{aligned}}$$

tb sirve

$$u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$u'(x) = \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$$

Si falta por ejemplo $u(0)$ se puede obtener mediante la discretización de la primera derivada

$$u'(0) \approx \frac{u(x_1)-u(0)}{h} \xrightarrow[\text{u(0)}]{\text{despejar}} u(0) = -h\,u'(0) + u(x_1)$$

$u'(0)$ '' 0 dato del problema típico

$$u(0) = u(x_1)$$

Queda un sistema de n ecuaciones (no diferenciales)

Métodos de colocación y ponderación

se basan en que una E.D. se puede escribir

$R(u(x)) = 0$; ej: $u'' + u + x = 0$

↳ no necesariamente lineal
↳ incluye el término indep.

Colocación

Hallar sol. aproximada en un espacio vectorial V (dim V finita)

$R(p(x) = 0)$, $p \in V$

se escogen x_i → puntos de colocación

$Rp(x_i) = 0$ → sist. de ecs:

si hay C.I., hay que elegir $p \in V$ que las cumpla

ej $u'' + u + x = 0$
tomamos $p(x)$ polinomio orden 1

$$\begin{cases} p''(x_1) + p(x_1) + x = 0 \\ p''(x_2) + p(x_2) + x = 0 \end{cases}$$

$p(x) = A + Bx$
$p'(x) = B$
$p''(x) = 0$

Ponderación

como $Ru(x) \equiv 0 \to Rp(x) = 0 \to \langle Rp(x), q \rangle = 0$

no requiere puntos de colocación, sólo ciertas q_i, ej: una base de V

$\langle Rp(x), q_i \rangle = 0$ → sist. de ecs.

ej $u'' + u + x = 0$
tomamos $p(x)$ polinomio orden 1

$$\begin{cases} \langle p'' + p + x, 1 \rangle = 0 \\ \langle p'' + p + x, x \rangle = 0 \end{cases}$$

$q_1 = 1$
$q_2 = x$

↖ el producto escalar es una integral

Tema 4. Sistemas de ecuaciones diferenciales

· Forma canónica de Jordan

$$J = P^{-1}AP$$
$$PJ = AP$$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \boxed{J_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

J_i : bloque de Jordan
↳ v.p. en la diagonal
↳ 1's inmediatamente por encima de la diagonal

El v. p. λ aparece en la diagonal de J tantas veces como su multiplicidad algebraica, y en tantos bloques de Jordan como su multiplicidad geométrica.

ej $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -5 & -10 & -3 \end{pmatrix}$ $\lambda = 2$ mult algeb = 3, mult geom = 2, $\vec{v}.p.$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline & 2 & 1 \\ & & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} PJ = AP \\ (P_1\ P_2\ P_3)J = A(P_1\ P_2\ P_3) \end{array}$$

$$(P_1 \mid 2P_2 \mid P_2 + 2P_3) = (AP_1 \mid AP_2 \mid AP_3)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2P_1 = AP_1 \\ 2P_2 = AP_2 \\ P_2 + 2P_3 = AP_3 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} (A-2I)P_1 = 0 \\ (A-2I)P_2 = 0 \\ (A-2I)P_3 = P_2 \end{array}} \begin{array}{l} \rightarrow P_1 = \vec{v}.p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow P_2 = \vec{v}.p_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(A - 2I \mid P_2\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} P_2$$

MUCHAS operaciones ya hechas para hallar $\vec{v}.p.$

si el sistema es incompatible, hay otras posibilidades

$$\begin{array}{l} (A-2I)P_1 = 0 \rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (A-2I)P_2 = 0 \longrightarrow P_2 = a\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2a-b \\ a \\ b \end{bmatrix} \\ (A-2I)P_3 = P_2 \end{array}$$

no sólo los $\vec{v}.p.$ cumplen $(A-\lambda I)x = 0$, sino también todas sus combinaciones lineales

$$\downarrow$$

$$\left(A - 2I \,\middle|\, \begin{array}{c} -2a-b \\ a \\ b \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2a-b \\ 0 & 0 & 0 & a+4a+2b \\ 0 & 0 & 0 & b-10a-5b \end{array}\right)$$

se toman a y b para que el sistema sea compatible

ej $a = 2$, $b = -5$ → $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

tomamos $\alpha = \beta = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow (P_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A veces hay ambiguedades y hay que probar hasta obtener una forma que permita obtener P, esa forma será la correcta

Cadena de Jordan: los vectores de P que se obtienen para un bloque de Jordan, el primero de ellos siempre es un $\vec{v}.p.$

Sist de ecuaciones diferenciales

$$\vec{y}'(t) = \vec{F}(t,\vec{y})$$

Sistema Lineal de 1er orden: $\boxed{X' = AX + G}$ $\boxed{\text{PVI} \quad X(t_0) = X_0}$

- **Desacoplamiento**

→ A diagonalizable

$$X' = AX + b$$
$$X' = SDS^{-1}X + b$$
$$\underbrace{S^{-1}X'} = D\underbrace{S^{-1}X} + S^{-1}b$$
$$Y' = DY + S^{-1}b$$

C.V. $Y = S^{-1}X$

$Y' = S^{-1}X'$

si existe $b \neq \vec{0}$ no hay mas remedio que calcular S^{-1}

como es diagonal, quedan varias ecuaciones tipo $y' + cy = d$ faciles de resolver, y la solución será una diagonal de exponenciales multiplicada por las ctes arbitrarias de la sol. gen (mas la sol part)

$$Y = E(t)\underset{\nwarrow \text{arbitrario}}{C} + D$$

PVI. como $E(t)$ son exponenciales, $E(0) = 1$

$$Y(0) = C + D(0) = Y_0 \xrightarrow[\text{tenemos } X_0 \text{ pero no } Y_0]{}$$

$$\rightsquigarrow C$$

$$Y = E(t)\underset{\nwarrow \text{fijo}}{C} + D$$

- Si existia $b \neq \vec{0}$ tenemos S^{-1}, y por tanto $Y_0 = S^{-1}X_0$
- Si no, $Y_0 = S^{-1}X_0$
  $SY_0 = X_0 \rightarrow$ sist de ecs. $\rightsquigarrow Y_0$

Deshacer el cambio: $Y = S^{-1}X$

$$X = SY$$
$$X = S[E(t)C + D]$$

- **No diagonalizable**

$$X' = AX \qquad \text{C.V. } Y = P^{-1}X$$
$$X' = PJP^{-1}X$$
$$P^{-1}X' = JP^{-1}X$$
$$Y' = \underset{\uparrow \text{ya no es diagonal}}{J}Y$$

ej $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Cada bloque de Jordan comienza con una ecuación sencilla de una sola variable. En las consecutivas ecuaciones se utiliza la solución hallada en la anterior para eliminar la variable (se toma su valor como termino independiente)

Deshacer el cambio $X = PY$

Aplicaciones: Unión de resortes

se plantean las dos ecuaciones

$$m y_1'' + K_1 y_1 = K_2(y_2 - y_1)$$
$$m_2 y_2'' + K_2(y_2 - y_1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} y''_1 \\ y''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{K_1+K_2}{m} & \frac{K_2}{m} \\ \frac{K_2}{m} & -\frac{K_2}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$ sist. de ec. dif.

Sistemas de ecs. dif : Métodos más prácticos

$Y' = AY + G \qquad Y = Y_H + Y_P$

- Y_H : Solución de la homogénea $\qquad \dim(S_H) = n$

→ A diagonalizable (∃ base de $\vec{v}$.p)

$$\boxed{Y_H = C_1 e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}\begin{pmatrix} v_n \end{pmatrix}}$$

Valores propios complejos

De un par de v.p. conplejos conjugados se obtienen 2 soluciones reales

$$e^{\underset{\uparrow}{\lambda} t}\vec{v} = e^{(\alpha+\beta i)t}(\vec{a} + \vec{b}\, i)$$

se escoge uno de los dos, da igual

$$= e^{\alpha t} e^{i\beta t}(\vec{a} + \vec{b}\, i)$$

$$= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)(\vec{a} + \vec{b}\, i)$$

$$= \underbrace{e^{\alpha t}(\vec{a}\cos\beta t - \vec{b}\operatorname{sen}\beta t)}_{Z_1} + i\underbrace{e^{\alpha t}(\vec{b}\cos\beta t + \vec{a}\operatorname{sen}\beta t)}_{Z_2}$$

Dos sols reales: $Y_H = C_1\vec{Z_1} + C_2\vec{Z_2}$

→ No diagonalizable (cadena de Jordan)

$v_1, v_2, \dots, v_m$ vectores de una cadena de Jordan

$$y_1 = e^{\lambda t} v_1$$

$$y_2 = e^{\lambda t}(v_2 + t v_1) \qquad \frac{t^K}{K!} \quad K = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\vdots$$

$$y_m = e^{\lambda t}\left(\frac{v_m}{0!} + \frac{t\, v_{m-1}}{1!} + \dots + \boxed{\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}} v_1\right)$$

son soluciones del SFS.

La solución completa se obtiene haciendo esto con todos los bloques

Transformar soluciones complejas a sols. reales

De cada bloque de Jordan de tamaño n (cadena de Jordan de tamaño n) asociado a un v.p. complejo salen 2n sols reales

NO HACE FALTA CONSIDERAR EL BLOQUE DE JORDAN DEL V.P. CONJUGADO

$$Y_1 = e^{(\alpha+\beta i)t}\begin{pmatrix} V_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{antes}]{\text{igual que}} 2 \text{ soluciones reales } Z_1 \; Z_2$$

$$Y_2 = e^{(\alpha+\beta i)t}\left[\begin{pmatrix} V_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} V_1 \end{pmatrix}\right] = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\operatorname{sen}\beta t)\left[(\vec{a} + \vec{b} i) + t(\vec{c} + \vec{d} i)\right]$$

$$= \underbrace{e^{\alpha t}(\cos\beta t\,\vec{a} + t\vec{c}\cos\beta t - \vec{b}\operatorname{sen}\beta t - \vec{d}\, t\operatorname{sen}\beta t)}_{Z_3}$$

$$+ i\underbrace{e^{\alpha t}(\cos\beta t\,\vec{b} + \vec{d}\, t\cos\beta t + \vec{a}\operatorname{sen}\beta t + \vec{c}\, t\operatorname{sen}\beta t)}_{Z_4}$$

$$Y_H = C_1\vec{Z_1} + C_2\vec{Z_2} + C_3\vec{Z_3} + C_4\vec{Z_4}$$

· Y_P : Solución Particular

→ Variación de parámetros:

n×1

$$Y' = AY + G \longrightarrow Y_H = C_1\vec{Y}_1 + C_2\vec{Y}_2 + \dots + C_n\vec{Y}_n$$

$$Y_H = \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{Y}_1 & \overline{Y}_2 & \dots & \overline{Y}_n \end{pmatrix}}_{M(t)\, n\times n}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$M(t)$: matriz Fundamental de Soluciones

Conjeturamos $\boxed{Y_P = M(t)\cdot U(t)}$ sust. en la ED sabiendo que $M(t)$ por ser matriz. fund. de sols cumple $\boxed{M'(t) = AM(t)}$ queda:

$$M(t)\, U'(t) = G(t) \rightsquigarrow U(t) = \int M^{-1}(t)\, G(t)\, dt$$

$Y_P = MU$

$$\boxed{\underbrace{Y_P}_{n\times 1} = \underbrace{M}_{n\times n}\int \underbrace{M^{-1}G}_{n\times 1}\, dt}$$

muy poderoso pero muy costoso

→ coeficientes Indeterminados $\vec{P}_k(t) = (\vec{v}_0) + (\vec{v}_1)t + \dots + (\vec{v}_k)t^k$

$G(t)$	k	$Y_P(t)$
$\vec{P}_m(t)$	$k = m(0)$	$\vec{P}_{\underline{m+k}}(t)$ → un poco distinto al método para 1 sóla ecuación, que era $t^k P_k$
$e^{\alpha t}\vec{v}$	$k = m(\alpha)$	$e^{\alpha t}[P_k(t)]$
$\cos(\beta t)\vec{v}_1 + sen(\beta t)\vec{v}_2$	$k = m(\pm\beta i)$	$\cos\beta t\,[P_k(t)] + sen\,\beta t\,[P_k(t)]$
$e^{\alpha t}[\cos(\beta t)\vec{v}_1 + sen(\beta t)\vec{v}_2]$	$k = m(\alpha \pm \beta i)$	$e^{\alpha t}[\cos\beta t\,(P_k) + sen\,\beta t\,(P_k)]$

se deriva Y_P tantas veces como sea necesario, se sustituye en la E.D. y se igualan cts. de senos, cosenos, distintos exponentes de t, etc obteniendo sistemas tipo:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

sust 1 en 2, luego gauss y luego sust en 1

$$\boxed{\text{NOTA: } \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}$$

Conversión de sistemas

Ecuac. orden N a sist ord 1 :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(t) \xrightarrow{C.V.} \begin{matrix} \boxed{y_1 = y} \\ y_2 = y' \\ \vdots \\ y_n = y^{n-1} \end{matrix} \longrightarrow \text{sol } Y(t) = \begin{pmatrix} \boxed{y_1} \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

→ sol de la ec. original

Sistema orden N a sist orden 1:

Para y_i con mayor orden de derivación K_i introducimos

$x_1 = y_1$

$x_2 = y_1'$

$\vdots$

$x_{K_1} = y^{(K_1 \boxed{-1})}$

eso para cada variable

queda: $(A)X' = (B)X + (C)$

$$X' = A^{-1}BX + A^{-1}C$$

hay que calcular A^{-1} (recomiendo sistema Paco-Ricardo)

sistema lineal que sabemos resolver

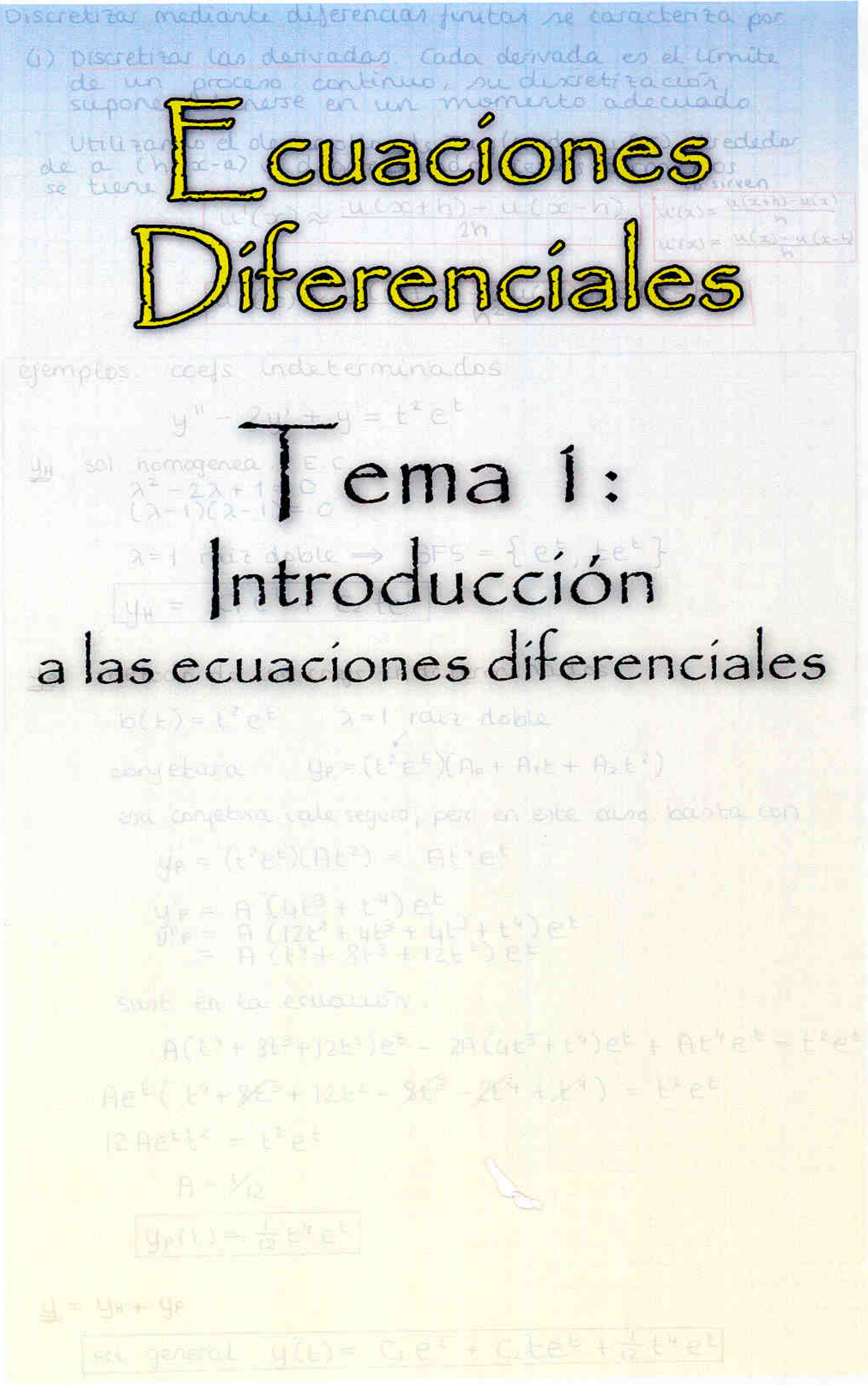
si $\det(A) = 0$ → sistema degenerado puede no equivaler al original

Ecuaciones Diferenciales

Tema 1:

Introducción

a las ecuaciones diferenciales



Discretizar mediante diferencias finitas se caracteriza por

(i) Discretizar las derivadas. Cada derivada es el límite de un proceso continuo, su discretización supone [illegible]nerse en un momento adecuado

Utilizan[illegible]o el de[illegible] alrededor de a (h[illegible]x-a) [illegible]os se tiene [illegible] sirven

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

[illegible]

ejemplos coefs indeterminados

$$y'' - 2y' + y = t^2 e^t$$

$\underline{y_H}$ sol homogenea [illegible]E C

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda-1) = 0$

$\lambda = 1$ raíz doble $\Rightarrow$ SFS $= \{e^t, te^t\}$

$\boxed{y_H = [illegible]}$

[illegible]

$b(t) = t^2 e^t$ $\lambda = 1$ raíz doble

conjetura $y_P = (t^2 e^t)(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)$

esa conjetura vale seguro, pero en este caso basta con

$y_P = (t^2 e^t)(At^2) = At^4 e^t$

$y'_P = A(4t^3 + t^4)e^t$

$y''_P = A(12t^2 + 4t^3 + 4t^3 + t^4)e^t$

$= A(t^4 + 8t^3 + 12t^2)e^t$

sust en la ecuación

$A(t^4 + 8t^3 + 12t^2)e^t - 2A(4t^3 + t^4)e^t + At^4 e^t = t^2 e^t$

$Ae^t(\cancel{t^4} + \cancel{8t^3} + 12t^2 - \cancel{8t^3} - \cancel{2t^4} + \cancel{t^4}) = t^2 e^t$

$12Ae^t t^2 = t^2 e^t$

$A = 1/12$

$\boxed{y_P(t) = \frac{1}{12} t^4 e^t}$

$\underline{y} = y_H + y_P$

$\boxed{\text{sol general } y(t) = C_1 e^t + C_2 te^t + \frac{1}{12} t^4 e^t}$

TEMA 1. INTRODUCCION

- Definición: Ecuación Diferencial:

  Una ecuación diferencial es una relación de igualdad en la que aparecen y se relacionan:
  - variables independientes ej: t
  - variables dependientes (funciones) ej: $y = f(t)$
  - derivadas de estas funciones ej: y'

- EDO: Ecuación Diferencial Ordinaria
  - Sólo hay una variable independiente / sólo hay derivadas respecto de una variable

- EDP: Ecuación en Derivadas Parciales
  - Varias variables independientes / derivadas parciales de esas variables.

ej:

a) $3y' + xy = 0$ EDO $y = f(x)$

b) $\Delta u = 0$ EDP $u = f(x)$

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\right)$

c) $(y^{(IV)})^2 - t = 0$ EDO

- Def: Orden de una ED

  Corresponde al mayor orden de las derivadas que aparecen.

- Def: Solución de una EDO.

  Se dice que $f(t)$ es solución de la EDO $F(t, y, y', \dots, y^{(N)}) = 0$ si f cumple $F(t, f(t), f'(t), \dots, f^{(N)}(t)) = 0 \quad \forall t \in Dom(f)$

ej: EDO: $y' - 3y = e^{2t}$

$y(t) = e^{3t} - e^{2t}$ es solución

- Solución explícita y solución general

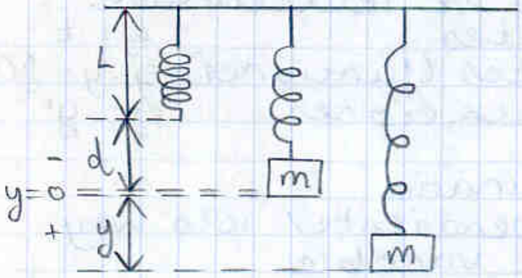
  Si la solución de una E.D. se puede escribir de forma 'simple' y explícita (no siempre)

  Solución general: expresada en términos de ctes. arbitrarias

  Soluciones particulares: cuando asignamos valores a esas cts. arbitrarias.

Las E.D. como descripción de fenómenos físicos

1) MUELLE



$y(t)$: desplazamiento

EC. DIF:

$$my'' + cy' + Ky = 0$$

2) DESINTEGRACIÓN DE UN CUERPO RADIACTIVO

Ley de Soddy $y' = -Ky$

$$\frac{y'}{y} = -K \qquad \frac{dy}{y} = -K\,dt$$

$$\int \frac{y'}{y} = -\int K \qquad \int \frac{dy}{y} = -K\int dt$$

$$\ln|y(t)| = -Kt + C \qquad \ln|y(t)| = -Kt + c$$

$$y(t) = e^{-kt+c}$$

$$y(t) = e^{-kt}e^{c}$$

$$\boxed{\text{Solución general: } y(t) = Ae^{-kt}}$$

condiciones iniciales:

t_0 , $y(t_0) = y_0$ $\qquad y(t) = A'e^{-k(t-t_0)}$

$$y_0 = A'$$

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{-k(t-t_0)} \quad \text{Solución Particular}}$$

PVI: Problema de Valor Inicial

Encontrar una solución $f(t)$ que satisface la EDO $(F(t, y, y', y'', \dots) = 0)$ y una cierta CONDICION INICIAL (C.I.)

$$\begin{cases} F(t, f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)) = 0 \\ \left.\begin{array}{l} f(\underline{t_0}) = C_0 \\ f'(\underline{t_0}) = C_1 \\ f''(\underline{t_0}) = C_2 \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(\underline{t_0}) = C_{n-1} \end{array}\right\} \text{C. I. (n ecuaciones)} \end{cases}$$

PF: Problema de Frontera o Problema de Contorno
PC

Dada una EDO $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

definida $D = [a, b]$

Consiste en obtener $f(t)$ que satisface la EDO y una cierta CONDICION DE CONTORNO (C.C.)

consisten en n-ecuaciones de f y sus derivadas en los puntos a y b.

ej

PVI	PF:
$\begin{cases} y'' = -Ky \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = V_0 \end{cases}$	$y'' = -Ky$ $y(0) = y_0$ $y(T) = y_t$

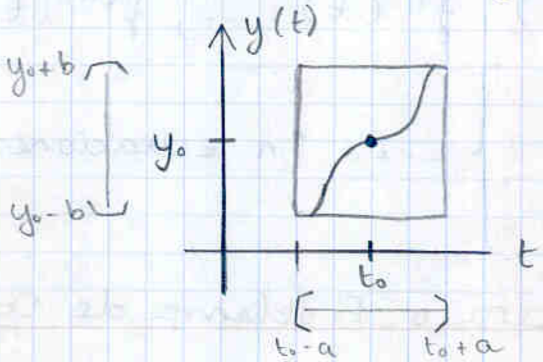
- En general, PVI tiene solución única pero PF no.
- Un PVI puede entenderse como un PF si trabajamos en $[t_0, t_1]$

$\boxed{\text{Teorema: (EDO de orden 1)}}$

Sea $\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t,y) \left(\overset{?}{\equiv} F(t,y,y') = 0 \equiv \underset{\text{orden 1}}{\text{EDO}} \right) \\ y(t_0) \end{array} \right\}$ un PVI

supongamos que $f(t,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas

en $A = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathbb{R}^2$



entonces existe un intervalo $[t_0-h, t_0+h] \subseteq [t_0-a, t_0+a]$

existe solución ÚNICA (además es continua)

---

ejemplo: muelle $m=1$ sin rozamiento

$$y'' = -Ky \text{ en } [0,T]$$

Solución general: $y(t) = A\cos(\sqrt{k}t) + B\,\text{sen}(\sqrt{k}t)$

PVI: $\left. \begin{array}{l} y'' = -Ky \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = V_0 \end{array} \right\}$

$y_0 = y(0) = A \to \boxed{A = y_0}$

$y'(t) = -A\sqrt{k}\,\text{sen}(\sqrt{k}t) + B\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}t)$

$V_0 = y'(0) = B\sqrt{k} \to \boxed{B = \frac{V_0}{\sqrt{k}}}$

Solución particular única:

$$y(t) = y_0\cos(\sqrt{k}t) + \frac{V_0}{\sqrt{k}}\,\text{sen}(\sqrt{k}\,t)$$

PC: $\left. \begin{array}{l} y'' = -Ky \\ y(0) = 0 \\ y(T) = 0 \end{array} \right\}$

consideramos $y_0 = y_T = 0$

$0 = y(0) \overset{=A}{\to} \boxed{A=0}$

$y(t) = B\,\text{sen}(\sqrt{k}t)$

$0 = y(T) = B\,\text{sen}(\sqrt{k}t)$

o bien $B = 0 \to y(t) = 0$

o bien $\text{sen}(\sqrt{k}T) = 0$

$\sqrt{k}T = n\pi$

$T = \frac{n\pi}{\sqrt{k}}$ $n \in \mathbb{Z}$

nodos normales de oscilación

Demostración

Teorema (aproximaciones de Picard)

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\} \text{ sol. única}$$

$$y_0(t) = y_0$$
$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y_0(u))\, du$$
$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y_1(u))\, du$$
$$\dots$$
$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y_{n-1}(u))\, du$$

$\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de <u>funciones</u> que <u>converge uniformemente</u> a la solución $y(t)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow |y_n(t) - \boxed{y(t)}| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0 \dots]$

ejemplo (desintegración para $K=1$)

$$\left.\begin{array}{l} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \qquad y' = -y \sim y' = f(t,y) \Rightarrow f(t,y) = -y$$

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 = 1 \\ y_1(t) &= y_0 + \int_0^t f(u, y_0(u))\, du \\ &= y_0 + \int_0^t f(u,1)\, du \\ &= y_0 + \int_0^t -1\, du \\ &= 1 - t \\ y_2(t) &= y_0 + \int_0^t f(u, y_1(u))\, du \\ &= y_0 + \int_0^t (u-1)\, du \\ &= 1 - t + \frac{t^2}{2} \\ y_3(t) &= 1 - t + t^2/2 - t^3/6 \\ &\vdots \\ y_n(t) &= 1 - t + t^2/2 - \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + (-t) + \frac{(-t)^2}{2} + \dots + \frac{(-t)^n}{n!} \end{aligned}$$

Polinomio de Taylor de e^{-t}

$y_n(t)$ converge uniformemente a la solución e^{-t}

Observación:

$$\left.\begin{array}{l} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{array}\right\} f(t,y) = 3y^{2/3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y^{1/3}} \text{ no es continua}$$

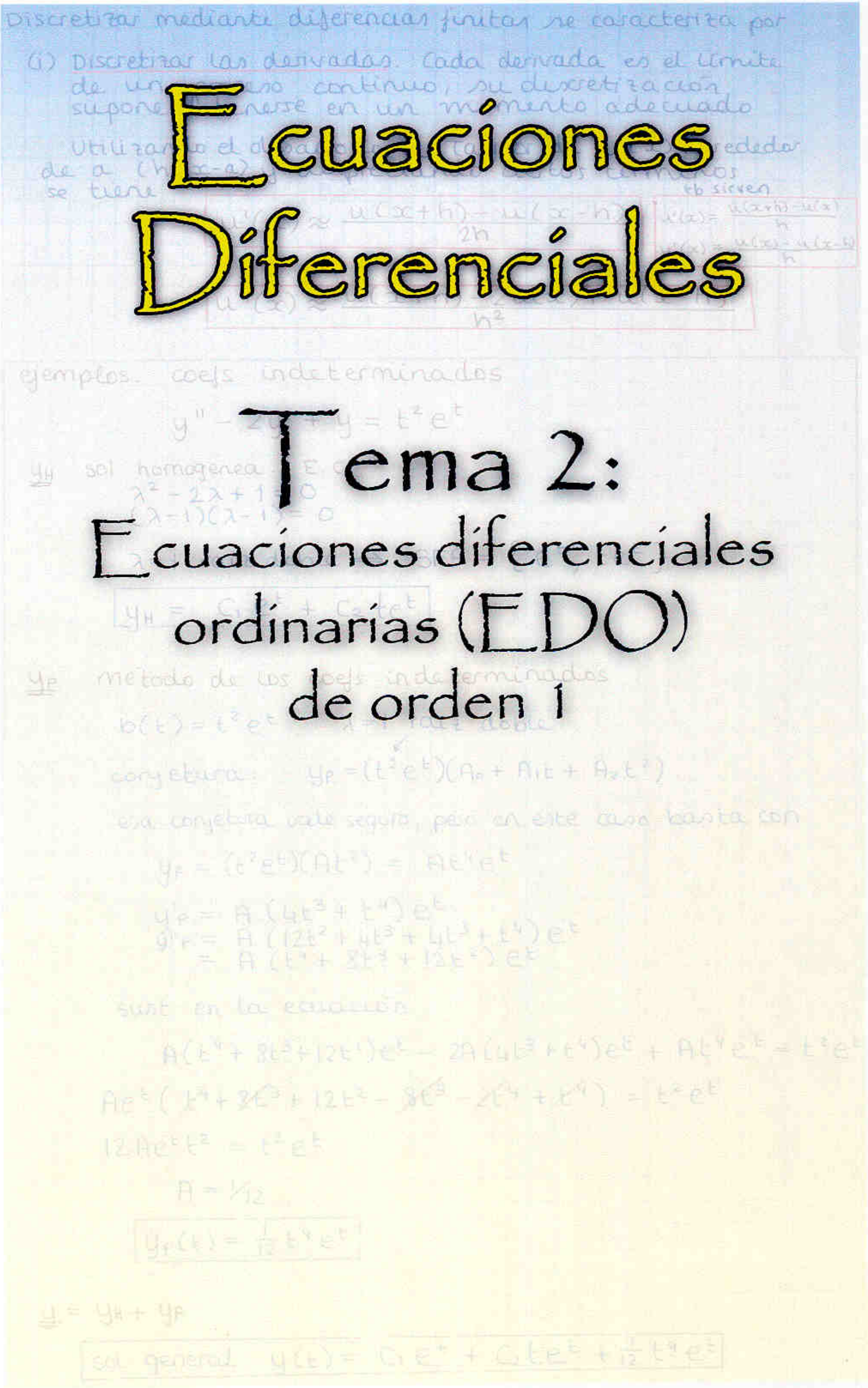
$y = 0$, $y = t^2$ son soluciones PVI

No hay solución única, falla el teorema porque $\frac{\partial f}{\partial y}$ no es continua

Ecuaciones Diferenciales

Tema 2:

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de orden 1



Discretizar mediante diferencias finitas se caracteriza por

(i) Discretizar las derivadas. Cada derivada es el límite de un [illegible] continuo, su discretización supone [illegible] en un momento adecuado

Utilizando el d[illegible] alrededor de a (h [illegible]) [illegible] se tiene

$$\boxed{u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}}$$

tb sirven

$$u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$u'(x) = \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$$

$$\boxed{u''(x) \approx \frac{[illegible]}{h^2}}$$

ejemplos. coefs indeterminados

$$y'' - 2y' + y = t^2e^t$$

$\underline{y_H}$ sol homogenea E. C.

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda-1) = 0$

$$\boxed{y_H = C_1 e^t + C_2 t e^t}$$

$\underline{y_P}$ método de los coefs indeterminados

$b(t) = t^2e^t$ $\lambda = 1$ raíz doble

conjetura: $y_P = (t^2e^t)(A_0 + A_1t + A_2t^2)$

esa conjetura vale seguro, pero en este caso basta con

$y_P = (t^2e^t)(At^2) = At^4e^t$

$y'_P = A(4t^3 + t^4)e^t$

$y''_P = A(12t^2 + 4t^3 + 4t^3 + t^4)e^t$

$= A(t^4 + 8t^3 + 12t^2)e^t$

sust en la ecuación

$A(t^4 + 8t^3 + 12t^2)e^t - 2A(4t^3 + t^4)e^t + At^4e^t = t^2e^t$

$Ae^t(\cancel{t^4} + \cancel{8t^3} + 12t^2 - \cancel{8t^3} - \cancel{2t^4} + \cancel{t^4}) = t^2e^t$

$12Ae^tt^2 = t^2e^t$

$A = 1/12$

$$\boxed{y_P(t) = \frac{1}{12}t^4e^t}$$

$\underline{y} = y_H + y_P$

$$\boxed{\text{sol general } y(t) = C_1e^t + C_2te^t + \frac{1}{12}t^4e^t}$$

TEMA 2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN 1

Una EDO de orden 1 es

$$F(t, y, y') = 0$$

si se puede escribir

$$\boxed{y' = f(t, y)} \quad \text{siendo } f(t,y) = \frac{A(t,y)}{B(t,y)}$$

$$y' = \frac{A(t,y)}{B(t,y)}$$

Notación de Leibniz $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{A(t,y)}{B(t,y)}$

$$\boxed{B(t,y)\,dy = A(t,y)\,dt}$$

- Soluciones "cerradas" (implícitas)

En algunos no se tiene solución explícita, o términos de funciones elementales;
A veces sólo se tiene una solución "cerrada"

$$F(t, y) = 0 \qquad \text{ej} \quad y^3 + y = t^2 + 1$$

De la regla de la cadena:

$$\frac{\partial F}{\partial t} \cdot \cancelto{1}{\frac{\partial t}{\partial t}} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial F/\partial t}{\partial F/\partial y}$$

Definición: Solución de una EDO

sea una EDO $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

se dice que $F(t, y) = 0$ es solución del PVI si

$$\boxed{F(t_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{\partial F/\partial t}{\partial F/\partial y} = f(t,y) = y'}$$

- Bajo ciertas restricciones el teorema de la función implícita asegura que, localmente, podemos despejar "y" en función de "t"
  $y = y(t)$

- Si no hay solución ni siquiera cerrada se recurre a métodos numéricos.

Ecuaciones de variables separables

Definición:

Una EDO de orden 1 $E(t, y, y') = 0$ se dice de variables separables si se puede escribir

$$\boxed{A(t)\,dt = B(y)\,dy}$$

Solución general: $\int A(t)\,dt = \int B(y)\,dy$

---

ejemplo: $y' - 4t^3 + 2 = 0$, $y(1) = 4$

$y' = 4t^3 - 2$ $dy = (4t^3 - 2)\,dt$

DIRECTO

$\int dy = \int (4t^3 - 2)\,dt$

SOL. GEN. $\boxed{y(t) = t^4 - 2t + C}$

PVI:

$y(1) = 4 = 1 - 2 + C$

$\boxed{C = 5}$

SOL. PART. $\boxed{y(t) = t^4 - 2t + 5}$

$\int_{4}^{y} dz = \int_{1}^{t} (4s^3 - 2)\,ds$

$y - 4 = t^4 - 2t + 1$

$\boxed{y(t) = t^4 - 2t + 5}$ SOL. PART.

Comprobación

¿$y'(t) = 4t^3 - 2$? SI

¿$y(1) = 4$? SI

---

ejemplo: $y' = 8t^3 y^2$

si $y = 0$ ⇒ solución singular (no se obtiene dando valores a las ctes en la solución general)

si $y \neq 0$ → podemos dividir $\frac{y'}{y^2} = 8t^3$ $\frac{dy}{y^2} = 8t^3\,dt$

$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 8t^3\,dt$

$-\frac{1}{y} = 2t^4 + C$

SOL GEN $\boxed{y(t) = \frac{-1}{2t^4 + C}}$

Comprobación: ¿$y'(t) = 8t^3y^2$? SI

---

ejemplo: PVI: $\begin{cases} yy' = t^2/y+4 \\ y(3) = 2 \end{cases}$

$y(y+4)y' = t^2 \rightarrow y(y+4)\,dy = t^2\,dt \rightarrow \int y(y+4)\,dy = \int t^2\,dt$

$\rightarrow \frac{y^3}{3} + 4\frac{y^2}{2} = \frac{t^3}{3} + C \rightarrow y^3 + 6y^2 = t^3 + C$

$F(t,y) = \boxed{y^3 + 6y^2 - t^3 + C = 0}$ SOLUCIÓN CERRADA $F(t,y) = 0$

COND. INICIAL $2^3 + 6 \cdot 2^2 - 3^3 + C = 0$ $C = -5$

$\boxed{y^3 + 6y^2 - t^3 - 5 = 0}$ SOL. PARTICULAR

Comprobación:

¿ $-\frac{\partial F/\partial t}{\partial F/\partial y} = y' = \frac{t^2}{y(y+4)}$?

$-\frac{-3t^2}{3y^2 + 12y} = \frac{t^2}{y^2 + 4y} = \frac{t^2}{y(y+4)}$ SI

ECUACIONES REDUCIBLES A SEPARABLES

a) Ecuaciones homogeneas

Una EDO de orden 1 se dice homogenea si se puede escribir

$$\boxed{y' = f(y/t)}$$

cambio de variable : $u = y/t$

$$\underbrace{y' = f(u) \qquad \begin{matrix} y = ut \\ y' = u't + u \end{matrix}}$$

$u't + u = f(u)$ E.D. de V. S.

$u't + u = f(u) \longrightarrow u't = f(u) - u \longrightarrow t\frac{du}{dt} = f(u) - u$

para $u - f(u) = 0 \Rightarrow$ comprobar si es solución singular

para $u - f(u) \neq 0 \Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dt}{t}$

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|t| + C$$

se resuelve en u y se deshace el cambio $u = y/t$

ejemplo

(1) $t^2 y' = y^2 + ty$

$$\underbrace{y' = \frac{y^2}{t^2} + \frac{y}{t} \rightarrow \left(u = \frac{y}{t}\right) \rightarrow y' = u^2 + u \quad \begin{matrix} y = ut \\ y' = u't + u \end{matrix}}_{u't + u = u^2 + u}$$

$u't + u = u^2 + u \rightarrow u't = u^2 \xrightarrow[(u\neq 0)]{} \frac{u'}{u^2} = \frac{1}{t} \rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{dt}{t}$

$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dt}{t} \rightarrow -\frac{1}{u} = \ln t + C \rightarrow u = -\frac{1}{\ln t + C}$

si $u = 0 \rightarrow y = 0$

$\rightarrow$ es solución singular

$$\boxed{y(t) = -\frac{t}{\ln t + C}}$$ SOL GEN

ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y \\ y(3) = 0 \end{array}\right\}$$

$$y' = \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$$

$$y' = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

$$u = y/x$$

$$y = ux$$

$$\underbrace{y' = \sqrt{1+u^2} + u \qquad y' = u'x + u}$$

$$u'x + u = \sqrt{1+u^2} + u$$

$$u'x = \sqrt{1+u^2} \qquad \text{E.D. de V.S.}$$

para $\sqrt{1+u^2} \neq 0$ ↑ SIEMPRE

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{arc senh}(u) = \ln|x| + c$$

$$u = \text{sen h}(\ln|x| + c)$$

deshaciendo el cambio $y = u \cdot x$

SOL. GEN. $\boxed{y = x \,\text{sen h}(\ln|x| + c)}$

$$y(3) = 0$$

$$3\,\text{senh}(\ln 3 + c) = 0$$

$$\ln 3 + c = 0$$

$$c = -\ln 3$$

$\boxed{y = x\,\text{sen h}\left(\ln\frac{|x|}{3}\right)}$ SOL. PART.

b) Ecuaciones reducibles a homogeneas

Una EDO de orden 1 se dice reducible a homogenea si se escribe

$$\boxed{y' = \frac{at + by + c}{dt + ey + f}} \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

- Caso 1.

Las rectas $\left.\begin{matrix} at + by + c = 0 \\ dt + ey + f = 0 \end{matrix}\right\}$ se cortan en un punto (t_0, y_0)

$$\boxed{\text{Cambio de variable} \quad \begin{matrix} t = x + t_0 \\ y = u + y_0 \end{matrix}} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = t - t_0 \\ u = y - y_0 \end{matrix}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} y = u + y_0 \\ y' = u' \qquad\qquad y' = \dfrac{at + by + c}{dt + ey + f} \end{matrix}}$$

$$u' = \frac{at + by + c}{dt + ey + f} = \frac{a(x + t_0) + b(u + y_0) + c}{d(x + t_0) + e(u + y_0) + f}$$

$$= \frac{(ax + bu) + (at_0 + by_0 + c)}{(dx + eu) + \underbrace{(dt_0 + ey_0 + f)}}$$

las rectas en el punto (t_0, y_0)
Ambas valen cero
$\left.\begin{matrix} at + by + c = 0 \\ dt + ey + f = 0 \end{matrix}\right\}$ en (t_0, y_0)

$$u' = \frac{ax + bu}{dx + eu}$$

$$u' = \frac{a + b(u/x)}{d + e(u/x)}$$

Homogenea:
$z = \frac{u}{x}$
$u = zx$
$\frac{a + b(z)}{d + e(z)} = u' = z'x + z$

- Caso 2. $c = f = 0$

$$y' = \frac{at + by}{dt + ey} = \frac{a + b(y/t)}{d + e(y/t)} \quad \text{Homogenea}$$

- Caso 3 Las rectas son paralelas (son proporcionales)

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \lambda(at + by) = dt + ey$

$$\boxed{\text{Cambio de variable} \quad u = at + by \rightarrow \lambda u = dt + ey}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} u = at + by \\ u' = a + by' \qquad y' = \dfrac{u + c}{\lambda u + f} \end{matrix}}$$

$$u' = a + b\frac{u + c}{\lambda u + f} \quad \text{E.D. de V.S.}$$

ejemplo CASO 1. $(t-2)dy - (2t+y-1)dt = 0$

$$y' = \frac{2t+y-1}{t-2} \qquad \left.\begin{array}{l}2t+y-1=0\\ t-2=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}y_0=-3\\ t_0=2\end{array}$$

cambio de variable $\begin{array}{l}t = x+2\\ y = u-3\end{array}$

$$y' = \frac{2(x+2)+(u-3)-1}{(x+2)-2} \qquad y' = u'$$

$$y' = \frac{2x+\cancel{4}+u-\cancel{4}}{x}$$

$$\underbrace{y' = \frac{2x+u}{x}}_{u' = \frac{2x+u}{x} = 2+\frac{u}{x}}$$

Homogenea

$u' = 2+ u/x$. Cambio variable $z = u/x$

$u' = 2+z$

$zx = u$

$$2+z = z'x+z \longleftarrow u' = z'x+z$$

$$2 = z'x$$

$$z' = 2/x \to \int dz = \int 2/x \, dx \to \underline{z = \ln x^2 + c}$$

deshacer cambio: $u = xz$

$$u = x\ln x^2 + cx$$

$u = y+3 \quad x = t-2$

$$\boxed{y+3 = (t-2)\ln(t-2)^2 + K(t-2)}$$

ejemplo CASO 3 $\quad y' = \dfrac{2t+y-1}{4t+2y-4}$

las rectas $\left.\begin{array}{l}2t+y-1=0\\ 4t+2y-4=0\end{array}\right\}$ son paralelas $(4t+2y) = 2(2t+y)$

Cambio de variable $u = 2t+y$

$$\underbrace{y' = \frac{u-1}{2u-4} \qquad \begin{array}{l}u' = 2+y'\\ y' = u'-2\end{array}}$$

$$u' = \frac{u-1}{2u-4}+2 = \frac{u-1+4u-8}{2u-4} = \frac{5u-9}{2u-4}$$ E.D. de V.S.

- si $5u-9 \neq 0 \quad \frac{2u-4}{5u-9}du = dt \to \int \frac{2u-4}{5u-9}du = \int dt$

$$\to t = 2\int\frac{u-2}{5u-9}du = \frac{2}{5}\int\frac{5u-10}{5u-9}du = \frac{2}{5}\int\frac{5u-9\ \ -1}{5u-9}du$$

$$= \frac{2}{5}\left[\int du - \int\frac{du}{5u-9}\right] = \frac{2}{5}u - \frac{2}{25}\ln|5u-9| + K$$

deshacer el cambio: $u = 2t+y$

$$\boxed{t = \frac{2}{5}(2t+y) - \frac{2}{25}(\ln|10t+5y-9|) + K}$$ SOL GEN

- si $5u-9 = 0 \to$ comprobar si es solución singular

$$u = 9/5 \to y = u-2t = 9/5 - 2t$$

sust en ec. inicial $y' = \dfrac{2t+y-1}{4t+2y-4}$

$$-2 = \frac{2t+(9/5-2t)-1}{4t+2(9/5-2t)-4}$$

$$-2 = \frac{4/5}{-2/5}$$

$$-2 = -2 \Rightarrow \boxed{y = 9/5 - 2t \text{ es sol. singular}}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Definición

Una EDO de la forma

$$M(t,y) + N(t,y)y' = 0$$

$$\equiv M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$$

se dice exacta si

$$\exists F(t,y) \;/\; \nabla F = (M,N) \quad \text{Función Potencial}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M, \; \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

Supongamos que $F(t,y) = C$ es solución cerrada de una EDO.

Regla de la cadena (derivando respecto a t)

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

$$= M + N y' = 0$$

Teorema

Supongamos que

$\exists M, N \;/\; \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial t}$ son continuas en un rectángulo $R \subseteq \mathbb{R}^2$

$$M \cdot dt + N \cdot dy \text{ es exacta} \Longleftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

ejemplo

$$\underbrace{(2ty^3+2)}_{M}dt + \underbrace{3(t^2y^2+e^y)}_{N}dy = 0$$

Veamos si es exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6ty^2 = \frac{\partial N}{\partial t}$$

ES exacta $\Rightarrow \exists F$ función potencial $\frac{\partial F}{\partial t} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

- $\frac{\partial F}{\partial t} = M = 2ty^3+2$

  $F = \int M\,dt$ (considerando 'y' como una cte)

  $F = \int 2ty^3+2\ dt$

  (cte que depende de 'y')

  $F = t^2y^3 + 2t + \underline{K(y)}$

- $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

  $3t^2y^2 + K'(y) = 3(t^2y^2+e^y)$

  $K'(y) = 3e^y$

  $K(y) = \int 3e^y dy = 3e^y + K$

- $\boxed{t^2y^3 + 2t + 3e^y = C}$ SOL. GENERAL CERRADA

---

ejemplo

$$\underbrace{(x+\operatorname{sen} y)}_{M}dx + \underbrace{(x\cos y - 2y)}_{N}dy = 0$$

Veamos si es exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ES exacta $\Rightarrow \exists F$ función potencial $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

- $\frac{\partial F}{\partial x} = M = x + \operatorname{sen} y$

  $F(t,y) = \int x + \operatorname{sen} y\ dx + K(y)$

  $= \frac{x^2}{2} + x\operatorname{sen} y + K(y)$

- $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

  $x\cos y + K'(y) = x\cos y - 2y$

  $K'(y) = -2y$

  $K(y) = \int -2y\ dy = -y^2 + C$

- $\boxed{\frac{x^2}{2} + x\operatorname{sen} y - y^2 = C}$ SOL. GENERAL CERRADA

FACTORES INTEGRANTES (EDO reducible a exacta)

La ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ no exacta $\left(\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ diremos que es reducible a exacta si $\underset{\text{Factor integrante}}{\exists \mu(x,y)}$ / $\underbrace{\mu M}_{M^*} dx + \underbrace{\mu N}_{N^*} dy = 0$ sea exacta

ejemplo $(y + x^4y^2)\,dx + x\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2yx^4 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 1$ NO ES EXACTA

Tomamos $\mu(x,y) = \frac{1}{(xy)^2}$ como factor integrante

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x^2y} + x^2\right)}_{M^*} dx + \underbrace{\frac{1}{xy^2}}_{N^*} dy = 0$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial y} = -\frac{1}{x^2y^2} = \frac{\partial N^*}{\partial x}$$

ES exacta $\Rightarrow \exists F$ f. potencial / $\frac{\partial F}{\partial x} = M^*$ $\frac{\partial F}{\partial y} = N^*$

- $F = \int M^*\,dx = \int \frac{1}{x^2y} + x^2\,dx + K(y)$
  $= -\frac{1}{xy} + \frac{x^3}{3} + K(y)$

- $\frac{\partial F}{\partial y} = N^*$
  $\frac{1}{xy^2} = \frac{1}{xy^2} + K'(y) \Rightarrow K'(y) = 0 \Rightarrow K(y) = cte$

$$\frac{1}{xy^2} + \frac{x^3}{3} + K = 0 \rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{\frac{x^4}{3} - C\cdot x}}$$ SOL GENERAL

Búsqueda de factores integrantes

$\mu M\,dx + \mu N\,dy$ es exacta

$$\Rightarrow \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}}$$

a) $\mu = \mu(x)$ $\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}\mu = \mu' N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu$$

$$\boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}}{N}}$$

$$\boxed{\ln|\mu(x)| = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx}$$

ejemplo: (factor integrante sólo depende de x)

$$(3x^2y - x^2)\,dx + dy = 0$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ NO ES EXACTA

$$\frac{-\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = \frac{0 + 3x^2}{1} = 3x^2$$ (sólo función de x)

$$\Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = 3x^2 \Rightarrow \ln|\mu(x)| = x^3$$

$$\boxed{\mu(x) = e^{x^3}}$$

$$(3x^2y - x^2)e^{x^3}\,dx + e^{x^3}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2e^{x^3} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ES exacta $\Rightarrow \exists F$ función potencial $\frac{\partial F}{\partial x} = M, \frac{\partial F}{\partial y} = N$

- $F(x,y) = \int (3x^2y - x^2)e^{x^3}\,dx + K(y)$

  $= ye^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3} + K(y)$
- $N = \frac{\partial F}{\partial y}$

  $e^{x^3} = e^{x^3} + K'(y) \longrightarrow K'(y) = 0 \rightarrow K(y) = K$
- $ye^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3} = C$

$$\boxed{y(x) = Ce^{-x^3} + 1/3}$$ SOL GENERAL

b) $\mu = \mu(y) \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0\right)$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow \mu\frac{\partial M}{\partial y} + \mu' M = \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}}$$

ejemplo $\left(2xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + 4x^2y\,dy = 0$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{8xy - 4xy + \frac{2x}{y^3}}{2xy^2 + x/y^2} = \frac{4xy + \frac{2x}{y^3}}{2xy^2 + x/y^2} = \frac{1}{y}\frac{2(2xy^2 + x/y^2)}{(2xy^2 + x/y^2)} - \frac{2}{y}$$ sólo depende de y

$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{2}{y} \rightarrow \ln\mu = 2\ln y \rightarrow \mu(y) = y^2 \rightarrow$ FACTOR INTEGRANTE

$$\underbrace{(2xy^4 + x)}_{M^*}dx + \underbrace{4x^2y^3}_{N^*}dy = 0$$ es EXACTA

$\Rightarrow \exists F$ función potencial $\frac{\partial F}{\partial x} = M^*$ $\frac{\partial F}{\partial y} = N^*$

- $\partial F = M^* dx$

  $F = \int M^* dx + K(y)$

  $F = x^2y^4 + \frac{x^2}{2} + K(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = 4x^2y^3 + K'(y) = N^* = 4x^2y^3$

  $K'(y) = 0$

  $K(y) = K$
- $\boxed{x^2y^4 + \frac{x^2}{2} = C}$ SOL. GENERAL

c) $\mu = \mu(v)$ donde $v = at + by$ (comb. lineal de 't' e 'y')

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \frac{\partial N}{\partial t}\mu$$

donde $\rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \mu' \cdot b$

$\rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \mu' \cdot a$

sustituyendo:

$$\mu' b M + \frac{\partial M}{\partial y} \cdot \mu = \mu' a N + \frac{\partial N}{\partial t}\mu$$

$$\mu'(bM - aN) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{bM - aN}}$$

debe ser función de $v = at + by$
(porque μ y μ' lo son)

ejemplo

$$\underbrace{(t^2 + y^2 + t)}_{M} + \underbrace{(t^2 + y^2 + y)}_{N} y' = 0$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial t} = 2t$ No es exacta

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{bM - aN} = \frac{2t - 2y}{b(t^2+y^2+t) - a(t^2+y^2+y)} \underset{\substack{a=1\\ b=1}}{\overset{\text{para}}{=}} \frac{2(t-y)}{t-y} = 2$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = 2 \longrightarrow \ln \mu = 2v \longrightarrow \mu(v) = e^{2v}$$

deshaciendo el cambio

$\mu = e^{2(t+y)}$ factor integrante

$$\underbrace{e^{2(t+y)}(t^2 + y^2 + t)}_{M} + \underbrace{e^{2(t+y)}(t^2 + y^2 + y)}_{N} y' = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2t^2 e^{2(t+y)} + 2y e^{2(t+y)} + 2y^2 e^{2(t+y)} + 2t e^{2(t+y)}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 2t^2 e^{2(t+y)} + 2y e^{2(t+y)} + 2y^2 e^{2(t+y)} + 2t e^{2(t+y)}$$

es exacta

$\Rightarrow \exists$ F función potencial $\frac{\partial F}{\partial t} = M$ $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

- $\partial F = M \, \partial t$

$$F = \int e^{2(t+y)}(t^2 + y^2 + t)\, dt + K(y)$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{2(t+y)}(t^2 + y^2 + t) - \int \tfrac{1}{2} e^{2(t+y)}(2t+1)\, dt + K(y)$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{2(t+y)}(t^2 + y^2 + t) - \left[\tfrac{1}{4} e^{2(t+y)}(2t+1) - \int \tfrac{1}{2} e^{2(t+y)} dt + K(y)\right.$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{2(t+y)}(t^2 + y^2 + t) - \tfrac{1}{4} e^{2(t+y)}(2t+1) + \tfrac{1}{4} e^{2(t+y)} + K(y)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2(t+y)} \left(t^2 + y^2 + t - \frac{1}{2}(2t+1) + \frac{1}{2} \right) + K(y)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2(t+y)} (t^2 + y^2) + K(y)$$

~~$\cdot \ \frac{\partial F}{\partial y} = 4e^{2(t+y)}(t^2 - 3t + y^2) + 2e^{2(t+y)}(2y) + K'(y)$~~

~~$= 2e^{2(t+y)}(2(t^2 - 3t + y^2) + 2y) + K'(y)$~~

~~$= 2e^{2(t+y)}(2t^2 - 6t + 2y^2 + 2y) + K'(y)$~~

~~$= N = e^{2(t+y)}(t^2 + y^2 + y)$~~

~~$K'(y) + 2e^{2(t+y)}(2t^2 - 6t + 2y^2 + 2y) = e^{2(t+y)}(t^2 + y^2 + y)$~~

~~$K'(y) + 4t^2 - 12t + 4y^2 + 4y = t^2 + y^2 + y$~~

~~$K'(y) = -3t^2 - 3y^2 - 3y + 12t$~~

~~$= -3(t^2 + y^2 + y + 4t)$~~

- $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{2(t+y)}(t^2 + y^2) + 2y\left(\frac{1}{2}e^{2(t+y)}\right) + K'(y)$

  $= e^{2(t+y)}(t^2 + y^2 + y) + K'(y)$

  $= N = e^{2(t+y)}(t^2 + y^2 + y)$

  $\Rightarrow K'(y) = 0 \rightarrow K(y) = K$

- $\boxed{\frac{1}{2}e^{2(t+y)}(t^2 + y^2) = C}$ SOL. GENERAL

d) $\mu = \mu(v)$ donde $v = ty$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \frac{\partial N}{\partial t}\mu$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \mu' t$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \mu' y$$

sust.

$$\mu' t M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu = \mu' y N + \frac{\partial N}{\partial t}\mu$$

$$\mu'(tM - yN) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{tM - yN}}$$

Factores integrantes por simple inspección

reconociendo expresiones familiares obtenidas por derivación

$y' + y = \text{sen}t$

$\mu = e^t$

$e^t y' + e^t y = \text{sen}t$

$(e^t y)' = \text{sen}t$

$y = \left(\int \text{sen}t\, dt + c\right)e^{-t}$

$y - ty' = 0$

$\mu = 1/t^2$

$\frac{y - ty'}{t^2} = 0$

$(y/t)' = 0$

$y = tC$

$y' + ty = \cos t$

$\mu = e^{\frac{1}{2}t^2}$

$(e^{\frac{1}{2}t^2} y)' = \cos t$

$y = \frac{\int \cos t\, dt + c}{e^{\frac{1}{2}t^2}}$

ej

$\frac{\partial}{dt}(t^2 + y^2)$

$\frac{d}{dt}\left(\text{arctg}\,\frac{t}{y}\right)$

$\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{t}{y}\right)$

etc...

ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Definición:

Ec. Lin. de 1er orden es una ED de la forma

$$p(t)\,y' + q(t)\,y = r(t)$$

p, q, r funciones continuas
$p(t) \neq 0$ ∀t en un intervalo

En las aplicaciones aparecen PVI del tipo:

$$\boxed{\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}}$$

Recuerda:
$C[0,b] \equiv \{f : [0,b] \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$
$C^1[0,b] \equiv \{f : [0,b] - \mathbb{R},\ f \text{ y } f' \text{ cont}\}$

Consideramos el operador

$$L : C^1[0,b] \longrightarrow C[0,b] \ :$$

$$L(\underset{C_1}{y}) := \underbrace{y' + a(t)y}_{C}$$

tal que la ecuación se escribe como

$$\boxed{L(y) = b(t)}$$

$L(y) = b(t) \neq 0 \to$ ec. no homogenea
$L(y) = 0 \to$ ec. homogenea asociada

Proposición:

1) L es lineal
2) la solución general se escribe

$$y = \underset{\substack{\text{sol. general}\\ \text{de } L(y)=0}}{y_H} + \underset{\substack{\text{sol. particular}\\ \text{de } L(y)=b(t)}}{y_P}$$

Demostración

1) L es lineal

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ &= (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)' + p(t)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ &= \alpha_1 y_1' + p(t)\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2' + \alpha_2 y_2 \\ &= \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2) \end{aligned}$$

2) La sol general es $y = y_H + y_P$

sea y una sol. cualquiera de $L(y) = q(t)$
dada y_p una sol. particular de $L(y) = q(t)$

$$L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = q(t) - q(t) = 0$$

luego

$L(y - y_p) = 0$ por lo tanto $y_H = y - y_p$

además $y = y_H + y_p$

$$L(y_H) = 0$$
$$L(y) = q(t)$$
$$L(y_H + y_p) = 0 + q(t) = q(t)$$

luego $y_H + y_p$ es una solución de $L(y) = q(t)$

manera lógica →

Factor integrante por simple inspección

$$y' + a(t)y = b(t)$$

$$a(t) = [A(t)]'$$

$$(e^{A(t)}y)' = e^{A(t)}b(t) \qquad \mu = e^{A(t)}$$

Proposición

Sea la ec. $\boxed{\begin{array}{r} y' + a(t)y = b(t) \\ L(y) = b(t) \end{array}}$

su solución general viene dada por

$$\boxed{y(t) = e^{-A(t)}\left[\int b(s)e^{A(s)}\,ds + C\right]}$$

donde $\boxed{A(t) = \int a(t)\,dt}$

hacerlo así mejor →

Demostración:

$$y' + a(t)y = b(t)$$

$$\times e^{A(t)} \qquad \underbrace{e^{A(t)}y' + e^{A(t)}a(t)y}_{(e^{A(t)}\cdot y)'} = e^{A(t)}b(t)$$

$$(e^{A(t)}\cdot y)' = e^{A(t)}b(t)$$

$$e^{A(t)}\cdot y = \int b(s)e^{A(s)}\,ds + C$$

$$\times e^{-A(t)} \qquad y = e^{-A(t)}\int b(s)e^{A(s)}\,ds + C$$

Proposición

La solución del PVI $\left\{\begin{array}{l} y' + a(t)y = b(t) \\ y(0) = y_0 \end{array}\right\}$ a, b continuas en $[-c, c]$

es $y(t) = e^{-A(t)}\left[\int_0^t b(s)e^{A(s)}\,ds + y_0\right]$ donde $A(t) = \int_0^t a(t)\,dt$

la solución es única: $y' = -a(t)y + b(t) = f(t,y) \rightarrow y' = f(t,y)$

$$f(t,y) = -a(t)y + b(t)$$

y como $\frac{\partial f}{\partial y} = -a(t)$ continua; se puede aplicar Tª Picard

ejemplo: $\left\{\begin{array}{l} y' + y = \operatorname{sen} t \\ y(0) = -4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} a(t) = 1 \\ b(t) = \operatorname{sen} t \\ A(t) = \int a(t)\,dt = t \end{array}$

multiplicando por $e^{A(t)} = e^t$

$$e^t y' + e^t y = e^t \operatorname{sen} t \rightarrow (e^t y)' = e^t \operatorname{sen} t \rightarrow e^t y = \int e^t \operatorname{sen} t\,dt$$

$$\int e^t \operatorname{sen} t\,dt = e^t \operatorname{sen} t - \int e^t \cos t\,dt$$

$$= e^t \operatorname{sen} t - \left[e^t \cos t - -\int e^t \operatorname{sen} t\,dt\right]$$

$$2\int e^t \operatorname{sen} t\,dt = e^t(\operatorname{sen} t - \cos t) + C$$

$$y(t) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t) + Ce^{-t} \qquad \text{SOL. GEN.}$$

$y(0) = -4$

$-\frac{1}{2} + C = -4$

$C = -7/2$

$$y(t) = \frac{\operatorname{sen} t - \cos t}{2} - \frac{7}{2}e^{-t} \qquad \text{SOL. PART.}$$

ejercicios:

a) $y' - 4y = e^t \operatorname{sen} t$

b) $\left.\begin{array}{l} y' + ty = \cos t \\ y(0) = a \end{array}\right\}$ $y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left[\int_0^t e^{\frac{s^2}{2}}\cos(s)\,ds + a\right]$ no existe! se deja así

ejercicio: la ecuación $y' + a(t)y = b(t)$ es reducible a exacta

- Comprobar que ∃ f.i. que sólo depende de t
- Calcular el f.i.
- Resolver la ecuación

REDUCCION DEL ORDEN

a) Ausencia de variable dependiente (y) $E(t, y', y'')$

$$E(t, y', y'') = 0 \xrightarrow[u = y']{\text{cambio de variable}} E(t, u, u') = 0 \xrightarrow[\substack{\text{resolver} \\ \text{y deshacer} \\ \text{el cambio}}]{} y(t) = \int u(t)\, dt$$

se puede generalizar

$$E(t, y^{(N)}, y^{(N+1)}) = 0 \xrightarrow[u = y^{(N)}]{\text{cambio de variable}} E(t, u, u')$$

ejemplos $\quad ty'' + 2y' - 4t^3 = 0$

cambio de variable: $\quad u = y'$

$$tu' + 2u - 4t^3 = 0$$
$$u' + \frac{2u}{t} - 4t^2 = 0$$
$$u' + a(t)u + b(t) = 0$$

Factor integrante: $\quad e^{\int a(t)\, dt} = e^{2\ln t} = e^{\ln t^2} = t^2$

$$\underbrace{t^2u' + 2tu}\, - 4t^4 = 0$$
$$[t^2u]' - 4t^4 = 0$$
$$[t^2u]' = 4t^4$$
$$t^2u = \int 4t^4\, dt$$
$$t^2u = \frac{4}{5}t^5 + K$$
$$u = \frac{4}{5}t^3 + \frac{K}{t^2}$$

Deshacer el cambio: $\quad y = \int u\, dt$

$$y = \int \frac{4}{5}t^3 + Kt^{-2}\, dt$$
$$y = \frac{1}{5}t^4 - Kt^{-1} + C$$

$$\boxed{y = \frac{t^4}{5} - \frac{K}{t} + C}$$ SOL. GENERAL

ejemplo: $\quad y^{(5)} - ty^{(4)} = 3t + e^t$

cambio de variable: $\quad u = y^{(4)}$

$$y' - tu = 3t + e^t$$
$$y' + a(t)u = b(t)$$

Factor integrante: $\quad e^{\int a(t)\, dt} = e^{\int -t\, dt} = e^{-\frac{t^2}{2}}$

...

b) Ausencia de variable independiente (t)

$$\boxed{E(y, y', y'')=0} \xrightarrow[u = y']{\text{cambio de variable}} \boxed{E(\underset{\text{variable indep.}}{y}, \underset{\text{variable dep}}{u}, u'u)=0}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = u' \cdot y' = u' \cdot u$$

$$\underset{\text{EDO no lineal}}{E(y, u, u'u)} \xrightarrow{\text{se resuelve}} \underset{\text{SOL. GEN}}{F(u,C)=0} \xrightarrow[\text{cambio}]{\text{deshace el}} F(y', C)=0 \xrightarrow{\text{resolver}} \underset{\text{SOL. GENERAL}}{A(y,t)=0}$$

ejemplo: $y'' - 2yy' = 0$ $\qquad E(y, y', y'') = 0$

Cambio de variable: $u = y' \rightarrow y'' = \frac{\partial}{\partial t}(u) = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = u'y' = u'u$

$$E(y, u, u'u) = 0$$

$$u \cdot u' - 2yu = 0 \qquad \text{(EDO de VS)}$$

$u u' = 2yu$ — si $u=0 \rightarrow$ sol singular $\boxed{y = K}$

— si $u \neq 0$

$$u' = 2y \longrightarrow u = y^2 + C \xrightarrow{\text{deshacer el cambio}} y' = y^2 + C$$

$$\frac{y'}{y^2+C} = 1$$ hay que distinguir casos segun el valor de C

a) $C>0$

$$\int 1 dt = \int \frac{1}{y^2+C} dy \rightarrow t = \int \frac{\sqrt{c}}{c} \frac{1/\sqrt{c}\, dy}{(\frac{y}{\sqrt{c}})^2+1} = \frac{\sqrt{c}}{c} \int \frac{1/\sqrt{c}\, dy}{1+(y/\sqrt{c})^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg}(y/\sqrt{c}) + K = t}$$

b) $C=0$

$$\int 1 dt = \int \frac{1}{y^2} dy \rightarrow t = \int y^{-2} dy = -\frac{1}{y} + K \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{t+K}}$$

c) $C<0$

$$\frac{dy}{y^2+C} = dt$$

$$\frac{1}{y^2+C} = \frac{A}{y+\sqrt{-c}} + \frac{B}{y-\sqrt{-c}}$$

$$1 = A(y-\sqrt{-c}) + B(y+\sqrt{-c})$$

$$1 = (A+B)y + (-A\sqrt{-c} + B\sqrt{-c})$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ B\sqrt{-c} - A\sqrt{-c} = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A=-B \\ B = \frac{1}{2\sqrt{-c}} \qquad A = -\frac{1}{2\sqrt{-c}} \end{array}$$

$$\int \frac{dy}{y^2+C} = -\frac{1}{2\sqrt{-c}} \int \frac{dy}{y+\sqrt{-c}} + \frac{1}{2\sqrt{-c}} \int \frac{dy}{y-\sqrt{c}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-c}} \ln|y+\sqrt{-c}| + \frac{1}{2\sqrt{-c}} \ln|y-\sqrt{c}|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-c}} \left[\ln|y-\sqrt{-c}| - \ln|y+\sqrt{-c}|\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-c}} \ln\left|\frac{y-\sqrt{-c}}{y+\sqrt{-c}}\right|$$

$$\boxed{t + K = \frac{1}{2\sqrt{-c}} \ln\left|\frac{y-\sqrt{-c}}{y+\sqrt{-c}}\right|}$$

$$\int \frac{dy}{y^2+C} \xrightarrow{c=0} -\frac{1}{y}$$

$$\xrightarrow{c>0} \text{metodo de la arctg } \frac{1}{c}\int \frac{dy}{1+(y/\sqrt{c})^2}$$

$$\xrightarrow{c<0} \text{descomposición en fracciones simples } \int \frac{dy}{(y+\sqrt{-c})(y-\sqrt{-c})}$$

APLICACIONES DE LAS E.D. DE ORDEN 1

Trayectorias Ortogonales y Oblicuas

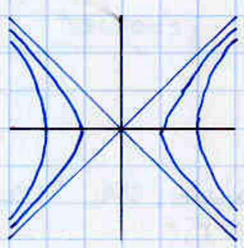
Definición: Familia de curvas

Expresión de la forma $F(x, y, K) = 0$
Fijado K, la expresión denota la ecuación de una curva en $\mathbb{R}^2$

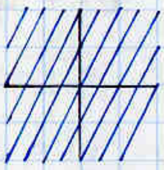
ejemplo

a) $F(x, y, K) = x^2 + y^2 - K = 0$
circunferencias en el origen radio K

b) $F(x, y, K) = x^2 - y^2 - K = 0$
$K \neq 0$: familia de hipérbolas
$K = 0$: $y = x$ y $y = -x$



c) $F(x, y, K) = 2x - y + K = 0$



Familias de curvas como solución de una ED

- Al resolver una ED se obtiene una familia de este tipo.
- Recíprocamente, toda familia de curvas posee una "ecuación diferencial de la familia", la cual se obtiene derivando la expresión tantas veces como constantes tenga.

ejemplo

$$x^2 + y^2 = K^2 \xrightarrow{\text{derivar}} 2x + 2yy' = 0 \longrightarrow x + yy' = 0$$

$x^2 + Ky^2 = 4$ no podemos derivar aquí porque no nos quitamos la constante de encima

$\downarrow$ jugar con la ec.

$$\frac{x^2 - 4}{y^2} = -K \xrightarrow{\text{derivar}} \frac{2xy^2 - 2yy'(x^2-4)}{y^4} = 0$$

$$\frac{2xy - 2y'(x^2-4)}{y^3} = 0$$

$$2xy - 2y'(x^2 - 4) = 0$$

$$xy - y'(x^2 - 4) = 0$$

Trayectorias Ortogonales

Dada una familia de curvas, obtener una familia formada por las curvas perpendiculares a cada una de la familia dada.

Método de obtención

1. $F(x, y, K) \xrightarrow[\text{eliminando } K]{\text{derivar}} y' = f(x, y)$

2. y' es la derivada en cada (x, y) de la curva la ED de la familia ortogonal es por tanto

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}$$

3. $y' = -\frac{1}{f(x,y)} \xrightarrow{\text{resolver}} G(x, y, K)$ familia ortogonal

ejemplo

Halla la familia de trayectorias ortogonales a la familia $x^2 + y^2 = K^2$

1) $x^2 + y^2 = K^2 \longrightarrow 2x + 2yy' = 0 \rightarrow x + yy' = 0 \rightarrow y' = -\frac{x}{y}$

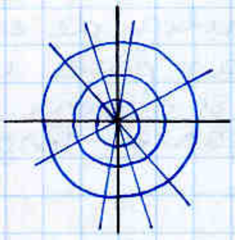
2) $y' = \frac{y}{x}$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C$

$|y| = x e^c$

$|y| = Dx \quad D > 0 \quad (D = e^c)$

$y = Dx \quad D \in \mathbb{R}$



ejemplo: $F(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2 = 0$

circunf centro (a,b) y radio a^2+b^2

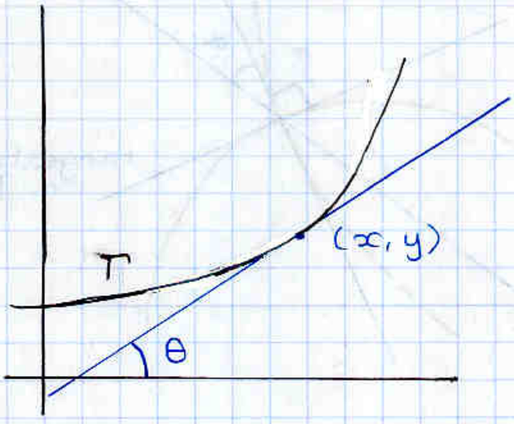
$\equiv$ circunf que pasan por el origen

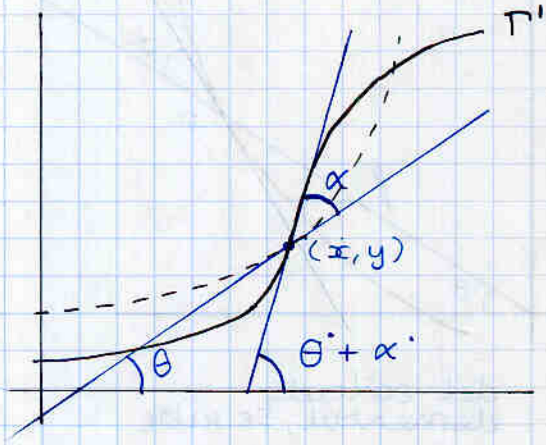
Trayectorias Oblicuas

Buscar familia de curvas que formen ángulo $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ con la familia dada.

1. $F(x, y, K) = 0 \xrightarrow[\text{eliminando } K]{\text{derivar}} y' = f(x,y)$

2.





$T: y' = f(x,y) = tg\ \theta$

$T': y' = tg(\theta + \alpha)$

suma de tg

$= \frac{tg\ \alpha + tg\ \theta}{1 - tg\alpha\ tg\ \theta}$

$$\boxed{\text{ED. de las trayectorias oblicuas}: y' = \frac{tg\ \alpha + f(x,y)}{1 - tg\alpha\ f(x,y)}}$$

3. Resolver $y' = \frac{tg\alpha + f(x,y)}{1 - tg\alpha\ f(x,y)} \longrightarrow G(x, y, K) = 0$ familia buscada

ejemplo

trayectorias oblicuas $\alpha = \frac{\pi}{6}$ de la familia $y = Kx$

1) $y = Kx \to \frac{y}{x} = K \to \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0 \to xy' - y = 0 \to y' = y/x$

2) $tg\ \frac{\pi}{6} = 1/\sqrt{3}$ las trayectorias oblicuas satisfacen

$$y' = \frac{1/\sqrt{3} + f(x,y)}{1 - 1/\sqrt{3}\ f(x,y)} = \frac{1 + \sqrt{3}\ y/x}{\sqrt{3} - y/x}$$

3) C.V. $u = y/x$

$$\underbrace{\begin{matrix} y = ux \\ y' = u'x + u \end{matrix} \qquad y' = \frac{1 + \sqrt{3}\ u}{\sqrt{3} - u}}$$

$$u'x + u = \frac{1 + \sqrt{3}u}{\sqrt{3} - u}$$

$$u'x = \frac{1 + \sqrt{3}u}{\sqrt{3} - u} - u = \frac{1 + \sqrt{3}u - \sqrt{3}u + u^2}{\sqrt{3}u} = \frac{1 + u^2}{\sqrt{3}u}$$

$$\to \frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{3} - u}{1 + u^2} du \longrightarrow \ln|x| + K = \int \frac{\sqrt{3} - u}{1 + u^2} du = \int \frac{\sqrt{3}}{1 + u^2} du - \int \frac{u}{1 + u^2} du$$

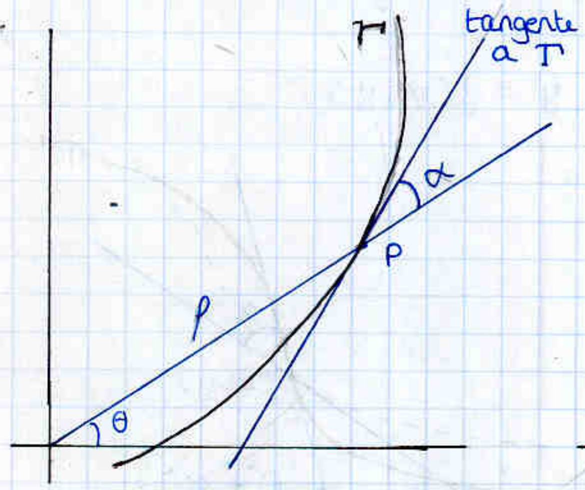
$$= \sqrt{3}\ \text{arctg}(u) - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2)$$

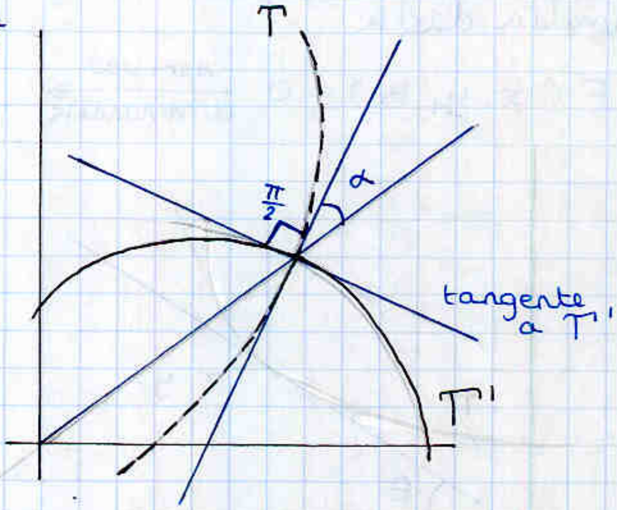
$$\boxed{\text{SOL. GEN.} \quad \ln|x| + K = \sqrt{3}\ \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}$$

Trayectorias ortogonales en polares

1. $F(\theta, \rho, K) = 0 \xrightarrow[\text{eliminando } K]{\text{derivando}} f(\theta, \rho, \rho') = 0 \qquad \rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$

2.





del cálculo elemental, se sabe

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{\rho'} \qquad\qquad \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\rho}{\rho_0'}$$

trigonometría: $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

$$\underbrace{-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{\rho'}{\rho} \qquad\qquad -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\rho}{\rho_0'}}$$

$$-\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0'} \longrightarrow \boxed{\rho_0' = -\frac{\rho^2}{\rho'}}$$

sustituyendo ρ' por $-\rho^2/\rho'$ en $f(\theta, \rho, \rho') = 0$

$$\boxed{f\left(\theta, \rho, -\frac{\rho^2}{\rho'}\right) = 0}$$

ejemplo:

(1) Sea $\rho = K\cos\theta$ familia de círculos tangentes al eje OY en el origen, $K > 0$

$$\rho = K\cos\theta \rightarrow \rho^2 = K^2\cos^2\theta = K^2\frac{1}{1/\cos^2\theta} = K^2\frac{1}{1+tg^2\theta} = K^2\frac{1}{1+(y/x)^2}$$

$$x^2+y^2 = K^2\frac{1}{1+(y/x)^2} \rightarrow (x-\tfrac{K}{2})^2+y^2 = (\tfrac{K}{2})^2$$ en efecto, son círculos tgts al eje OY

→ Obtener E.D. asociada

$$\rho = K\cos\theta \rightarrow \rho' = -K\,sen\,\theta \underset{K=\frac{\rho}{\cos\theta}}{\overset{\uparrow}{=}} -\rho\frac{sen\theta}{\cos\theta} = -\rho\, tg\,\theta.$$

$$\boxed{\rho' = -\rho\, tg\,\theta.}$$

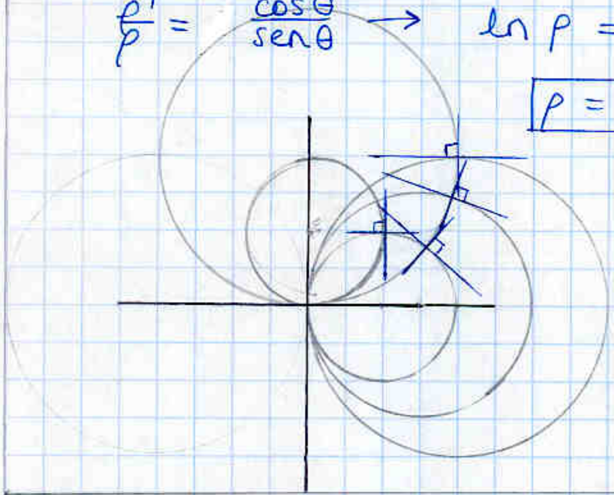
→ Obtener E.D. de familia ortogonal

$$-\frac{\rho^2}{\rho'} = -\rho\, tg\,\theta \longrightarrow \frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{tg\theta} \longrightarrow \boxed{\rho' = \rho\, cotg\,\theta}$$

→ Solucionar la E.D.

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\cos\theta}{sen\theta} \longrightarrow \ln\rho = \ln|sen\,\theta| + c$$

$$\boxed{\rho = K\, sen\,\theta}$$ círculos tangentes a OX en origen.



ejemplo

(2) sea $\rho = K\theta$. Hallar familia ortogonal

$$\rightarrow \rho = K\theta \rightarrow \frac{\rho}{\theta} = K \longrightarrow \frac{\rho'\theta-\rho}{\theta^2} = 0 \rightarrow \boxed{\rho'\theta - \rho = 0} \rightarrow f(\theta,\rho,\rho') = 0$$

$$\rightarrow f(\theta,\rho,-\tfrac{\rho^2}{\rho'}) = -\frac{\rho^2}{\rho'}\theta - \rho = 0 \rightarrow -\frac{\rho^{\cancel{2}}}{\rho'}\theta = \cancel{\rho} \rightarrow -\rho\theta = \rho'$$

$$\rightarrow -\theta\, d\theta = \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\ln\rho = -\frac{\theta^2}{2} + C$$

$$\boxed{\rho = Ce^{-\frac{\theta^2}{2}}}$$

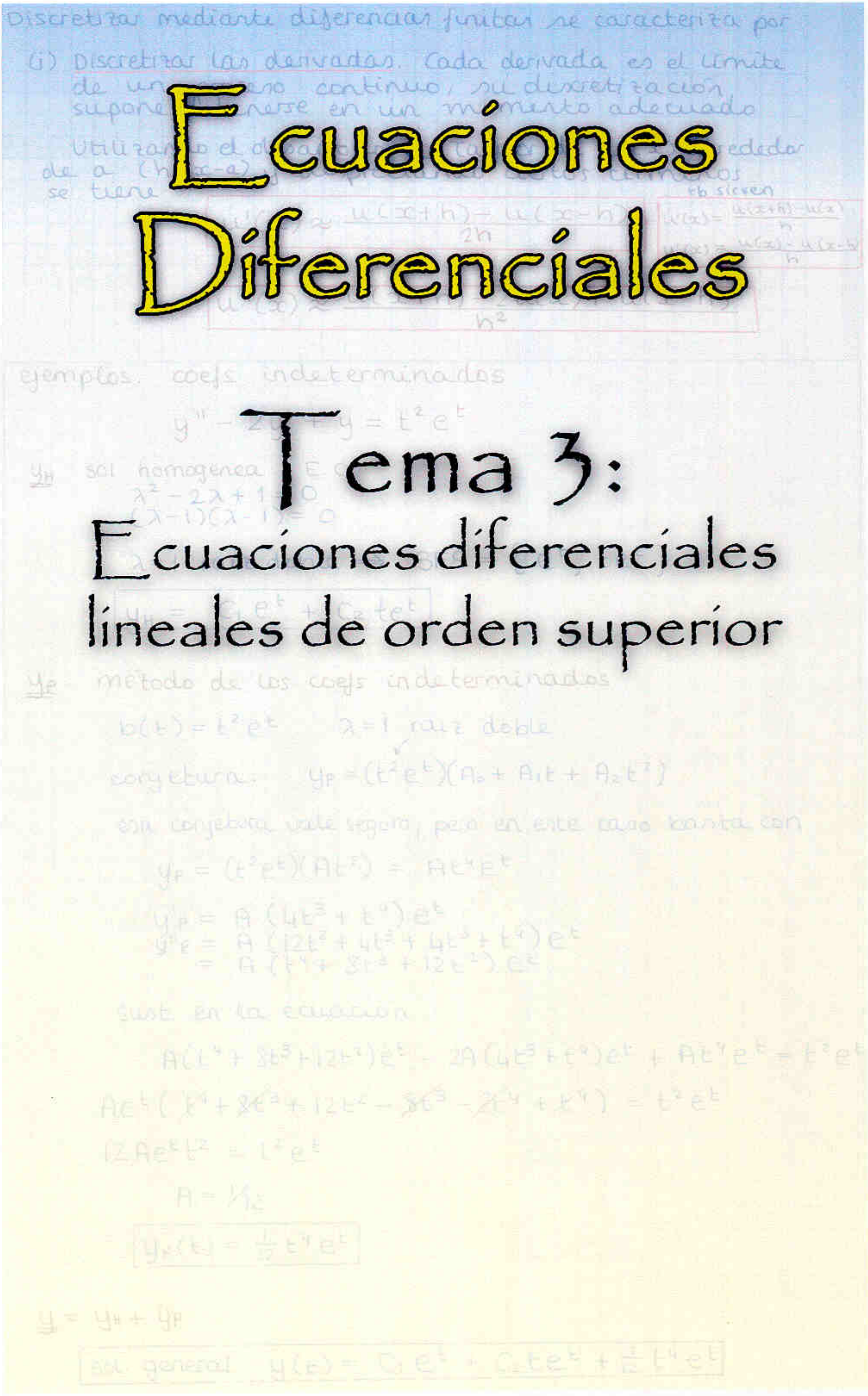
Resumen

Trayectorias	Ec. dela familia	E.D dela familia	E.D de la nueva familia
Ortogonales	$F(x,y,K)=0$	$y'=f(x,y)$	$y'=-\frac{1}{f(x,y)}$
oblicuas ángulo α	$F(x,y,K)=0$	$y'=f(x,y)$	$y'=\frac{tg\,\alpha+f(x,y)}{1-tg\,\alpha\, f(x,y)}$
ortogonales en polares	$F(\theta,\rho,K)=0$	$f(\theta,\rho,\rho')=0$	$f(\theta,\rho,-\frac{\rho^2}{\rho'})=0$

Ecuaciones Diferenciales

Tema 3:

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior



Discretizar mediante diferencias finitas se caracteriza por

(i) Discretizar las derivadas. Cada derivada es el límite de un [illegible] continuo, su discretización supone [illegible] en un momento adecuado

Utilizando el d[illegible] [illegible] alrededor de a (h [illegible] x-a) [illegible] se tiene

$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$

tb sirven

$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$

$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$

$u''(x) \approx \frac{[illegible]}{h^2}$

ejemplos coefs indeterminados

$y'' - 2y' + y = t^2 e^t$

$\underline{y_H}$ sol homogenea E[illegible]

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$

λ [illegible]

$\boxed{y_H = C_1 e^t + C_2 t e^t}$

$\underline{y_P}$ método de los coefs indeterminados

$b(t) = t^2 e^t$ $\lambda = 1$ raiz doble

conjetura: $y_P = (t^2 e^t)(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)$

esa conjetura vale seguro, pero en este caso basta con

$y_P = (t^2 e^t)(A t^2) = A t^4 e^t$

$y'_P = A(4t^3 + t^4)e^t$

$y''_P = A(12t^2 + 4t^3 + 4t^3 + t^4)e^t$

$= A(t^4 + 8t^3 + 12t^2)e^t$

sust en la ecuacion

$A(t^4 + 8t^3 + 12t^2)e^t - 2A(4t^3 + t^4)e^t + At^4 e^t = t^2 e^t$

$Ae^t(\cancel{t^4} + \cancel{8t^3} + 12t^2 - \cancel{8t^3} - \cancel{2t^4} + \cancel{t^4}) = t^2 e^t$

$12Ae^t t^2 = t^2 e^t$

$A = 1/12$

$\boxed{y_P(t) = \frac{1}{12} t^4 e^t}$

$\underline{y} = y_H + y_P$

$\boxed{\text{sol general} \quad y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + \frac{1}{12} t^4 e^t}$

TEMA 3:
ECS. DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Def: Ec. dif de orden n: $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

Def: Ec. dif. lineal de orden n: si F es lineal en $y, y', \dots, y^{(n)}$

$$\boxed{a_n(t) y^{(n)} + \dots + a_1(t) \cdot y' + a_0(t) \cdot y = b(t)}$$

- a_i, b continuas en $[a,b]$
- $a_n(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$

Def: Ecuación homogenea si $b(t) = 0$

Def: PVI para ec. dif lineal de orden n

$$\begin{cases} a_n(t) y^{(n)} + \dots + a_1(t) y' + a_0(t) y = b(t) \\ y(t_0) = b_0 \\ y'(t_0) = b_1 \\ \vdots \\ y^{\underline{n-1}}(t_0) = b_{\underline{n-1}} \end{cases}$$

$y(t)$ es solución si cumple la ED y las C.I.

Teorema: existencia y unicidad
(usando el T^{a} de Picard)

a_i, b continuas en $[a,b]$
$a_n(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$ $\Rightarrow$ <u>el PVI tiene solución única</u>

Soluciónes de ecuaciones lineales

Consideremos un operador lineal $L : C^n[a,b] \to C[a,b]$ dado por:

$$Ly := a_n(t)y^{(n)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y$$

La ecuación diferencial puede escribirse $Ly = b(t)$ y su homogenea asociada $Ly = 0$

Proposición:

a) L es lineal (Demostración: pag 393: una chorrada)
b) S_H es subespacio vectorial de $C^n[a,b]$
donde S_H son las soluciones de la homogenea
(⇒ sean y_1 e y_2 soluciones de $Ly = 0$. entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tb lo es)

Demostración:

$$S_H = \{ y \in C^n[a,b] \,/\, L(y) = 0 \}$$
$$= Ker(L) \Rightarrow S_H \text{ es subespacio vectorial}$$

S_H es además de dimensión n.

Teorema:

La solución general de $L(y) = b(t)$ se escribe

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

y_H : sol general de $L(y) = 0$
y_P : sol particular de $L(y) = b(t)$

· Sol general de la E.D. Lineal Homogenea

· Teorema:
S_H es subespacio vectorial de orden n.

Por lo tanto, para hallar S_H basta conocer n soluciones de $Ly = 0$ linealmente independientes que actuarán como base de S_H

Al conjunto de las n soluciones independientes se le llama Sistema Fundamental de Soluciones

$$S.F.S. = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

La solución general de $L(y) = 0$ es

$$y_H(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_3 y_n(t)$$

¿Cómo saber si las soluciones son L.I.?

Se llama Wronskiano en t_0 de un conjunto de funciones $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ al determinante

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) & \cdots & y_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & y_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}$$

Si $W(t_0) \neq 0$ para un $t_0 \in [a,b]$ entonces $W(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$ es decir, o se anula en todos los puntos o no se anula en ninguno

Teorema:
$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es L.I. $\iff W(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$
$\iff \exists\, t_0 \in [a,b] \,/\, W(t_0) \neq 0$

Ejemplo: $t^3 y''' + 6t^2 y'' + 4ty' - 4y = 1$

- sabemos que:
  $y_1(t) = t$
  $y_2(t) = 1/t^2$
  $y_3(t) = \ln t/t^2$
  son sols de $Ly = 0$
- sabemos que
  $y_P(t) = -1/4$
  es sol particular de $Ly = 1$

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_2'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} t & 1/t^2 & \ln t/t^2 \\ 1 & -2/t^3 & \frac{t - 2t\ln t}{t^4} \\ 0 & 6/t^4 & \frac{-5 + \ln t^6}{t^4} \end{vmatrix}$$

$$W(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \iff \{y_1, y_2, y_3\} \text{ son L.I. (es SFS)}$$

Sol gen. de la homogenea $y_H = C_1 t + C_2/t^2 + \frac{C_3 \ln t}{t^2}$

Sol gen de la EDL $y = y_H + y_P = C_1 t + \frac{C_2}{t^2} + \frac{C_3 \ln t}{t^2} - 1/4$ → con las cond de un PVI se obtendría la sol. particular

La determinación de n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea no es algo sencillo ; sólo hay un método efectivo si la ec es de coeficientes constantes.

En otros casos se pueden probar métodos como el siguiente

ejemplo: Sea la E.D. $t^2y'' - 6y = 0 \ / \ t \in]0, +\infty[$
de la que sabemos que $y_1(t) = t^3$ es solución.
Buscamos otra solución de la forma $\boxed{y_2(t) = v(t) \cdot y_1(t)}$

$y_2(t) = v(t) \cdot y_1(t) \rightarrow y_2' = v'y_1 + vy_1' \rightarrow y_2'' = v''y_1 + v'y_1' + v'y_1' + vy_1''$

$y_2''(t) = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$ E.D. $t^2y'' - 6y = 0$

$y_1 = t^3$ $t^2(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') - 6vy_1 = 0$

$$t^2[v''t^3 + 2v'(3t^2) + v(6t)] - 6vt^3 = 0$$
$$t^5v'' + 6t^4v' + 6t^3v - 6t^3v = 0$$
$$t^5v'' + 6t^4v' = 0$$
$$\boxed{tv'' + 6v' = 0} \quad \text{E. D.}$$

$z = v' \rightarrow tz' + 6z = 0 \rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{6}{t}dt \rightarrow \ln|z| = -6\ln t \rightarrow z(t) = 1/t^6$

$v(t) = \int z(t)\,dt = \int t^{-6}dt$

$v(t) = -\frac{1}{5}t^{-5}$

luego $\boxed{y_2(t) = v(t)y_1(t) = -\frac{1}{5}t^{-2}}$

Hay también una forma de obtener y_2 a partir de y_1 en una EDLH de la forma $y'' + P(t)y' + Q(t)y = 0$

ejemplo: pasar 7 pags
* en esquina sup derecha.

Proposición:

sea $y_1(t)$ solución no nula de $\boxed{y'' + P(t)y' + Q(t)y = 0}$ en $[a,b]$

Entonces, otra solución $y_2(t)$, independiente con $y_1(t)$ en $[a,b]$ viene dada por
$y_2(t) = v(t) \cdot y_1(t)$ donde $\boxed{v(t) = \int \frac{1}{y_1^2}\left[e^{-\int P(t)\,dt}\right]dt}$

DEM: sigue los pasos del ejemplo de arriba: pag 403

ejercicio: E.D.L. $(1-2t-t^2)y'' + 2(1+t)y' - 2y = 0$ ojo: $P(t) = \frac{2(1+t)}{1-2t-t^2}$
sabiendo que $y_1(t) = t+1$ es solución, determina la sol. general

EXTRA DEL LIBRO: no dicho en clase

Proposición:
sea y_1 una solucion no nula de la siguiente ecuación en $[a,b]$
$$a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$
La transformación $y(t) = v(t)y_1(t)$ reduce la ecuación a una de orden $n-1$ en la variable $w = \frac{dv}{dt}$

Solución particular de EDL. Método de variación de parámetros

Una vez hemos encontrado el SFS de la ecuación homogenea, podemos hallar una solución particular mediante el método de variación de parámetros.

- EDL de Orden 2

- primero transformamos la EDL para adaptarla al método.

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \xrightarrow[\div a_2(t)]{} \boxed{y'' + P(t)y' + Q(t)y = R(t)} \quad (1)$$

- siendo conocida la sol de la ec homogenea: $\boxed{y_h(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)}$ SFS $= \{y_1, y_2\}$

El método consiste en conjeturar como solución particular

$$y_p = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t)$$

donde $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son funciones a determinar.
Se llama variación de parámetros pues sustituimos los parámetros de la solución general por funciones.

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2$$

$$\Big\downarrow \text{derivamos}$$

$$y'_p = v_1y'_1 + v_2y'_2 + v_1'y_1 + v_2'y_2$$

$$\Big\downarrow \text{exigimos} \longrightarrow v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$$

$$y'_p = v_1y'_1 + v_2y'_2$$

$$\Big\downarrow \text{derivamos}$$

$$y''_p = v_1'y_1' + v_2'y_2' + v_1y_1'' + v_2y_2''$$

$$\Big\downarrow \text{exigimos} \longrightarrow v_1'y_1' + v_2'y_2' = R(t)$$

$$y''_p = R(t) + v_1y_1'' + v_2y_2''$$

$$\Big\downarrow \text{sustituyendo } y_p,\ y'_p \text{ e } y''_p \text{ en (1)}$$

$$[R(t)+v_1y_1''+v_2y_2''] + P(t)[v_1y'_1+v_2y'_2] + Q(t)[v_1y_1+v_2y_2] = R(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$R(t) + v_1\underbrace{(y_1'' + P(t)y_1' + Q(t)y_1)}_{=0 \text{ puesto que } y_1 \text{ es sol de la homogenea}} + v_2\underbrace{(y_2'' + P(t)y_2' + Q(t)y_2)}_{=0} = R(t)$$

$$\Big\downarrow$$

$$R(t) = R(t) \implies y_p \text{ es una solución particular}$$

$\implies$ Quedan así justificadas las dos exigencias, que proporcionan un sistema de ecuaciones.

las dos exigencias (ahora justificadas) proporcionan

$$\boxed{\begin{array}{l} V_1' y_1 + V_2' y_2 = 0 \\ V_1' y_1' + V_2' y_2' = R(t) \end{array}}\Bigg\}$$

sistema que SIEMPRE es resoluble ya que el wronskiano q es el determinante de la matriz asociada

$$\left(\begin{array}{cc|c} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & R \end{array}\right)$$

es siempre distinto de cero, pues y_1 e y_2 son l.i.

Por Cramer:

$$V_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R & y_2' \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{-y_2 R(t)}{W(t)}$$

$$V_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{y_1 R(t)}{W(t)}$$

$$\xrightarrow{\text{integrando}} \boxed{\begin{array}{l} V_1 = \displaystyle\int \frac{-y_2 R(t)}{W(t)}\, dt \\ V_2 = \displaystyle\int \frac{y_1 R(t)}{W(t)}\, dt \end{array}}$$

no hacen falta cts. de integración pues buscamos solución particular

donde $W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$R(t)$ proviene de la EDL original

$$y'' + P(t)\, y' + Q(t)\, y = R(t)$$

• EDL de orden n

EDL escrita de la forma: $y^{(n)} + P_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_1(t) y' + P_0(t) y = R(t)$

sea conocida la sol general de la homogenea

$$y_H = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \ldots + C_n y_n(t)$$

conjeturamos como sol. particular

$$y_P = V_1(t) y_1(t) + V_2(t) y_2(t) + \ldots + V_n(t) y_n(t)$$

con pasos simelares al de orden 2 se obtiene el sistema

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 V_1' + \ldots + y_n V_n' = 0 \\ y_1' V_1' + \ldots + y_n' V_n' = 0 \\ y_1'' V_1' + \ldots + y_n'' V_n' = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ y_1^{(n-1)} V_1' + \ldots + y_n^{(n-1)} V_n' = R(t) \end{array}}\Bigg\}$$

cuya solución viene dada por $V_k' = \dfrac{R(t)\, W_k(t)}{W(t)}$

donde $W_k(t)$ es el determinante obtenido de $W(t)$ al sustituir la k-ésima columna por $(0, 0, \ldots, R(t))$

$$\boxed{V_k = \int \frac{R(t)\, W_k(t)}{W(t)}\, dt}$$

Ejemplos método de variación de parámetros

(1) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

Coefts. cts. : E.C. $\lambda^2+2\lambda+1=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ (doble)

$SFS = \{e^{-x}, xe^{-x}\}$

método de variación de parámetros $\left.\begin{matrix} V_1'y_1 + V_2'y_2 = 0 \\ V_1'y_1' + V_2'y_2' = R(t) \end{matrix}\right\}$

$$\left.\begin{matrix} V_1'(e^{-x}) + V_2'(xe^{-x}) = 0 \\ V_1'(-e^{-x}) + V_2'(e^{-x})(-xe^{-x}) = e^{-x}\ln x \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x}\ln x \end{pmatrix}$$

$$V_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x}\ln x & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-(xe^{-x})(e^{-x}\ln x)}{e^{-x}[(1-x)e^{-x}] - xe^{-x}[-e^{-x}]}$$

$$= \frac{-x\ln x\, e^{-2x}}{(1-x)e^{-2x} + xe^{-2x}} = \frac{-x\ln x\, e^{-2x}}{e^{-2x}} = -x\ln x$$

$$V_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}\ln x \end{vmatrix}}{e^{-2x}} = \frac{\cancel{e^{-x}e^{-x}}\ln x}{\cancel{e^{-2x}}} = \ln x$$

$$\boxed{V_1' = -x\ln x} \qquad \boxed{V_2' = \ln x}$$

$$V_1 = \int -x\ln x\,dx = -\frac{x^2}{2}\ln x - \int -\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = -\frac{x^2\ln x}{2} + \int \frac{x}{2}dx$$

$$= -\frac{x^2\ln x}{2} + \frac{1}{4}x^2$$ sin cte de integración

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{2} - \ln x\right)}$$

$$V_2 = \int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x$$

$$\boxed{V_2 = x(\ln x - 1)}$$

luego $y_p = V_1y_1 + V_2y_2 = \frac{1}{2}x^2(\frac{1}{2} - \ln x)e^{-x} + x(\ln x - 1)xe^{-x}$

$$\boxed{y_p = x^2e^{-x}\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right)}$$

SOL. GENERAL

$$\boxed{y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x^2e^{-x}\left(\frac{1}{2}\ln x - 3/4\right)}$$

Ejemplo

(2) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^t$

$\lambda = 1, 2, 3 \qquad SFS = \{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$

$y_p(t)$ mediante método de variación de parametros

$$y_p(t) = v_1(t)\underset{y_1}{e^t} + v_2(t)\underset{y_2}{e^{2t}} + v_3(t)\underset{y_3}{e^{3t}}$$

$$\begin{cases} v_1' e^t + v_2' e^{2t} + v_3' e^{3t} = 0 \\ v_1' e^t + v_2' 2e^{2t} + v_3' 3e^{3t} = 0 \\ v_1' e^t + v_2' 4e^{2t} + v_3' 9e^{3t} = e^t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{3t} \\ e^t & 2e^{2t} & 3e^{3t} \\ e^t & 4e^{2t} & 9e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} e^t & e^{2t} & e^{3t} & 0 \\ e^t & 2e^{2t} & 3e^{3t} & 0 \\ e^t & 4e^{2t} & 9e^{3t} & e^t \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1 \to F_3]{F_2 - F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} e^t & e^{2t} & e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 2e^{3t} & 0 \\ 0 & 3e^{2t} & 8e^{3t} & e^t \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 - 3F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} e^t & e^{2t} & e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 2e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{3t} & e^t \end{array}\right)$$

sust inversa:

$$v_3' = \frac{e^t}{2e^{3t}} = \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$v_2' = \frac{-2e^{3t}v_3'}{e^{2t}} = -2e^t v_3' = -2e^t \tfrac{1}{2}e^{-2t} = -e^{-t}$$

$$v_1' = \frac{-e^{3t}v_3' - e^{2t}v_2'}{e^t} = \frac{-e^{3t}\frac{1}{2}e^{-2t} - e^{2t}(-e^{-t})}{e^t} = \frac{-\frac{1}{2}e^t + e^t}{e^t} = \frac{\frac{1}{2}e^t}{e^t} = \frac{1}{2}$$

integrando:

$$v_1 = \int \tfrac{1}{2}\,dt = \tfrac{1}{2}t$$

$$v_2 = \int -e^{-t}\,dt = e^{-t}$$

$$v_3 = \int \tfrac{1}{2}e^{-2t}\,dt = -\tfrac{1}{4}e^{-2t}$$

$$y_p(t) = \tfrac{1}{2}te^t + e^{-t}e^{2t} - \tfrac{1}{4}e^{-2t}e^{3t} = \tfrac{1}{2}te^t + e^t - \tfrac{1}{4}e^t$$

$$\boxed{y_p(t) = \tfrac{1}{4}e^t(2t + 3)}$$

sol. general:

$$\boxed{y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t} + \tfrac{1}{4}e^t(2t + 3)}$$

Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

$$L(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = R(t) \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Este tipo de ecuaciones tienen métodos relativamente sencillos para hallar la sol. general de la homogénea y una solución particular.

Solución de ecuación homogenea con cfts. ctes.

Buscamos funciones tales que sus derivadas multiplicadas por constantes y sumadas dan cero. Para ello, estas funciones deben ser tales que sus derivadas son múltiplos de ellas.

⇒ Función exponencial $f(t) = e^{\lambda t}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Ecuación característica y polinomio característico

para que y(t) sea solución:

$$a_n \lambda_n e^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{\boxed{a_n \lambda_n + \dots + a_1 \lambda + a_0}}_{\text{polinomio característico}} = 0}_{\text{ecuación característica}}$$

de forma que la SFS vendrá determinada por las raices de dicho polinomio.

- Raices Reales Distintas
  - → $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
  - → $SFS = \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$

  ej $\lambda = 1, 2, 3$
  $SFS = \{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$

- Raices reales multiples
  - → $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{raiz simple}}}{\lambda_1}$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{raiz de multiplicidad } K}}{\lambda_2}$
  - → $SFS = \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda_2 t}\}$

  ej $\lambda = 1, 2, 2$
  $SFS = \{e^t, e^{2t}, te^{2t}\}$

- Raices complejas simples (pares conjugados)
  - → $\lambda = \alpha \pm \beta i$
  - · nótese que $e^{(\alpha + \beta i)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t \pm i \,\text{sen}\, \beta t)$
  - → $SFS = \{e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \,\text{sen}\, \beta t\}$

  ej $\lambda = \pm 2i$
  $SFS = \{\cos 2t, \,\text{sen}\, 2t\}$

  (si $f(t) = a(t) \pm i\, b(t)$ es sol. compleja entonces $a(t)$ y $b(t)$ son sol. reales e independ.)

- Raices complejas multiples
  - → $\lambda = \alpha + \beta i$ (multiplicidad K)
  - → $SFS = \{ e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \,\text{sen}\, \beta t, te^{\alpha t} \,\text{sen}\, \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \,\text{sen}\, \beta t \}$

ejemplos

(1) $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$

ecuación característica: $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$

raices del polinomio:

- candidatos (Cardano-Vietta) $\pm 1, \pm 6, \pm 3, \pm 2$

(. divisor del ultimo (a_0) partido divisor del primero (a_n)

- si es entero: divisor del ultimo (a_0))

$p(1) = 1 - 4 + 1 + 6 \neq 0$

$p(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

- $(\lambda+1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$

candidatos $-1, \pm 6, \pm 3, \pm 2$

$p(-1) = 1 + 5 + 6 \neq 0$

$p(6) = 6^2 - 30 + 6 \neq 0$

$p(-6) = 6^2 + 30 + 6 \neq 0$

$p(2) = 4 - 10 + 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

- $(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ raices: $\boxed{-1, 2, 3}$

$SFS = \{e^{-t}, e^{2t}, e^{3t}\}$

$$\boxed{\text{sol. general: } C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} = y(t)}$$

(2) $y'' - 6y' + 9y = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda - 3) = 0$

$\frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3$ raiz doble

$SFS = \{e^{3t}, te^{3t}\}$

$$\boxed{\text{sol. general: } c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t} = y(t)}$$

(3) (I) $y'' + K^2 y = 0$

(II) $y'' - K^2 y = 0$

aparecen con frecuencia en matemática aplicada

(I) E.C. $\lambda^2 + K^2 = 0$

$\lambda = \pm\sqrt{-K^2} = \pm\sqrt{-1}\,K$

$\lambda = \pm iK$

$SFS = \{\operatorname{sen}(kt), \cos(kt)\}$

$$\boxed{\text{sol. general: } y(t) = c_1 \operatorname{sen}(kt) + c_2 \cos(kt)}$$

(II) E.C. $\lambda^2 - K^2 = 0$

$\lambda = K, \lambda = -K$

$SFS = \{e^{kt}, e^{-kt}\}$

$$\boxed{\text{sol. general: } y(t) = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}}$$

se puede poner mejor: si $c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y(t) = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} = \cosh(kt)$

si $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y(t)\ \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} = \operatorname{senh}(kt)$

$\Rightarrow \cosh(kt), \operatorname{senh}(kt) \in SFS$

veamos que son l.i.

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cosh(kt) & \operatorname{senh}(kt) \\ k\operatorname{senh}(kt) & k\cosh(kt) \end{vmatrix} = k(\cosh^2(kt) - \operatorname{senh}^2(kt)) = k \neq 0$$

$$\boxed{\text{sol. general: } y(t) = C_1 \cosh(kt) + C_2 \operatorname{senh}(kt)}$$

ejercicios: $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$ / $y''' + y'' = 0$ / $y^{(4)} - y'' = 0$ / $y^{(4)} = 0$

Solución Particular de EDL. con coefts ctes.: Método de los coeficientes indeterminados

sea $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(t)$

el método consiste en conjeturar una solución particular del mismo tipo que b(t)

Hay diversos casos según b(t): (i) $e^{\lambda t}$ (ii) $\begin{matrix}\cos bt\\ \text{sen}\, bt\end{matrix}$ (iii) polinomio en t (iv) sumas o productos de los anter.

- Caso (i): $b(t) = e^{\lambda t}$

si λ es sol. de la ec. característica con multiplicidad k, debemos conjeturar como sol. particular

(si λ no es raíz de la ec. carac. entonces k=0) $\boxed{y_p = A t^k e^{\lambda t}}$

hay que determinar A sustituyendo $y_p, y'_p, \ldots, y^{(n)}_p$ en la ecuación inicial

ejemplo

$$y'' - 3y' = 8e^{3t}$$

sol. de homogénea:

E.C. $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ $\begin{cases}\lambda = 0\\ \lambda = 3\end{cases}$

$SFS = \{1, e^{3t}\}$

$y_H = C_1 + C_2 e^{3t}$

sol. particular

conjeturamos:

$$\left.\begin{aligned} y_p &= Ate^{3t}\\ y'_p &= Ae^{3t}(1+3t)\\ y''_p &= Ae^{3t}(6+9t)\end{aligned}\right\}$$

sustituimos en la E. D.

$$Ae^{3t}(6+9t) - 3Ae^{3t}(1+3t) = 8e^{3t}$$

$$\left.\begin{aligned} 3A &= 8\\ 9A - 9A &= 0\end{aligned}\right\} \boxed{A = 8/3} \qquad y_p = \frac{8}{3}te^{3t}$$

sol. general $y(t) = c_1 + c_2 e^{3t} + \frac{8}{3}te^{3t}$

- Caso (ii): $b(t) =$ sen bt, cos bt, α sen bt + β cos bt

si $\lambda = \pm bi$ es sol. de la ec. carac. $p(\lambda) = 0$ de mult k

$$\boxed{y_p(t) = t^k (A \cos bt + B \,\text{sen}\, bt)} \qquad \left(\begin{matrix}k=0 \text{ si } bi\\ \text{no es sol}\\ \text{de } p(\lambda)=0\end{matrix}\right)$$

- caso (ii) b) $b(t) = e^{at}(\alpha \,\text{sen}\, bt + \beta \cos bt)$

$\lambda = a \pm bi$ sol. de $p(\lambda) = 0$ con multiplicidad k

$$\boxed{y_p(t) = t^k e^{at}(A \,\text{sen}\, bt + B \cos bt)} \qquad (\text{idem})$$

- caso (iii) $b(t) = p_0 + p_1 t + \ldots + p_m t^m$ (polinomio)

$\lambda = 0$ sol. de $p(\lambda) = 0$ con multiplicidad k

$$\boxed{y_p(t) = t^k (A_0 + A_1 t + \ldots + A_m t^m)}$$

caso (iv) sumas o productos de casos anteriores

1) Productos (lo veremos)
2) $b(t)$ combinación lineal de casos anteriores

Proposición

si y_{P_1} es sol de $L(y) = b_1(t)$
y_{P_2} es sol de $L(y) = b_2(t)$

entonces (L es lineal)

$\alpha y_{P_1} + \beta y_{P_2}$ es sol de $L(y) = \alpha b_1(t) + \beta b_2(t)$

---

ejemplo

$$y^{(4)} + y'' = 3t^2$$

$\underline{\underline{y_H}}$

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \quad \lambda = 0 \text{ (doble)}$$
$$\lambda^2(\lambda^2+1) = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i$$

$$SFS = \{1, t, \cos t, \operatorname{sen} t\}$$

$$\boxed{y_H = C_1 + C_2 t + C_3 \cos t + C_4 \operatorname{sen} t}$$

$\underline{y_P}$ método de coefs indeterminados

$b(t)$ es un polinomio.
$\lambda = 0$ raíz doble

$$y_P = t^2(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)$$

$$y'_P = 2A_0 t + 3A_1 t^2 + 4A_2 t^3$$
$$y''_P = 2A_0 + 6A_1 t + 12A_2 t^2$$
$$y'''_P = 6A_1 + 24A_2 t$$
$$y^{iv}_P = 24A_2$$

sust en la ecuación:

$$24A_2 + 2A_0 + 6A_1 t + 12A_2 t^2 = 3t^2$$

$$12A_2 + A_0 = 0 \longrightarrow A_0 = -12 \cdot A_2 = -3$$
$$A_1 = 0 \longrightarrow A_1 = 0$$
$$12A_2 = 3 \longrightarrow A_2 = 1/4$$

$$\boxed{y_P(t) = t^2(-3 + 1/4\, t^2)}$$

$\underline{y = y_H + y_P}$

$$\boxed{y(t) = C_1 + C_2 t + C_3 \cos t + C_4 \operatorname{sen} t + t^2(1/4\, t^2 - 3)}$$

ejemplos: coefs. indeterminados

$$y'' - 2y' + y = t^2 e^t$$

$\underline{y_H}$ sol homogenea. E.C.

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$
$(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda = 1$ raiz doble $\Longrightarrow$ $SFS = \{ e^t, te^t \}$

$$\boxed{y_H = C_1 e^t + C_2 te^t}$$

$\underline{y_P}$ método de los coefs indeterminados

$b(t) = t^2 e^t$ $\quad$ $\lambda = 1$ raiz doble

conjetura: $y_P = (t^2 e^t)(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)$

esa conjetura vale seguro, pero en este caso basta con

$$y_P = (t^2 e^t)(At^2) = At^4 e^t$$

$$y'_P = A(4t^3 + t^4)e^t$$
$$y''_P = A(12t^2 + 4t^3 + 4t^3 + t^4)e^t$$
$$= A(t^4 + 8t^3 + 12t^2)e^t$$

sust. en la ecuación:

$$A(t^4 + 8t^3 + 12t^2)e^t - 2A(4t^3 + t^4)e^t + At^4 e^t = t^2 e^t$$

$$Ae^t(\cancel{t^4} + \cancel{8t^3} + 12t^2 - \cancel{8t^3} - \cancel{2t^4} + \cancel{t^4}) = t^2 e^t$$

$$12Ae^t t^2 = t^2 e^t$$

$$A = 1/12$$

$$\boxed{y_P(t) = \frac{1}{12} t^4 e^t}$$

$\underline{y} = y_H + y_P$

$$\boxed{\text{sol. general } \; y(t) = C_1 e^t + C_2 te^t + \frac{1}{12} t^4 e^t}$$

ejercicio: bastante largo

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' = te^t + 5 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$$

<u>y_H</u>

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda) = 0$$
$$(\lambda-1)(\lambda)(\lambda-1) = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & \boxed{0} \end{array}$$

$\lambda = 0$
$\lambda = 1$ (doble) $\Rightarrow$ SFS $= \{1, e^t, te^t\}$

<u>y_P</u>

$y''' - 2y'' + y' = 5$ polinomio

$\lambda = 0$ es raiz

$y_P(t) = tA$
$y'_P(t) = A$
$y''_P(t) = 0$
sust: $A = 5$

$y_P(t) = 5t$

$y''' - 2y'' + y' = te^t$ polinomio · exponencial

$\lambda = 1$ raiz doble

$$y_P(t) = t^2 e^t (A_0 + A_1 t)$$
$$= e^t (A_0 t^2 + A_1 t^3)$$

$$y'_P(t) = (A_0 t^2 + A_1 t^3 + 2A_0 t + 3A_1 t^2) e^t$$
$$= (A_1 t^3 + (A_0 + 3A_1) t^2 + 2A_0 t) e^t$$

$$y''_P(t) = (A_1 t^3 + (A_0 + 3A_1) t^2 + 2A_0 t + 3A_1 t^2 + 2(A_0 + 3A_1) t + 2A_0) e^t$$
$$= (A_1 t^3 + (A_0 + 6A_1) t^2 + (6A_1 + 4A_0) t + 2A_0) e^t$$

$$y'''_P(t) = (A_1 t^3 + (A_0 + 6A_1) t^2 + (6A_1 + 4A_0) t + 2A_0 + 3A_1 t^2 + 2(A_0 + 6A_1) t + (6A_1 + 4A_0)) e^t$$
$$= (A_1 t^3 + (A_0 + 9A_1) t^2 + (18A_1 + 6A_0) t + (6A_1 + 6A_0)) e^t$$

sust: (y factorizando)

$$[(\cancel{A_1} - \cancel{2A_1} + \cancel{A_1}) t^3 + (\cancel{A_0} + 9A_1 - \cancel{2A_0} - 12A_1 + \cancel{A_0} + 3A_1) t^2 + (18A_1 + \cancel{6A_0} - 12A_1 - \cancel{8A_0} + \cancel{2A_0}) t$$
$$+ (6A_1 + 6A_0 - 4A_0)] e^t = te^t$$

$$\underbrace{(6A_1 t + 6A_1 + 2A_0) e^t = te^t \qquad \left.\begin{array}{r} 6A_1 = 1 \\ 1 + 2A_0 = 0 \end{array}\right\} \; A_1 = \tfrac{1}{6} \quad A_0 = -\tfrac{1}{2}}$$

$$\boxed{y_P(t) = 5t + t^2 e^t \left(\tfrac{1}{6} t - \tfrac{1}{2}\right)}$$

<u>y</u> $= y_H + y_P$

$$\boxed{\text{sol general } \; y(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^t t + 5t + t^2 e^t \left(\tfrac{1}{6} t - \tfrac{1}{2}\right)}$$

<u>Sol del PVI</u>

$$y(t) = \left(\tfrac{1}{6} t^3 - \tfrac{1}{2} t^2 + C_3 t + C_2\right) e^t + 5t + C_1$$
$$y'(t) = C_2 e^t + C_3 e^t + C_3 t e^t + 5 + \left(\tfrac{1}{6} t^3 - \cancel{\tfrac{1}{2} t^2} + \cancel{\tfrac{1}{2} t^2} - t\right) e^t$$
$$= \left(C_2 + C_3 + C_3 t + \tfrac{1}{6} t^3 - t\right) e^t + 5$$
$$= \left(\tfrac{1}{6} t^3 + (C_3 - 1) t + (C_3 + C_2)\right) e^t + 5$$
$$y''(t) = \left(\tfrac{1}{6} t^3 + (C_3 - 1) t + (C_3 + C_2) + \tfrac{1}{2} t^2 + C_3 - 1\right) e^t$$
$$= \left(\tfrac{1}{6} t^3 + \tfrac{1}{2} t^2 + (C_3 - 1) t + (2C_3 + C_2 - 1)\right) e^t$$

$y(0) = C_2 + C_1 = 2$
$y'(0) = C_3 + C_2 + 5 = 2$
$y''(0) = 2C_3 + C_2 - 1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} C_3 = 3 \\ C_2 = -6 \\ C_1 = 8 \end{array}$$

$$\boxed{\text{sol particular } \; y(t) = 8 - 6e^t + 3e^t t + 5t + t^2 e^t \left(\tfrac{1}{6} t - \tfrac{1}{2}\right)}$$

Ecuación de Euler-Cauchy

Se llama Ecuación de Euler-Cauchy a una ED de la forma:

$$a_n t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 t y' + a_0 y = b(t)$$

el exponente de la t coincide en cada término con el orden de derivación.

Resolución:

Con el cambio de variable $\boxed{t = e^x}$ se convierte en una de coeficientes constantes

Comprobación para orden 2:

NOTACION: $y' = \frac{dy}{dt}$ $\quad \dot{y} := \frac{dy}{dx}$

$$t^2 a_2 y'' + t a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t = e^x \\ x = \ln t \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \end{array}}$$

$$\longrightarrow y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{y} \frac{1}{t}$$

$$\boxed{t y' = \dot{y}}$$

$$\longrightarrow y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{y} \frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}\dot{y} + \frac{1}{t}\frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$= -\frac{1}{t^2}\dot{y} + \frac{1}{t}\frac{d\dot{y}}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}\dot{y} + \frac{1}{t}\ddot{y}\frac{1}{t} = \frac{1}{t^2}(\ddot{y} - \dot{y})$$

$$\boxed{t^2 y'' = (\ddot{y} - \dot{y})}$$

NOTA: Para tenerlos juntos. Se calculará en un ejemplo

$$\boxed{t^3 y''' = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}}$$

La ecuación inicial queda

(!) $b(t) \rightarrow b(e^x)$

$$a_2(\ddot{y} - \dot{y}) + a_1(\dot{y}) + a_0 y = b(e^x)$$

$$a_2 \ddot{y} + (a_1 - a_2)\dot{y} + a_0 y = b(e^x)$$

que es una ecuación lineal de coeficientes constantes ejemplo:

$$t^2y'' - ty' + y = 4t \ln t$$

C.V. $t = e^x$ $\begin{cases} ty' = \dot{y} \\ t^2y'' = \ddot{y} - \dot{y} \end{cases}$

$$\ddot{y} - \dot{y} - \dot{y} + y = 4e^x x$$

$$\boxed{\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 4xe^x}$$

! ! ! ! ! ⚠

$\underline{y_H}$:

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$ $\lambda = 1$ raiz doble $\Rightarrow$ $SFS = \{\cancel{e^t, te^t}\}$

$= \{e^x, xe^x\}$

sale facilmente por variación de parámetros

$\underline{y_P}$: $b(x) =$ polinomio · exponencial

$\lambda = 0$ no r₀ $\lambda = 1$ r₀ doble

este 4 no hace realmente falta

$$y_P(x) = 4(A_0 + A_1x)x^2e^x$$
$$= 4e^x(A_0x^2 + A_1x^3)$$

$$\dot{y}_P(x) = 4e^x(A_1x^3 + A_0x^2 + 3A_1x^2 + 2A_0x)$$
$$= 4e^x(A_1x^3 + (A_0 + 3A_1)x^2 + 2A_0x)$$

$$\ddot{y}_P(x) = 4e^x(A_1x^3 + (A_0 + 3A_1)x^2 + 2A_0x + 3A_1x^2 + 2(A_0 + 3A_1)x + 2A_0)$$
$$= 4e^x(A_1x^3 + (A_0 + 6A_1)x^2 + (4A_0 + 6A_1)x + 2A_0$$

sust en la ecuación: (y factorizando)

$$4e^x[(\cancel{A_1} - \cancel{2A_1} + \cancel{A_1})x^3 + (\cancel{A_0} + \cancel{6A_1} - \cancel{2A_0} - \cancel{6A_1} + \cancel{A_0})x^2 + (\cancel{4A_0} + 6A_1 - \cancel{4A_0})x + 2A_0)] = 4e$$

$$4e^x(6A_1x + 2A_0) = 4e^x x \qquad A_1 = 1/6 \qquad A_0 = 0$$

$$y_P(x) = 4(1/6)x\,x^2e^x$$
$$= 2/3\,x^3e^x$$

$\underline{y} = y_H + y_P$

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + 2/3\,x^3e^x$$

⚠

deshacer el cambio $x = \ln t$

$x^3 \to (\ln t)^3$

$\neq 3\ln t$

$$\boxed{y(t) = C_1t + C_2t\ln t + \frac{2}{3}t(\ln t)^3}$$

ejemplo grado 3

$$t^3y''' - 4t^2y'' + 8ty' - 8y = 4\ln t$$

C.V. $t = e^x \begin{cases} ty' = \dot{y} \\ t^2y'' = \ddot{y} - \dot{y} \end{cases}$

$$\rightarrow y''' = \frac{dy''}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot{y}-\dot{y}}{t^2}\right) = \left(\frac{d}{dt}(\ddot{y}-\dot{y})\right)\frac{1}{t^2} + \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)(\ddot{y}-\dot{y})$$

$$= \frac{d(\ddot{y}-\dot{y})}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3}(\ddot{y}-\dot{y})$$

$$= (\dddot{y}-\ddot{y})\frac{1}{t}\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3}(\ddot{y}-\dot{y}) = \frac{1}{t^3}(\dddot{y} - 3\ddot{y} - 2\dot{y})$$

$$\boxed{t^3y''' = \dddot{y} - 3\ddot{y} - 2\dot{y}}$$

sust. en la ecuación

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} - 2\dot{y} - 4\ddot{y} + 4\dot{y} + 8\dot{y} - 8y = 4x$$

$$\boxed{\dddot{y} - 7\ddot{y} + 14\dot{y} - 8y = 4x}$$

y_H

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$$
$$(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+8) = 0$$
$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 14 & -8 \\ 1 & & 1 & -6 & 8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\lambda = 1, 2, 4 \Rightarrow SFS = \{e^{x}, e^{2x}, e^{4x}\}$$

y_P $b(x)$ polinomio grado 1

$$y_p(x) = A_0 + A_1x$$
$$y'_p(x) = A_1$$
$$y''_p(x) = y'''_p(x) = 0$$

sust. en la ecuación:

$$14A_1 - 8A_0 - 8A_1x = 4x$$

$$14A_1 - 8A_0 = 0 \qquad A_0 = -7/8$$
$$-8A_1 = 4 \qquad A_1 = -1/2$$

$$y_P(x) = -7/8 - 1/2\,x$$

y $= y_H + y_P$

$$y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{4x} - 7/8 - 1/2\,x$$

$(x = \ln t$

$$\boxed{y(t) = C_1t + C_2t^2 + C_3t^4 - 7/8 - 1/2\ln t \quad \text{sol general}}$$

Problema. Análogo a la ecuación de Cauchy.

$$(t-1)^2 y'' - 2(t-1)y' - 4y = 0$$

notación: $y' = dy/dt$
$\dot{y} = dy/dx$

C.V. $(t-1) = e^x \longrightarrow x = \ln(t-1)$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \dot{y}\cdot\frac{1}{t-1}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{t-1}\right) = -\frac{1}{(t-1)^2}\dot{y} + \frac{1}{(t-1)}\frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$= -\frac{1}{(t-1)^2}\dot{y} + \frac{1}{(t-1)}\frac{d\dot{y}}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$= -\frac{1}{(t-1)^2}\dot{y} + \frac{1}{(t-1)^2}\ddot{y}$$

$$= \frac{1}{(t-1)^2}(\ddot{y} - \dot{y})$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(t-1)y' = \dot{y}\\ (t-1)^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}\end{array}}$$

nueva ecuación:

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = 0$$

y_h $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$
$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$
$\lambda = 4$ $\lambda = -1$

SFS: $\{e^{4x}, e^{-x}\}$

$y_p = 0$

sol general: $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 \frac{1}{e^x}$

deshaciendo el cambio:

$$y(t) = C_1(t-1)^4 + \frac{C_2}{(t-1)}$$

*

Problemas Tema 3 Ecs. Dif Orden n

~~(1) $y''' - 2y'' + y' = te^t + 5$~~

ecuación homogénea:

$$(t^2-1)y'' - 2ty' + 2y = 0$$

- no es ctes ctes
- no sirve ec de Euler-Cauchy

→ Buscamos una solución y conjeturamos otra

$\boxed{y_1(t) = t}$ es solución

conjeturamos:

$$y_2(t) = v(t)\cdot y_1(t)$$

$$\text{donde } v(t) = \int \frac{1}{y_1^2}\left[e^{-\int P(t)\,dt}\right]dt$$

$$y'' \underbrace{- \frac{2t}{t^2-1}}_{P(t)} y' + \underbrace{\frac{2}{t^2-1}}_{Q(t)} y = 0$$

$$v(t) = \int \frac{1}{t^2}\left[e^{-\int -\frac{2t}{t^2-1}dt}\right]dt$$
$$= \int \frac{1}{t^2}\left[e^{\int \frac{2t}{t^2-1}dt}\right]dt \longrightarrow t \neq 1$$
$$= \int \frac{1}{t^2}\left[e^{\ln|t^2-1|}\right]dt$$
$$= \int \frac{t^2-1}{t^2}\,dt$$
$$= \int 1 - \frac{1}{t^2}\,dt = t + \frac{1}{t} = \frac{t^2+1}{t}$$

si $t=1$: solución singular

$+2y' = 2y$

$y' - y = 0$

$\lambda - 1 = 0$

$SFS = \{e^t\}$

luego $\boxed{y_2(t) = t^2+1}$

ya tenemos $n=2$ sol l.i? $W(t_0) = \begin{vmatrix} t_0 & t_0^2+1 \\ 1 & 2t_0 \end{vmatrix}$

$= 2t_0^2 - (t_0^2+1)$

$= t_0^2 - 1 \neq 0 \quad \forall t \neq 1$ ⚠

$$SFS = \{t, t^2+1\}$$

$$y_H(t) = C_1 t + C_2(t^2+1)$$

solución particular: Método variación de parametros

EXIGENCIAS

$$\boxed{\begin{cases} V_1' y_1 + V_2' y_2 = 0 \\ V_1' y_1' + V_2' y_2' = R(t) \end{cases}}$$

⚠ $R(t) \neq (t^2-1)^2$

$$y'' \underbrace{- \frac{2t}{t^2-1}}_{P(t)} y' + \underbrace{\frac{2}{t^2-1}}_{Q(t)} y = \underbrace{t^2-1}_{R(t)}$$

$$\begin{cases} V_1' t + V_2' (t^2+1) = 0 \\ V_1' + V_2' 2t = t^2-1 \end{cases}$$

$$V_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t^2+1 \\ t^2-1 & 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^2+1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix}} = \frac{-(t^2+1)(t^2-1)}{(t^2-1)} = -(t^2+1) = -1-t^2$$

$$V_2' = \frac{\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & t^2-1 \end{vmatrix}}{t^2-1} = \frac{t(t^2-1)}{t^2-1} = t$$

$$V_1 = \int -t^2-1 \, dt = -\frac{t^3}{3} - t$$

$$V_2 = \int t \, dt = \frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2 + \dots + V_n y_n}$$

$$y_p(t) = \left(-\frac{t^3}{3} - t\right) \cdot t + \left(\frac{t^2}{2}\right) \cdot (t^2+1)$$
$$= t^2 \left(-\frac{t^2}{3} - 1\right) + t^2 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= t^2 \left(-\frac{t^2}{3} - 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= t^2 \left(\frac{1}{6} t^2 - \frac{1}{2}\right)$$

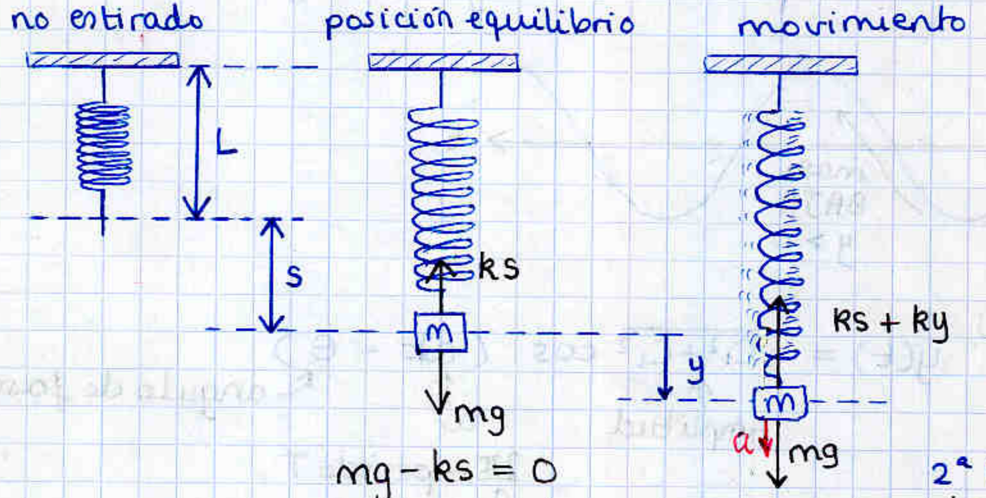
sol. general:

$t \neq 1$ $\quad y(t) = C_1 t + C_2 (t^2+1) + t^2 \left(\frac{1}{6} t^2 - \frac{1}{2}\right)$

$t = 1$ $\quad y(t) = e^t$

TEMA 3 - II. APLICACIONES DE LAS E.D. DE ORDEN n

1. Vibraciones en Sistemas mecánicos



$mg - ks = 0$

$mg = ks \longrightarrow$

2ª ley Newton

$mg - ks - ky = ma$

$\cancel{mg} - \cancel{mg} - ky = ma$

· **Vibraciones libres no amortiguadas** $\boxed{ma + ky = 0}$

$$a + \frac{k}{m} y = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt} + a^2 y = 0} \qquad a^2 = \frac{k}{m} > 0$$

ecuación lineal homogenea de ctes cts.

Ecuación característica: $\lambda^2 + a^2 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = ai \\ \lambda_2 = -ai \end{cases}$

$SFS = \{ \text{sen } at, \cos at \}$

$$y(t) = C_1 \text{ sen } at + C_2 \cos at$$

esta solución se puede arreglar

$$y(t) = C_1 \text{ sen } at + C_2 \cos at$$
$$= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \text{ sen } at + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \cos at \right)$$

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = \text{sen } \theta \qquad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = \cos \theta$$

$$y(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\text{sen}\theta \text{ sen } at + \cos\theta \cos at \right)$$

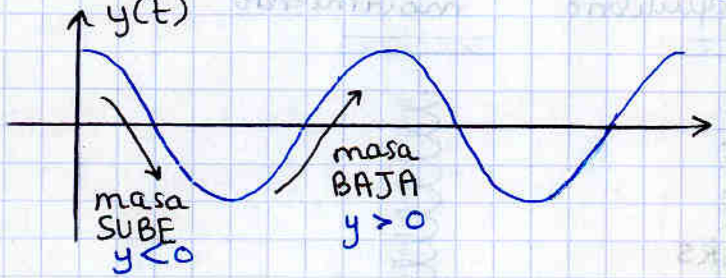
$$\boxed{y(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(at - \theta)}$$

$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen } a \cos b \pm \text{sen } a \cos b$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen } a \text{ sen } b$

dadas unas condiciones iniciales, por ejemplo posición y velocidad inicial ej $y(0) = y_0$
$y'(0) = 0$ (en el caso de que comience en reposo)

se obtiene una sol particular $y(t) = y_0 \cos at$



En general;

$$y(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Amplitud}}}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos\,(\underset{\substack{\uparrow \\ \omega}}{a}t - \theta) \leftarrow \text{ángulo de fase}$$

$\frac{2\pi}{a}$ = periodo T

---

ejemplo
- masa $m = 1$ kg
- rigidez tal que una fuerza de 0.064 N lo alarga 1 mm
- $t = 0 \rightarrow y = 2/3$ m
  $v = 4/3$ m/s hacia arriba

$K \cdot 0'001 = 0'064 \rightarrow k = 64$

$$\begin{cases} y'' + 64y = 0 \\ y(0) = 2/3 \\ y'(0) = -4/3 \end{cases}$$

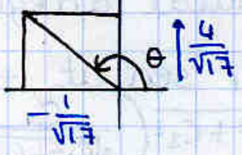
sol. general $y(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \operatorname{sen} 8t$

sol. particular $y(t) = \frac{2}{3} \cos 8t - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 8t$

transformar la sol. (en este caso a un seno)

$$A = \sqrt{(2/3)^2 + (1/6)^2} = \sqrt{17}/6$$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{2/3}{\sqrt{17}/6} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos\theta = \frac{-1/6}{\sqrt{17}/6} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$



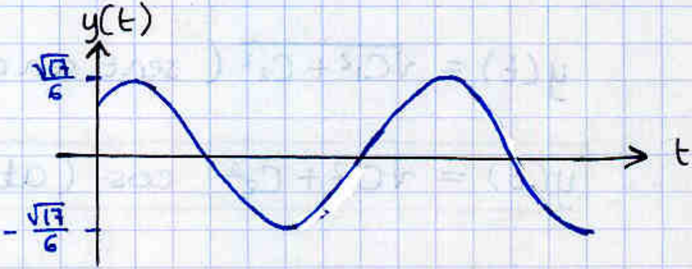
$$\theta = \pi - \arctan\left(\frac{4/\sqrt{17}}{1/\sqrt{17}}\right) = 1'816$$

$$y(t) = \sqrt{17}/6\,(\operatorname{sen}\theta \cos 8t + \cos\theta \operatorname{sen} 8t)$$

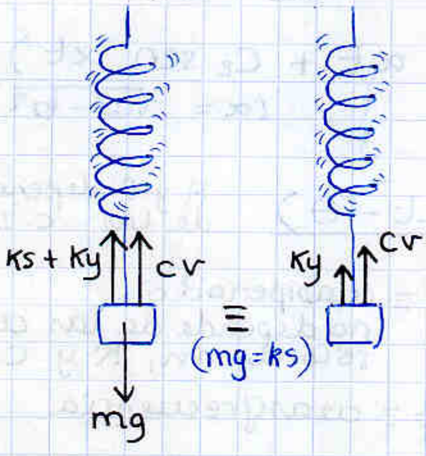
$$\boxed{y(t) = \frac{\sqrt{17}}{6} \operatorname{sen}(8t + 1.816)\ \text{m}}$$

se anula en

$8t_1 + 1.816 = \pi \rightarrow t_1 = 0.166$
$8t_2 + 1.816 = 2\pi \rightarrow t_2 = 0.558$
$8t_3 + 1.816 = 3\pi \rightarrow t_3 = 0.951$
⋮



· Vibraciones libres amortiguadas



2ª ley Newton

$$-ky - Cv = ma$$

$$ma + Cv + ky = 0$$

$$a + \frac{C}{m}v + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\boxed{y'' + 2b\,y' + a^2 y = 0}$$

$$\frac{C}{m} = 2b \qquad \frac{k}{m} = a^2$$

Fuerza de amortiguación:
Cv
proporcional a la velocidad
C ≡ cte de amortiguación

E.D. lineal homogenea coefts ctes

$$\lambda^2 + 2b\lambda + a^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - a^2}$$
$$\lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - a^2}$$

Se distinguen casos según $b^2 - a^2$

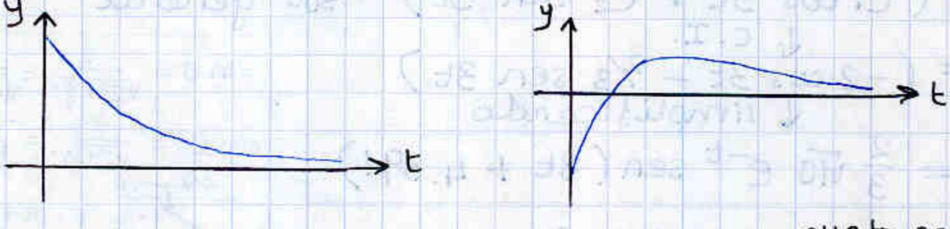
$$b^2 - a^2 = \frac{C^2}{(2m)^2} - \frac{k}{m} = \frac{C^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{1}{m}\left(\frac{C^2}{4m} - k\right)$$

vemos que $b^2 - a^2$ representa como de grande es C comparado con k.

→ Sobreamortiguación $b^2 - a^2 > 0$ C es grande frente a k

· en este caso λ_1 y λ_2 son reales (y negativas)

sol. general $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

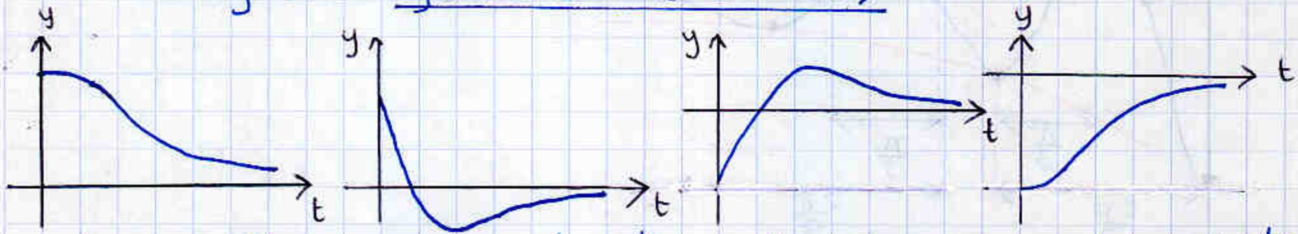


nótese
$y(t \to \infty) \to 0$
no oscila

→ Amortiguación crítica $b^2 - a^2 = 0$ punto crítico entre sobre y subamortiguación

· en este caso $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$

sol. general $y(t) = e^{-bt}(C_1 + C_2 t)$



la grafica corta el eje a lo sumo en un punto.

→ Subamortiguación $b^2 - a^2 < 0$

- λ_1 y λ_2 son complejas $\lambda_1 = -b + i\sqrt{a^2-b^2}$
  $\lambda_2 = -b - i\sqrt{a^2-b^2}$

sol general: $y(t) = e^{-bt}(C_1 \cos \alpha t + C_2 \operatorname{sen} \alpha t)$

$(\alpha = \sqrt{a^2-b^2})$

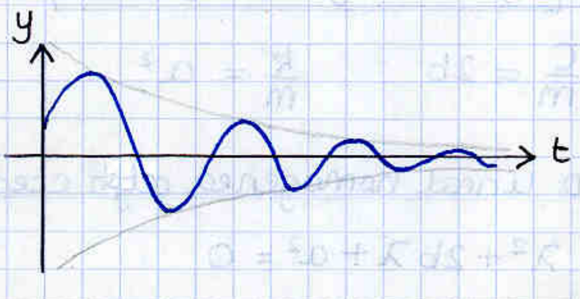
de forma simplificada

$$\underline{y(t) = \underbrace{e^{-bt} A}_{\text{amplitud amortiguada}} \cos(\alpha t - \theta)}$$

A y θ dependen de las C. I.

$\frac{2\pi}{\alpha}$ = cuasiperiodo
no depende de las cond. ini.
sólo de m, k y c

$\frac{\alpha}{2\pi}$ = cuasifrecuencia



ejemplo
masa $m = 1/2$ kg
$k = 5$
- medio ofrece una resistencia numérica igual a la velocidad instantánea $c = 1$

$y(0) = -2$ m (2m por encima de la posición de equilibrio)
$\frac{dy}{dt}(0) = 0$

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\begin{cases} y'' + \overset{2b}{\boxed{2}}y' + \overset{\omega_0^2}{\boxed{10}}y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1 + 3i \\ \lambda_2 = -1 - 3i \end{matrix}$$

subamortiguado
$(b^2 - \omega_0^2 = 1^2 - 10 = -9 < 0)$

$y(t) = e^{-t}(C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t)$ sol general

↓ C. I.

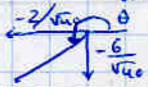
$y(t) = e^{-t}(-2 \cos 3t - 2/3 \operatorname{sen} 3t)$

↓ simplificando

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{3}\sqrt{10}\, e^{-t} \operatorname{sen}(3t + 4.391)}$$

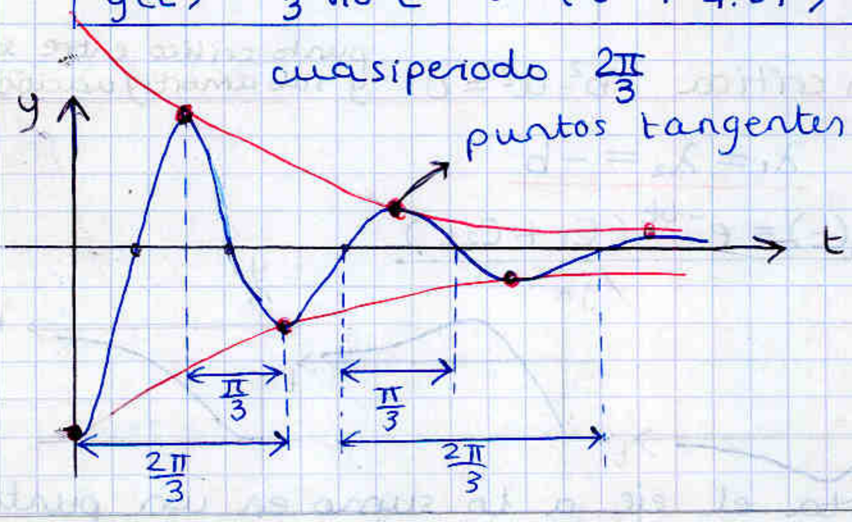
$\operatorname{sen}\theta = \frac{-2}{\sqrt{2^2+\frac{2}{3}^2}} = \frac{-2}{\sqrt{\frac{40}{9}}} = \frac{-6}{\sqrt{40}}$

$\cos\theta = \frac{-2/3}{\sqrt{2^2+2/3^2}} = \frac{-2/3}{\sqrt{40}/3} = \frac{-2}{\sqrt{40}}$



$\theta = \pi + \operatorname{arctg}\frac{6}{2}$
$= 4'391$

cuasiperiodo $\frac{2\pi}{3}$



puntos tangentes a $\pm\frac{2}{3}\sqrt{10}\, e^{-t}$

· Vibraciones forzadas

Cuando el sistema se halla sometido a una fuerza externa F(t)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\frac{dy}{dt} + a^2y = F(t) \qquad \begin{matrix} 2b = c/m \\ a^2 = k/m \end{matrix}$$

Es interesante cuando $F(t) = R\cos\omega t$

- La ecuación homogenea ya está resuelta
- Conjeturamos una sol. particular de la forma

$$y_p = A \operatorname{sen} \omega t + B\cos\omega t$$

$$\underbrace{\begin{matrix} y'_p = A\omega\cos\omega t - B\omega\cos\omega t \\ y''_p = -A\omega^2 \operatorname{sen}\omega t - B\omega^2\cos\omega t \end{matrix} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 2b\frac{dy}{dt} + a^2y = R\cos\omega t}$$

$$y_p = \underbrace{\frac{2b\omega R}{(a^2-\omega^2)^2-(2b\omega)^2}}_{\text{lo llamamos } A} \operatorname{sen}\omega t + \underbrace{\frac{R(a^2-\omega^2)}{(a^2-\omega^2)^2-(2b\omega)^2}}_{\text{lo llamamos } B} \cos\omega t$$

$$y_p = A \operatorname{sen}\omega t + B\cos\omega t$$

$$y_p = \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \operatorname{sen}\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t\right]$$

haciendo $\operatorname{sen}\delta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\delta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

resulta

$$y_p = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t - \delta)$$

ejemplo

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\frac{d^2y}{dt^2} + 1.2\,\frac{dy}{dt} + 2y = 5\cos 4t \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

La transformamos en

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\,\frac{dy}{dt} + 10y = 25\cos 4t$$

$m = 1/5$ kg
$K = 2$ N/m
$C = 1.2$
$T = \pi/2$

y_H E.C. $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ $\to \lambda_1 = -3+i$, $\lambda_2 = -3-i$

$$SFS = \{e^{-3t}\cos t,\ e^{-3t}\operatorname{sen} t\}$$

$$y_h(t) = e^{-3t}(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t)$$

y_p conjeturamos

$$y_p(t) = A\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t$$

derivando y sustituyendo en la E.D.

$$A = -\frac{25}{102}, \quad B = \frac{50}{51}$$

sol gen $\quad y(t) = e^{-3t}(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t$

sol part sustituyendo las condiciones iniciales

$$\boxed{y(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t}$$

$$\underbrace{e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t\right)}_{\text{término transitorio}} \quad \underbrace{- \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t}_{\text{término estacionario}}$$

$$\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0$$

→ Oscilaciones forzadas amortiguadas

se puede considerar cualquiera de los casos anteriores de amortiguación: subamortiguación, amortiguación crítica, sobreamortiguación.

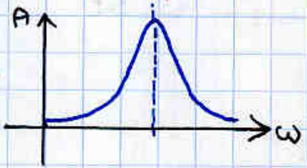
supongamos un movimiento subamortiguado, la solución general será

$$y(t) = \underbrace{e^{-bt}(C_1 \cos \alpha t + C_2 \operatorname{sen} \alpha t)}_{\substack{\text{término transitorio} \\ \text{solución transitoria}}} + \underbrace{\sqrt{A^2+B^2} \cos(\omega t - \delta)}$$

para t grandes, $y(t)$ se comporta como $y_p(t)$ sinusoidal con misma frecuencia del impulso solución estacionaria.

Resonancia práctica:

$y_p(t)$ tiene amplitud $\sqrt{A^2+B^2}$ que no depende del tiempo.
La amplitud tiene un máximo para cierta ω



Puede tener tal amplitud que el sistema se autodestruya
ej. puente

→ Oscilaciones forzadas sin amortiguación

En este caso no hay término transitorio

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2 y = R \cos \omega t$$

<u>y_h</u> $\lambda^2 + a^2 = 0$

$$\lambda = \pm\sqrt{-a^2} = \pm i a \qquad SFS = \{\operatorname{sen} at, \cos at\}$$

$$y_h(t) = \sqrt{C_1^2+C_2^2} \cos(at - \theta) \quad \text{siendo} \quad \cos\theta = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$$

<u>y_p</u>

$$y_p(t) = \frac{R}{a^2-\omega^2} \cos \omega t$$

<u>sol gen</u>

$$y(t) = \frac{R}{a^2-\omega^2} \cos \omega t + \sqrt{C_1^2+C_2^2} \cos(at - \theta)$$

representa la superposición de dos movimientos oscilatorios
- uno de periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ correspondiente al impulso
- uno de periodo $\frac{2\pi}{a}$ correspondiente a la oscilación natural

Resonancia pura

si 'sintonizamos' la frecuencia de la fuerza impulsora a la de oscilaciones libres

$$\omega = a$$

$$y'' + \omega^2 y = R \cos \omega t$$

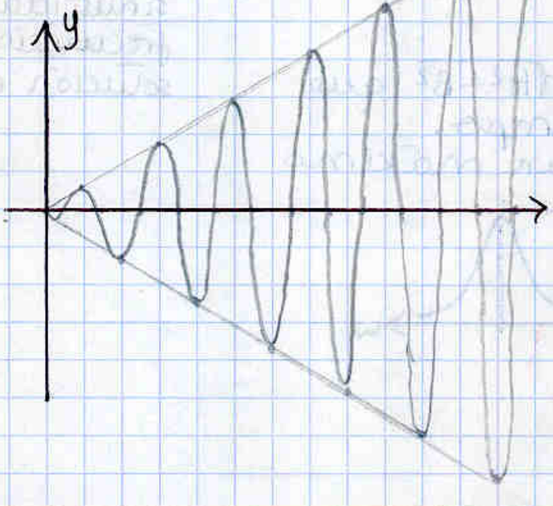
y_h $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i\omega$ $SFS = \{\cos \omega t, \operatorname{sen} \omega t\}$

y_p como $\pm i\omega$ es raiz de $m.a = 1$

$$y_p(t) = t(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t)$$

que sustituyendo en la E.D queda

$$y_p(t) = \frac{R}{2\omega} t \operatorname{sen} \omega t$$



$A \rightarrow \infty$

puede destruir el sistema

Pulsaciones

Otro fenomeno si $a \approx \omega$

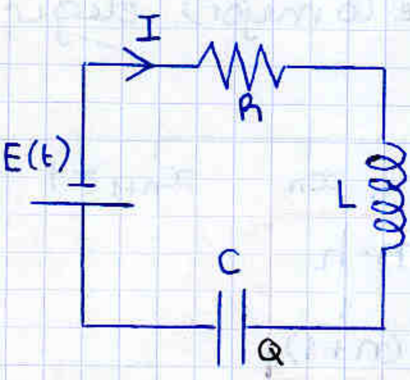
supongamos $y(0) = y'(0) = 0$

$$y_p(t) = \frac{R}{a^2 - \omega^2}(\cos \omega t - \operatorname{sen} at)$$

se puede escribir

$$y_p(t) = \frac{2R}{a^2 - \omega^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega + a}{2} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\omega - a}{2} t\right)$$

2. CIRCUITOS ELECTRICOS



Ley de Kirchoff

$$E(t) - R \cdot I - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{c}Q = 0$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\boxed{L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{c}Q(t) = E(t)}$$

Sistema Mecánico	Sistema Electrico
C: cte. amortiguación	R: resistencia
m: masa	L: inductancia
k: cte. del resorte	1/c: elastancia
F(t): fuerzas exteriores	E(t): fuerza electromotriz
y(t): desplazamiento	Q(t): cantidad de carga

3. DISCRETIZACION DE UN PROBLEMA CONTINUO. DIFERENCIAS FINITAS

se utiliza un sistema de ecuaciones discretizando las sucesivas derivadas de un problema de contorno.

Ecuación de Poisson
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ en } [0,1] \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

La ec. de Poisson describe un problema continuo como por ej la distribución de temperatura de un objeto, o la deformación de una estructura o la distribución de carga de una placa.

Discretizar mediante diferencias finitas se caracteriza por

(i) Discretizar las derivadas. Cada derivada es el límite de un proceso continuo, su discretización supone detenerse en un momento adecuado

Utilizando el desarrollo de Taylor de $u(x)$ alrededor de a $(h = x-a)$ y despreciando ciertos términos se tiene

$$\boxed{u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}}$$

tb sirven

$$\boxed{\begin{array}{l} u'(x) = \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} \\ u'(x) \approx \dfrac{u(x)-u(x-h)}{h} \end{array}}$$

$$\boxed{u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}}$$

(ii) elegir una malla caracterizada por un tamaño h.
Cuanto menor sea h mayor precisión pero mayor esfuerzo computacional.
Es usual y cómodo (no siempre lo mejor) elegir puntos equiespaciados.

$$\boxed{\begin{array}{c} x_k = k \cdot h \\ \text{en } [0,1] \quad h = \frac{1}{(n+1)} \end{array}}$$

Discretizando el problema de Poisson se obtiene

llamamos $u_i := u(x_i)$

$$-u''(i) = f(i) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(hi)$$

$$\boxed{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = h^2 f(hi)} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Lo cual plantea un sistema de n ecuaciones y n incognitas (u_0 y u_{n+1} aparecen en la primera y última ecuación son conocidos)

Matricialmente;

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(h) \\ f(2h) \\ f(3h) \\ \vdots \\ \\ f(nh) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \underset{\uparrow}{u} = b$$

valores aprox de $u(x)$ en $x_1, x_2, \dots, x_n$

Propiedades de la matriz A

- tridiagonal: GRAN ahorro en memoria y operaciones (¡sólo $4n$ operaciones en comparación con $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2}$!)
  En general, las matrices de bandas ($w=1 \Rightarrow$ diagonal; $w=2 \Rightarrow$ tridiagonal, .., $w=n \Rightarrow$ matriz completa) tienen algortmos eficientes de almacenado y factorización LU
- simétrica: ahorro en memoria y operaciones, puesto que el método de Gauss mantiene la simetría a lo largo del proceso.
- definida positiva: todos los pivotes son positivos, no hay que intercambiar filas (manteniendose la tridiagonal) y los pivotes son suficientemente grandes para no hacer pivotación parcial

ejemplo: diferencias finitas

$$\begin{cases} -u''(x) = 4\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi x & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Describe la distribución de temperatura en una varilla con extremos fijados en 0 grados y una fuente de calor $f(x) = 4\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi x$.

a) Solución exacta: integrando 2 veces

$$u(x) = \operatorname{sen} 2\pi x$$

b) Discretizando el problema: tomando $\underline{h = 1/4}$

$x_0 = 0 \quad x_1 = 1/4 \quad x_2 = 1/2 \quad x_3 = 3/4 \quad x_4 = 1$

la ED queda $\quad -\underline{u''(x)} = 4\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi x$

$$-\boxed{\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}} = 4\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi x_i$$

$$\begin{array}{l} \text{para } x_1: \\ \text{para } x_2: \\ \text{para } x_3: \end{array} \begin{cases} -u_2 + 2u_1 - u_0 = h^2 4\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi x_1 \\ -u_3 + 2u_2 - u_1 = h^2 4\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi x_2 \\ -u_4 + 2u_3 - u_2 = h^2 4\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi x_3 \end{cases}$$

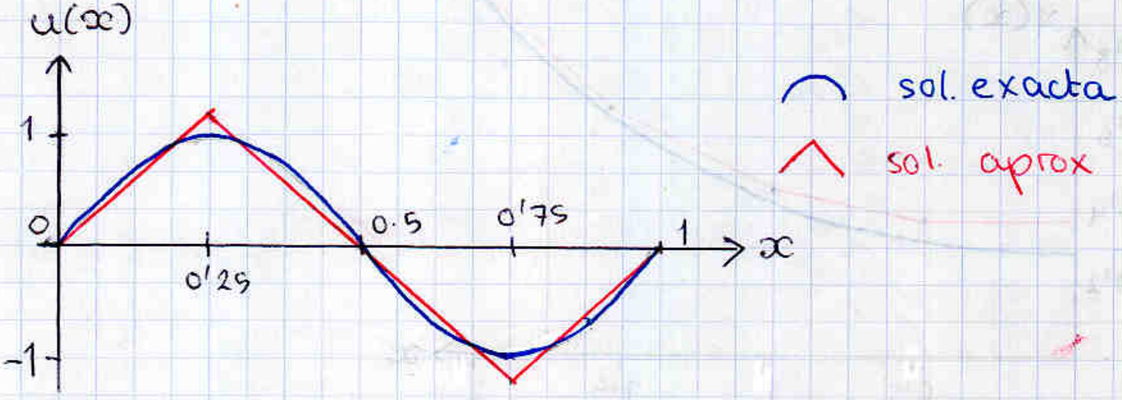
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^2/4 \\ 0 \\ -\pi^2/4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \pi^2/4 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -\pi^2/4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - (-\frac{1}{2})F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \frac{1}{4}\pi^2 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/8\,\pi^2 \\ 0 & -1 & 2 & -\pi^2/4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - (-\frac{2}{3})F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \pi^2/4 \\ 0 & 3/2 & -1 & -\pi^2/8 \\ 0 & 0 & 4/3 & -\pi^2/6 \end{array}\right)$$

$$u_3 = -\pi^2/8 \qquad u_2 = 0 \qquad u_1 = \pi^2/8$$

c) comparación

	u(x) valor exacto	u(x) valor aprox
$x = 0$	0	0
$x = 0'25$	1	1.2337
$x = 0'5$	0	0
$x = 0'75$	-1	-1.2337
$x = 1$	0	0



ejemplo 2: Distribución de un potencial a lo largo de una línea de transmisión.

$$\begin{cases} v''(x) = rg\, v(x) & x \in [0,L] \\ v(L) = V_L \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

$r = 2,\ g = 0'5,\ L = 2$ y $V_L = 1$

a) sol exacta

$$v''(x) - v(x) = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad SFS = \{e^{x}, e^{-x}\}$$

$$\lambda = \pm 1$$

sol. general: $v(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

aplicando las condiciones de contorno

sol particular: $v(x) = 0.133 e^{x} + 0.133 e^{-x}$

b) Discretizando el problema

la ED queda: $v''(x) = v(x)$

$$V_{x+h} - 2V_x + V_{x-h} = h^2 V_x$$

$$V_{x+h} - V_x(2+h^2) + V_{x-h} = 0$$

tomamos $h = 0'5 \Rightarrow x_0 = 0,\ x_1 = 0'5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1'5,\ x_4 = 2$

se tiene

$$V_2 - 2'25V_1 + V_0 = 0$$

$$V_3 - 2'25V_2 + V_1 = 0$$

$$V_4 - 2'25V_3 + V_2 = 0$$

sabemos $V_4 = 1$, ¡falta V_0!

conocemos V'_0, así que utilizamos la discretización de la primera derivada

$$0 = \boxed{v'(0) \approx \frac{v(x_1) - v(0)}{h}}$$

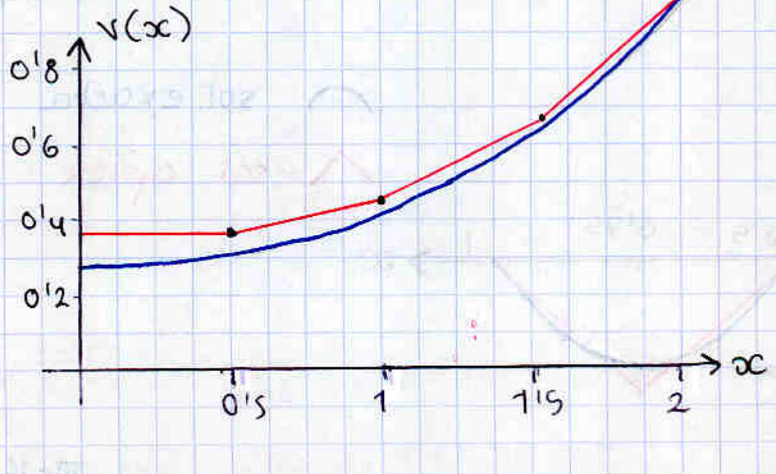
$$v(0) = v(x_1) - \overset{=0}{v'(0)} \cdot h = v(x_1)$$

en forma matricial

$$\begin{pmatrix} -1'25 & 1 & 0 \\ 1 & -2'25 & 1 \\ 0 & 1 & -2'25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aplicando gauss: $V_1 = 0'354$, $V_2 = 0'442$, $V_3 = 0'641$

c) comparación



Métodos de colocación y ponderación

La ec diferencial de 2° orden de un problema de contorno se puede escribir como

$R\,u(x)=0$ $\quad R: C^2[a,b] \to C[a,b]$

R no necesariamente lineal

R incluye el término independiente

Esto equivale a (al ser Ru identicamente nula)

a) $R\,u(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ COLOCACION

b) $<Ru(x), v(x)> = 0 \quad \forall v \in C[a,b]$ PONDERACION

$= \int_a^b Ru(x)\,v(x)\,dx$

se relajan estas condiciones para hallar una solución aproximada de $Ru=0$ en cierto espacio vectorial $V \subseteq C[a,b]$ (dim V finita) (por ejemplo polinomios de grado menor o igual que tres)

a) método de colocación.

Hacemos $Rp(x) = 0, \quad p \in V$ (ej p es un polinomio indeterminado)

para ciertos x_i llamados puntos de colocación $\in [a,b]$

$Rp(x_i) = 0 \Rightarrow$ sistema de ecuaciones

b) método de ponderación o residuos ponderados

Hacemos $<Rp, q> = 0$, $q \in V$

para ciertas q previamente elegidas (p ej una base de V)

$< Rp, q_i > = 0 \Rightarrow$ sistema de ecuaciones

(no requiere puntos de colocación)

ejemplo

Sea V el espacio vectorial, subespacio de $C[0,1]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que 3 tales que se anulan en $x=0$ y $x=1$

1) Encontrar una base de V

V es s.e.v. ?

$(p_1+p_2)\in V$

$(\lambda p_1)\in V$

$\forall p_1, p_2 \in V$

$$\begin{cases} p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \\ p(0) = a = 0 \\ p(1) = a+b+c+d = 0 \end{cases}$$

$a=0 \quad b=-c-d$

$$p(x) = (-c-d)x + cx^2 + dx^3$$

$$p(x) = c(x^2-x) + d(x^3-x)$$

Base de $V = \{x^2-x,\ x^3-x\}$

2) Resolver $\begin{cases} u''(x)+u(x)+x=0 \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$

$$u''(x)+u(x) = -x$$

u_h

$\lambda^2+1=0$

$\lambda = \pm i \qquad SFS = \{\cos x, \operatorname{sen} x\}$

$u_h(x) = C_1\cos x + C_2 \operatorname{sen} x$

u_p conjeturamos $u_p = Ax+B$ $\left(\begin{smallmatrix}\lambda=0 \\ \text{no es} \\ \text{raíz}\end{smallmatrix}\right)$

$u_p' = A$

$u_p'' = 0$

$0 + Ax + B = -x$

$A=-1 \quad B=0$

$u_p(x) = -x$

sol. general: $u(x) = C_1\cos x + C_2 \operatorname{sen} x - x$

sol part: $u(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 1} - x \qquad \begin{matrix} C_1 = 0 \\ C_2 = 1/\operatorname{sen} 1\end{matrix}$

3) Encontrar $p\in V$ tal que $Rp(1/3) = Rp(2/3) = 0$

Método de colocación

$$p(x)\in V\ ;\ \Rightarrow\ p(x) = A(x^3-x) + B(x^2-x)$$

$$Rp(x) = p''(x) + p(x) + x = 0$$

$$\begin{aligned} p(x) &= A(x^3-x) + B(x^2-x) \\ p'(x) &= A(3x^2-1) + B(2x-1) \\ p''(x) &= A\cdot 6x + B\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Rp(x) &= 6Ax + 2B + A(x^3-x) + B(x^2-x) + x = 0 \\ &= A(x^3+5x) + B(x^2-x+2) + x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Rp(1/3) = 0 \\ Rp(2/3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 46A + 48B = -9 \\ 98A + 48B = -18 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{9}{52},\ B = -\frac{9}{416}$$

$$\boxed{p(x) = -\frac{9}{52}(x^3-x) - \frac{9}{416}(x^2-x)}$$

aproximación a $u(x)$ en V

4) Encontrar $p \in V$ tal que $< Rp, q_i > = 0 \quad i = 1,2$ siendo q_i dos polinomios conocidos de V (tomamos la base)

Método de ponderación

$$Rp(x) = A(x^3+5x) + B(x^2-x+2) + x \qquad \text{de}(3)$$
$$q_1(x) = x^3 - x$$
$$q_2(x) = x^2 - x$$

$$< Rp, q_1 > = \int_0^1 \left[A(x^3+5x) + B(x^2-x+2) + x\right](x^3-x)\,dx$$
$$= -\frac{76}{105}A - \frac{9}{20}B - \frac{2}{15}$$

$$< Rp, q_2 > = \int_0^1 \left[A(x^3+5x) + B(x^2-x+2) + x\right](x^2-x)\,dx$$
$$= -\frac{9}{20}A - \frac{3}{10}B - \frac{1}{12}$$

$$\begin{cases} < Rp, q_1 > = 0 \\ < Rp, q_2 > = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 304\,A + 189\,B = -56 \\ 27\,A + 18\,B = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = -7/41 \\ B = -8/369 \end{matrix}$$

$$\boxed{p(x) = -\frac{7}{41}(x^3+5x) - \frac{8}{369}(x^2-x)}$$ aproximación a $u(x)$ en V

Problema (Examen Septiembre 2003)

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0$ tiene solución polinómica de grado n que se puede determinar si se exige que $P_n(1) = 1$

a) Calcúlense P_1 y P_2

$P_1(t) = At + B \quad \begin{cases} \text{es sol de } (1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0 \\ \text{cumple } P_1(1) = 1 \end{cases}$

$P_1'(t) = A$

$P_1''(t) = 0 \quad$ sust $\quad -2tA + 2(At+B) = 0 \quad \underline{B = 0}$

$A(1) + B = 1 \quad \underline{A = 1}$

$$\boxed{P_1(t) = t}$$

$P_2(t) = At^2 + Bt + C$

$P_2'(t) = 2At + B$

$P_2''(t) = 2A$

sust $\quad (1-t^2)2A - 2t(2At+B) + 6(At^2+Bt+C) = 0$

$$\begin{cases} 2A + 6C = 0 \\ -2B + 6B = 0 \longrightarrow \underline{B=0} \\ -\cancel{2A - 4A + 6A = 0} \end{cases}$$

$P_2(1) = 1 = A + B + C \rightarrow \begin{rcases} 2A + 6C = 0 \\ A + C = 1 \end{rcases} \; A = 1-C$

$(1-C) + 3C = 0 \to \underline{C = -1/2}$

$\underline{A = 3/2}$

$$\boxed{P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}}$$

b) Resuelve $(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = t^2$ sabiendo que una solución particular es polinomio de grado 2.

- <u>Homogénea</u> $(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$

no es de coeficientes constantes → SFS difícil de encontrar

sabiendo $y_1(t) = t$ es solución, podemos hallar otra de la forma $y_2(t) = v(t)\cdot y_1(t)$

$$y_2(t) = v(t)\cdot t$$

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}y' + \frac{2}{1-t^2}y = 0 \Leftrightarrow y'' + P(t)y' + Q(t)y = 0$$

$$\boxed{v(t) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(s)\,ds}\,dt}$$ fórmula para recordar

$$v(t) = \int \frac{1}{t^2} e^{-\int -\frac{2s}{1-t^2}ds}\,dt = \int \frac{1}{t^2} e^{-\ln(1-t^2)}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2} e^{\ln\frac{1}{1-t^2}}\,dt = \int \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{1-t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2(1+t)(1-t)}\,dt$$

descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(1+t)(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{1-t}$$

$$1 = At(1-t^2) + B(1-t^2) + Ct^2(1-t) + Dt^2(1+t)$$

$$1 = (-A-C+D)t^3 + (-B+C+D)t^2 + At + B$$

$$\left.\begin{array}{l} -A-C+D=0 \\ -B+C+D=0 \\ \boxed{A=0} \\ \boxed{B=1} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} D-C=0 \\ C+D=1 \end{array}\right\} \quad C=D \quad \boxed{C=D=\tfrac{1}{2}}$$

$$\int \frac{dt}{t^2(1-t)^2} = \int \frac{1}{t^2}dt + \frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{1+t} + \int\frac{dt}{1-t}\right) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\left(\ln(1+t) - \ln(1-t)\right)$$

$$\boxed{v(t) = -\frac{1}{t} + \ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}}$$

$$y_2(t) = t\cdot v(t)$$

$$\boxed{y_2(t) = -1 + t\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}}$$

$$SFS = \left\{ t, -1 + t\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right\}$$

$$y_H(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

- Particular
$$y_p(t) = At^2 + Bt + C$$
$$y'_p(t) = 2At + B$$
$$y''_p(t) = 2A$$

$$(1-t^2)2A - 2t(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C) = t^2$$
$$2A - 2At^2 - 4At^2 - 2Bt + 2At^2 + 2Bt + 2C = t^2$$

$$(-2A - 4A + 2A)t^2 - (-2B + 2B)t + (2A + 2C) = t^2$$

$$\left.\begin{array}{r} -4A = 1 \\ 0 = 0 \\ 2(A+C) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = -1/4 \\ \quad B \text{ cualquiera} \\ C = 1/4 \end{array}$$

Sol. completa

$$y(t) = C_1 t + C_2\left(-1 + t\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}\right)$$

c) Resolver la ecuación
$$(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0$$
en los puntos de inflexión

en los puntos de inflexion, $y'' = 0$, queda la ecuación:

$$-2ty' + n(n+1)y = 0$$
$$2ty' = n(n+1)y$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{n(n+1)}{2t}$$
$$\ln y = \frac{n(n+1)}{2}\ln t + c$$
$$\boxed{y(t) = c t e^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

d) Dado
$$\begin{cases} (1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Planteese el sistema para hallar su solución en el subespacio formado por polinomios de grado ≤ 3 que cumplen las C.C. mediante el método de colocación.

1ero Hallar el subespacio de polinomios grado ≤ 3 que cumplen las C.C.

$$\begin{cases} p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\ p(0) = D = 0 \\ p(1) = A + B + C + D = 0 = A + B + C = 0 \rightarrow A = 1 - B - C \end{cases}$$

$$p(x) = (1-B-C)x^3 + Bx^2 + Cx$$
$$= x^3 + B(x^2 - x^3) + C(x - x^3)$$

$$p(x) = x^3 + B(x^2 - x^3) + C(x - x^3)$$
$$p'(x) = 3x^2 + B(2x - 3x^2) + C(1 - 3x^2)$$
$$p''(x) = 6x + B(2 - 6x) + C(-6x)$$

$$\begin{aligned}
Rp(t) &= (1-t^2)p''(t) - 2t\,p'(t) + n(n+1)p(t) \\
&= (1-t^2)[6t + B(2-6t) + C(-6t)] - 2t(3t^2 + B(2t - 3t^2) + C(1-3t^2)) \\
&\quad + n(n+1)(t^3 + B(t^2 - t^3) + C(t - t^3)) \\
&= 6t + 2B - 6Bt - 6Ct \boxed{-6t^3} \boxed{-2Bt^2} + \boxed{6Bt^3} + \boxed{6Ct^3} \boxed{-6t^3} \\
&\quad - 4Bt^2 + \boxed{6Bt^3} - 2Ct + \boxed{3Ct^3} + \boxed{n(n+1)\cdot t^3} \\
&\quad + Bn(n+1)\cdot t^2 \boxed{-Bn(n+1)t^3} + Cn(n+1)t \boxed{-Cn(n+1)t^3} \\
&= t^3(-6 + 6B + 6C - 6 + 6B + 3C + n(n+1) - Bn(n+1) - C(n)(n+1)) \\
&\quad + t^2(-2B - 4B + Bn(n+1) \\
&\quad + t(6 - 6B - 6C - 2C + Cn(n+1)) \\
&\quad + 2B \\
&= t^3(-12 + n(n+1)(1 - B - C) + 12B + 9C) \\
&\quad + t^2(-6B + Bn(n+1)) \\
&\quad + t(6 - 6B - 8C + Cn(n+1)) \\
&\quad + 2B
\end{aligned}$$

metodo de colocación

$$\begin{cases} Rp(0) = 2B = 0 \Rightarrow \boxed{B=0} \\ Rp(1) = 1 = (-12 + n(n+1)(1-C) + 9C) + (6 - 8C + Cn(n+1)) \end{cases}$$

$$= -12 + 6 + 9C - 8C + n(n+1)(1 - \cancel{C} + \cancel{C})$$
$$= -6 + C + n(n+1) = 1$$

$$C + n(n+1) = 7$$

$$C = 7 - n(n+1)$$

$$\boxed{p(x) = x^3 + (7 - n(n+1))(x - x^3)}$$

comprobación suponemos $n = 1$

$$p(x) = x^3 + 5(x - x^3) = -4x^3 + 5x$$
$$p'(x) = -12x^2 + 5$$
$$p''(x) = -24x$$

$$\begin{aligned}
Rp(x) &= (1 - x^2)(-24x) - 2x(-12x^2 + 5) + 2(-4x^3 + 5x) \\
&= -24x + 24x^3 + 24x^3 - \cancel{10x} - 8x^3 + \cancel{10x}
\end{aligned}$$

$\neq 0$

hay algo mal

Ecuaciones Diferenciales

Tema 4:

Sistemas de ecuaciones diferenciales

4. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Forma canónica de Jordan

Teorema:

Endomorfismo diagonalizable $\Leftrightarrow$ posee base de vectores propios

ejemplo: diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Valores propios

$\lambda = 1, -2, 3$

vectores propios

$\lambda = 1 \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -2 \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3 \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ A es diagonalizable

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} = P^{-1} A P \qquad P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}: \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \mathcal{B}': \mathbb{K}^n \arrow[u, "P"] \arrow[r, "D"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

base de vectores propios

__Valores propios:__ $|A - \lambda I| = p(\lambda) = 0$

λ es v. p $\Leftrightarrow$ λ es raíz de $p(\lambda)$

__Vectores propios__

asociados a λ_i

siempre indet. ya que $|A-\lambda I|=0$

$$(A - \lambda_i I) X = 0$$

saldrán tantos vectores propios como parámetros tenga X

ej $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$

ejemplo: no diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I| \underset{\text{por ser triang}}{=} (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) \qquad \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \text{ doble} \end{matrix}$$

vectores propios:

$\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} z = 0 \\ y = 0 \\ x = \alpha \end{matrix} \quad \vec{v}.p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} z = 0 \\ y = \alpha \\ x = 2\alpha \end{matrix} \quad \vec{v}.p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ (mult geométrica $= 1$)(mult algebraica $= 2$)

no obtenemos base de vectores propios

$\Rightarrow$ no es diagonalizable

multiplicidad algebraica de λ_i : la potencia de $(\lambda - \lambda_i)$ en $|A - \lambda I|$

multiplicidad geométrica de λ_i : dimensión del subespacio asociado

$$S_{\lambda_i} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, (A - \lambda I)\vec{x} = 0 \} = \ker \{ A - \lambda I \}$$

Bloque de Jordan

$$\underset{\text{orden 1}}{(\lambda)},\ \underset{\text{orden 2}}{\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}},\ \underset{\text{orden 3}}{\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}},\ \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},\ \dots$$

- λ valor propio en la diagonal
- 1's por encima de la diagonal

Teorema (Forma canónica de Jordan)

Toda matriz cuadrada (≡ todo endomorfismo con representación matricial) tiene una matriz semejante de la forma:

$$\begin{pmatrix}\boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_m}\end{pmatrix}$$

J_i es un bloque de Jordan con λ_i en la diagonal $(1 \leq \text{orden} \leq m(\lambda_i))$ algebraica

Hay $\underbrace{l_i \text{ bloques con } \lambda_i \text{ en la diagonal siendo } l_i \text{ mult geométrica}}$ de λ_i

$$l_1 + l_2 + \dots + l_k = m$$

k es el número de v.p. distintos

el v.p. λ aparece en la diagonal $m(\lambda)$ (algebraica) veces.

ejemplo

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1 \ / \ m(\lambda_1) = 1$
$v_1 = (1, 0, 0)$

$\lambda_2 = 2 \ / \ m(\lambda_2) = 2$ → mult algebraica
$v_2 = (2, 1, 0)$ mult geometrica = 1

$$J = \left(\begin{array}{c|cc}\boxed{1} & 0 & 0\\ \hline 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

¿ respecto de qué base se tiene esta representación matricial ?

Buscamos matriz cambio de base P

$$J = P^{-1} A P$$

$$\boxed{AP = PJ}$$

columnas de P

$(P_1 \ P_2 \ P_3) J = A(P_1 \ P_2 \ P_3)$ lema de las columnas

$(P_1 \mid 2P_2 \mid P_2 + 2P_3) = (AP_1 \mid AP_2 \mid AP_3)$

$$\left\{\begin{aligned} P_1 &= AP_1 \\ 2P_2 &= AP_2 \\ P_2 + 2P_3 &= AP_3 \end{aligned}\right. \longrightarrow \boxed{\begin{aligned}(A - I)P_1 &= 0\\ (A - 2I)P_2 &= 0\\ (A - 2I)P_3 &= P_2\end{aligned}} \begin{aligned}&\to (\lambda = 1 \text{ vp}) \ P_1 = v_1\\ &\to (\lambda = 2 \text{ vp}) \ P_2 = v_2\end{aligned}$$

$(A - 2I)P_3 = P_2$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$z = 1/3$
$y = \alpha$
$x = 2\alpha - 1$ ⚠

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1/3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

tomamos $\alpha = 0$

$$P_3 = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1/3\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

Importante comprobar $PJ = AP$

ejemplo: Forma canónica de Jordan

$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&6&2\\-5&-10&-3\end{pmatrix}$ $\quad\lambda_1=2\ /\ m(\lambda_1)=3$

mult. geométria (nº de bloques con $\lambda_1=2$)

$(A-2I)X=0$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\-5&-10&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow \text{l.d.}\\ \leftarrow \text{l.d.}\end{matrix}$$

$x+2y+z=0$ $\quad\begin{matrix}z=\alpha\\y=\beta\\x=-\alpha-2\beta\end{matrix}$ $\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

mult geométrica 2

$J=\begin{pmatrix}\boxed{2}&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

¿cómo sabemos el orden de los bloques?
Hay que probar, si al final $PJ\neq AP$
se prueba el otro orden.

$PJ=AP$

$$\begin{cases}AP_1=2P_1 & \longrightarrow (A-2I)P_1=0 \longrightarrow P_1=V_1\\ AP_2=2P_2 & \longrightarrow (A-2I)P_2=0 \longrightarrow P_2=V_2\\ AP_3=P_2+2P_3 & \longrightarrow (A-2I)P_3=P_2\end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\-5&-10&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&-2\\2&4&2&1\\-5&-10&-5&0\end{array}\right)\xrightarrow[F_3+5F_1]{F_2-\frac{1}{2}F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&-2\\0&0&0&2\\0&0&0&-10\end{array}\right)\quad\begin{matrix}0=2\\0=-10\end{matrix}$$

sistema incompatible
no se saca P_2 de
esta forma

Forma alternativa:

$(A-2I)X=0$ no sólo lo cumplen los dos v.p asociados a vp 2
sino además cualquiera de sus
combinaciones lineales

tomamos $\boxed{P_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}}$, $P_2=a\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2a-b\\a\\b\end{bmatrix}$

ahora $(A-2I)P_3=P_2$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\-5&-10&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a-b\\a\\b\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&-2a-b\\2&4&2&a\\-5&-10&-5&b\end{array}\right)\xrightarrow[F_3+5F_1]{F_2-2F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&-2a-b\\0&0&0&a+4a+2b\\0&0&0&b-10a-5b\end{array}\right)$$

$5a+2b=0$
$-10a-4b=0$ $\quad b=-5/2\,a\quad$ para que salga sencillo: tomamos $a=2,\ b=-5$

$\boxed{P_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $\quad\begin{matrix}z=\alpha\\y=\beta\\x=-2\beta-\alpha+1\end{matrix}$ ⚠ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$

ejemplo: Forma canónica de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Valores propios

$\lambda_1 = 2 \ / \ m(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = 3 \ / \ m(\lambda_2) = 2$

vectores propios

· $\lambda_1 = 2 \quad (A-2I)X = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{1} & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - F_1]{F_2 - \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to z = \alpha \to x = \alpha \\ \to w = 0 \\ \to y = 0 \end{array}$$

mult geom = 1
↳ 1 caja de Jordan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

· $\lambda_2 = 3 \quad (A-3I)X = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - 2F_1]{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - \frac{3}{2}F_2]{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_4 - F_3} \cancel{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \\ \to z = 0 \\ \to w = 0 \end{array}} \qquad \begin{array}{l} w = \alpha \\ z = \alpha \\ y = 0 \\ x = \alpha \end{array} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mult geom = 1 ⟶ 1 caja de Jordan

Forma canónica de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Buscamos P tal que $J = P^{-1}AP$

$$PJ = AP$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} 2P_1 &=& AP_1 & \to (A-2I)P_1 = 0 \\ P_1 + 2P_2 &=& AP_2 & \to (A-2I)P_2 = P_1 \\ 3P_3 &=& AP_3 & \to (A-3I)P_3 = 0 \\ P_3 + 3P_4 &=& AP_4 & \to (A-3I)P_4 = P_3 \end{array} \right.$$

$$\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$(A-2I)P_2 = P_1$ podemos utiliza varias operaciones ya hechas en el cálculo de vp.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - F_1]{F_2 - \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to z = \alpha \to 2x = 1 - 1 + 2\alpha - 2 \\ \to w = 1 \qquad\quad x = \alpha - 1 \\ \to y = 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tomamos $\alpha = 0$

$$\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$(A-3I)P_4 = P_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-2F_1]{F_2-F_1 \atop F_3-2F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 0 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-\frac{3}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \cdot 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \omega = \alpha \\ \to \; y = \frac{-1+\omega-z}{-2} = \frac{-1+\alpha-1-\alpha}{-2} = 1 \\ \to \; z-\omega = 1 \to z = 1+\alpha \\ x = 1-\omega+2z-2y \\ \quad = 1-\alpha+\cancel{2}+2\alpha-\cancel{2} \\ x = 1+\alpha \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ tomamos $\alpha = 0$ $\boxed{P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ se verifica $PJ = AP$

---

ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

valores propios

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}(1)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2(\lambda^2+1) + (\lambda^2+1) = (\lambda^2+1)^2$$

$\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

vectores propios

$\lambda_1 = i$ $\quad (A-iI)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+iF_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-\frac{1}{2}F_2]{F_3+\frac{i}{2}F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{array}\right)$$

$\omega = 0$
$z = 0$
$x = \alpha$
$y = i\alpha$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \omega \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}.p. = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -i$ $\qquad \vec{v}.p. \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tª: si A entradas sólo reales
$AX = \lambda X \Rightarrow A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{array}\right)$$

Buscamos P que cumpla
$J = P^{-1}AP$ $PJ = AP$

$$\left\{\begin{array}{l} AP_1 = iP_1 \\ AP_2 = P_1 + iP_2 \\ AP_3 = -iP_3 \\ AP_4 = P_3 - iP_4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow (A-iI)P_1 = 0 \longrightarrow P_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow (A-iI)P_2 = P_1 \\ \longrightarrow (A+iI)P_3 = 0 \longrightarrow P_3 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow (A+iI)P_4 = P_3 \end{array}$$

$\underline{(A-\lambda I)P_2 = P_1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -i & 2 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + iF_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - \frac{1}{2}F_2]{F_3 + \frac{i}{2}F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -i & -i \end{array}\right)$$

$\omega = 1$
$z = i$
$x = \alpha$
$y = 1 - (-i)\alpha$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tomamos $\alpha = 0$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{(A+\lambda I)P_4 = P_3}$

$$\cdots \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{PJ}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ i & 1 & -i & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}} = \overset{AP}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ i & 1 & -i & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 & -i & 1 \\ -1 & 2i & -1 & 2i \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 & -i & 1 \\ -1 & 2i & -1 & 2i \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Ambigüedad

Hay algunos casos en los cuales la estructura de bloque de Jordan puede, a priori, no estar clara.

Ejemplo; supongamos una matriz A 4x4

valor propio λ → multiplicidad algebraica 4
→ multiplicidad geométrica 2

Existen las siguientes posibilidades

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

? ¿tal vez las dos últimas posibilidades pudieran ser AMBAS válidas?

$$AP = PJ \qquad\qquad AP = PJ \qquad\qquad AP = PJ$$

$$\begin{array}{lll} (A-\lambda I)P_1 = 0 & (A-\lambda I)P_1 = 0 & (A-\lambda I)P_1 = 0 \\ (A-\lambda I)P_2 = P_1 & (A-\lambda I)P_2 = 0 & (A-\lambda I)P_2 = P_1 \\ (A-\lambda I)P_3 = 0 & (A-\lambda I)P_3 = P_2 & (A-\lambda I)P_3 = P_2 \\ (A-\lambda I)P_4 = P_3 & (A-\lambda I)P_4 = P_3 & (A-\lambda I)P_4 = 0 \end{array}$$

Dada A, sólo uno de estos tres sistemas de ecuaciones dará cuatro soluciones independientes – los dos vectores propios y otros dos vectores auxiliares. Este conjunto determinará la forma canónica de Jordan correcta.

Cadenas de Jordan

En los ejemplos vistos, nos damos cuenta de que cada bloque de Jordan $\boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{matrix}}$ proporciona el sistema:

$$AP = PJ$$
$$\downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} AV_1 = \lambda V_1 \\ AV_2 = V_1 + \lambda V_2 \\ AV_3 = V_2 + \lambda V_3 \\ \vdots \\ AV_m = V_{m-1} + \lambda V_m \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} (A-\lambda I)V_1 = 0 \\ (A-\lambda I)V_2 = V_1 \\ (A-\lambda I)V_3 = V_2 \\ \vdots \\ (A-\lambda I)V_m = V_{m-1} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} (A-\lambda I)V_1 = 0 \\ (A-\lambda I)^2 V_2 = 0 \\ (A-\lambda I)^3 V_3 = 0 \\ \vdots \\ (A-\lambda I)^m V_m = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} V_1 \subseteq \operatorname{Ker}(A-\lambda I) \\ V_2 \subset \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2 \\ V_3 \subset \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^3 \\ \vdots \\ V_m \subset \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^m \end{array}$$

La dimensión de los nucleos $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$, $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2$, …, $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)^m$ es más grande cada vez, hasta que completamos todo el espacio.

> Formalmente; buscamos V_K que esté en el nucleo de $(A-\lambda I)^K$ pero no de $(A-\lambda I)^{K-1}$

$\operatorname{Ker}(A-\lambda I)^{K-1}$ es un subespacio de $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)^K$ $\forall K$

los vectores $v_1, v_2, \dots, v_m$ se llaman una cadena de Jordán asóciada al valor propio λ

El primer vector v_1 de una cadena de Jordan es siempre el vector propio asociado a λ, los otros ya no.

NOTA / CURIOSIDAD: Si una matriz es diagonalizable todas sus cadenas de Jordán están compuestas unicamente por un vector v_1, vector propio. Nótese que la longitud de una cadena de Jordan viene dada por el orden del bloque de Jordan correspondiente. En una matriz diagonalizable los bloques son todos de orden uno.

NOTA: Si un mismo λ tiene mult algebraica > 1, tiene varios bloques de Jordan y por tanto varias cadenas de Jordan.

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

$$\left\{\begin{array}{l} y'_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ y'_3 = f_3(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{array}\right\}$$ sistema de ecuaciones de 1er orden

tomando

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{F}(t,\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\vec{y}) \\ f_2(t,\vec{y}) \\ f_3(t,\vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(t,\vec{y}) \end{pmatrix}$$

queda

$$\boxed{y'(t) = F(t, y)}$$

Sistema Lineal de primer orden

Si $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ son lineales en $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$

$$\left\{\begin{array}{l} y'_1 = a_{11}(t)y_1 + \dots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ y'_2 = a_{21}(t)y_1 + \dots + a_{2n}(t)y_n + g_2(t) \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}(t)y_1 + \dots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t) \end{array}\right\}$$ $a_{ij}(t)$ y $g_i(t)$ son funciones

se puede escribir como

$$\boxed{Y' = A(t)Y + G(t)}$$

Sistema con coeficientes constantes

si $a_{ij}(t)$ son constantes a_{ij}

$$\boxed{Y' = A \cdot Y + G(t)}$$

Solución del sistema

Un conjunto de n funciones $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ que satisfaces $y'(t) = F(t, y)$. se denota:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Problema de valor inicial (PVI)

si se dan los sist. anteriores junto con las C.I. $y_i(t_0) = y_0$

en forma matricial:

$$\boxed{\begin{array}{l} Y' = F(t, y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{array}}$$

Desacoplamiento de un sist. lineal con coefts. ctes.

Es buscar una forma mas sencilla de la matriz A para resolverlo (diagonal o de Jordan)

· caso A diagonalizable

$$D = S^{-1} A S$$
$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

supongamos que queremos resolver:

$$Y' = AY \qquad A = SDS^{-1}$$

$$Y' = SDS^{-1}Y$$

premultiplicando por S^{-1}

$$\underbrace{S^{-1}Y'}_{X'} = D\underbrace{S^{-1}Y}_{X}$$

tomando $X = S^{-1}Y$ (cambio de variable)

derivando

$$X' = (S^{-1}Y)'$$
$$X' = S^{-1}Y'$$

$$\boxed{X' = DX}$$ sistema desacoplado

$$X' = DX$$
$$\downarrow \qquad D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = \lambda_1 x_1 \\ x'_2 = \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ x'_n = \lambda_n x_n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x'_1 - \lambda_1 x_1 = 0 \\ x'_2 - \lambda_2 x_2 = 0 \\ \vdots \\ x'_n - \lambda_n x_n = 0 \end{array}\right\}$$

resolviendo cada ecuación (facil) $\Rightarrow x_j(t) = C_j e^{\lambda_j t}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}_{E(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}}_{C}$$

$$\boxed{X(t) = E(t) \cdot C}$$

PVI

$$X(0) = X_0$$
$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} \quad E(0) \cdot \underline{C} = X_0 \qquad \text{en } t=0, \; E(0) = I$$
$$\boxed{C = X_0}$$

¿cómo sabemos $X(0)$?
$X(0) = S^{-1}Y(0)$
$S\,X(0) = Y(0)$
sist de ecuaciones
$\Rightarrow X(0)$

tb se puede hacer directo si se conoce S^{-1}

Deshacer el cambio

$$S^{-1}Y(t) = X(t)$$
$$Y(t) = S \cdot X(t)$$
$$Y(t) = S \cdot E(t) \cdot X(0) \qquad X(0) = S^{-1} \cdot Y(0)$$
$$Y(t) = S \cdot E(t) \cdot S^{-1} \cdot Y(0)$$

$$\boxed{Y(t) = S \cdot E(t) \cdot S^{-1} \cdot Y(0)}$$

ejemplo

$$\begin{aligned} x'_1 &= 4x_1 + x_2 - x_3 & x_1(0) &= 2 \\ x'_2 &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 & x_2(0) &= 0 \\ x'_3 &= -2x_1 + x_2 + 5x_3 & x_3(0) &= 4 \end{aligned}$$

⚠ en este ej hemos llamado X a la variable inicial e Y al C.V.

en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$X'(t) = A \cdot X(t) , \quad X(0) = X_0$$

La matriz es diagonalizable

$$\xrightarrow{\text{diagonalizando } (\dots)} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = S^{-1}AS$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ X' &= SDS^{-1}X \\ S^{-1}X' &= DS^{-1}X \end{aligned} \qquad \boxed{\text{c.v. } Y = S^{-1}X} \qquad Y' = DY$$

$$Y' = DY \Longrightarrow y(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{4t} \\ ce^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & & \\ & e^{4t} & \\ & & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

necesitamos $Y(0)$, $\quad Y(0) = S^{-1}X(0)$

$$SY(0) = X(0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

resolv.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{4t} \\ -e^{6t} \end{pmatrix}$$

luego:

$$X(t) = S \cdot Y(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{4t} \\ -e^{6t} \end{pmatrix}$$

Solución particular:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + 2e^{4t} - e^{6t} \\ -e^{2t} + 2e^{4t} - e^{6t} \\ e^{2t} + 2e^{4t} + e^{6t} \end{pmatrix}}$$

ejemplo $X' = AX + b$

$$\begin{aligned} x'_1 &= 4x_1 + x_2 - x_3 \\ x'_2 &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 - t \\ x'_3 &= -2x_1 + x_2 + 5x_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1(0) &= 2 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_3(0) &= 4 \end{aligned}$$

en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\boxed{\text{A diagonalizable} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$X' = AX + b$$
$$X' = SDS^{-1}X + b$$
$$S^{-1}X' = DS^{-1}X + S^{-1}b$$

$$\boxed{\text{C.V. } Y = S^{-1}X}$$
$$Y' = S^{-1}X'$$

$$Y' = DY + S^{-1}b$$

Calculamos S^{-1}

método Paco-Ricardo $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}(C_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}(C_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}(C_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + \frac{1}{2}F_3]{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 - \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \cdot (-\frac{1}{2})]{F_2 \cdot \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{matrix}}_{S^{-1}}$$

$$C(t) = S^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Queda
$$\underbrace{\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}}_{Y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{Y} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ 0 \end{pmatrix}}_{C}$$

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + \frac{1}{2}t \\ y'_2 = 4y_2 - \frac{1}{2}t \\ y'_3 = 6y_3 \end{cases}$$

que corresponden a 3 EDO que podemos resolver:

① $y'_1 = 2y_1 + \frac{1}{2}t$ $\qquad \underline{y_{1h}} = C_1 e^{2t}$

$\underline{y_{1p}} = A + Bt$ $\quad$ sust. $\quad B = 2A + 2Bt + \frac{1}{2}t$ $\quad \begin{cases} B = 2A \\ 0 = 2B + \frac{1}{2} \end{cases}$

$y'_{1p} = B$ $\qquad B = -\frac{1}{4}, \quad A = -\frac{1}{8}$

$y_1(t) = y_{1p}(t) + y_{1h}(t)$

$$\boxed{y_1(t) = -\frac{1}{4}t - \frac{1}{8} + C_1 e^{2t}}$$

② $y_2' = 4y_2 - \frac{1}{2}t$

$\longrightarrow$ sol. $y_2(t) = C_2 e^{4t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{32}$

③ $y_3' = 6y_3$

$\longrightarrow$ sol. $y_3(t) = C_3 e^{6t}$

ya tenemos:

$$Y = \begin{pmatrix} e^{2t} & & \\ & e^{4t} & \\ & & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/8 \\ 1/32 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sol. particular

$$Y(0) = \begin{pmatrix} C_1 - 1/8 \\ C_2 + 1/32 \\ C_3 \end{pmatrix} = S^{-1} X(0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 - 1/8 \\ C_2 + 1/32 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} C_1 = 9/8 \\ C_2 = 63/32 \\ C_3 = -1 \end{cases}$$

luego

$$Y = \begin{pmatrix} 9/8\, e^{2t} - 1/4\, t - 1/8 \\ 63/32\, e^{4t} + 1/2\, t + 1/32 \\ - e^{6t} \end{pmatrix}$$

deshaciendo el cambio:

$$X(t) = S\,Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/8\, e^{2t} - 1/4\, t - 1/8 \\ 63/32\, e^{4t} + 1/2\, t + 1/32 \\ - e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 9/8\, e^{2t} \\ 63/32\, e^{4t} \\ - e^{6t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/4\, t - 1/8 \\ 1/2\, t + 1/32 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{9}{8} e^{2t} \underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \frac{63}{32} e^{4t} \underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} - e^{6t} \underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 1/4\, t - 3/32 \\ 3/4\, t + 5/32 \\ 1/4\, t - 3/32 \end{pmatrix}$$

columnas de S

ejemplo: no diagonalizable

$$\begin{aligned} x'_1 &= 5x_1 + 4x_2 \\ x'_2 &= -x_1 - 3x_3 \\ x'_3 &= x_1 - 2x_2 + x_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_3(0) &= 2 \end{aligned}$$

$X' = AX \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Forma canónica:

$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} J &= P^{-1}AP \\ A &= PJP^{-1} \end{aligned}$

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ X' &= PJP^{-1}X \\ P^{-1}X' &= JP^{-1}X \end{aligned} \qquad \boxed{\text{C.V.} \quad Y = P^{-1}X}$$

$$Y' = JY \longrightarrow \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} y'_1 = 4y_1 + y_2 \\ y'_2 = 4y_2 \\ y'_3 = \quad -2y_3 \end{cases}$$

Resolviendo:

- $y'_2 = 4y_2 \rightarrow \quad y_2(t) = C_2 e^{4t}$
- $y'_1 = 4y_1 \underline{+ y_2} = 4y_1 \underline{+ C_2 e^{4t}}$

  $\rightarrow y_{1H} = C_1 e^{4t}$

  $\rightarrow y_{1P} = tC_2 e^{4t} \longleftarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{1P} &= Ate^{4t} \\ y'_{1P} &= e^{4t}(4At + A) \\ e^{4t}(4At+A) &= 4Ate^{4t} + C_2e^{4t} \\ \boxed{A = C_2} \quad & y_{1P} = C_2te^{4t} \end{aligned}}$$

- $y'_3 = -2y_3$

  $\rightarrow y_3(t) = C_3 e^{-2t}$

tenemos: $Y(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{4t} + tC_2e^{4t} \\ C_2e^{4t} \\ C_3e^{-2t} \end{pmatrix}$

$Y(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} Y(0) &= P^{-1}X(0) \\ PY(0) &= X(0) \end{aligned}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{resolv.}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sol part. (de Y)

$$Y(t) = \begin{pmatrix} (1+t)e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

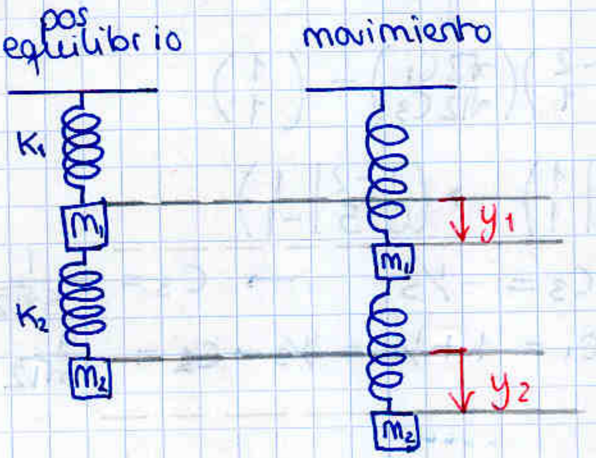
Ahora deshacemos el C.V.

$$X(t) = P \cdot Y(t)$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1+t)e^{4t}\\ e^{4t}\\ e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$= (1+t)e^{4t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + e^{4t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}e^{-2t}$$

Aplicaciones: ej: Unión de resortes



m_1:

$$my_1'' + K_1y_1 = K_2(y_2 - y_1)$$

m_2:

$$m_2y_2'' + K_2(y_2 - y_1) = 0$$

tomemos $K_1 = 6, K_2 = 4, m_1 = m_2 = 1$

$$\begin{cases} y_1'' = -10y_1 + 4y_2\\ y_2'' = 4y_1 - 4y_2\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}y_1''\\y_2''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

Diagonalizable

$$D = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}D = S^{-1}AS\\ A = SDS^{-1}\end{matrix}$$

$\lambda_1 = -2 \rightarrow v_1 = (1, 2)$

$\lambda_2 = -12 \rightarrow v_2 = (-2, 1)$

$$\boxed{\text{C.V.} \quad \begin{matrix}X = S^{-1}Y\\ X' = S^{-1}Y'\\ X'' = S^{-1}Y''\end{matrix}}$$

$$Y'' = AY$$

$$S^{-1}Y'' = DS^{-1}Y$$

$$X'' = DX$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x_1'' = -2x_1\\ x_2'' = -12x_2\end{cases}$$

① $x_1'' = -2x_1$

$\lambda^2 + 2 = 0 \qquad \lambda = \pm i\sqrt{2}$

SFS = $\{\operatorname{sen}\sqrt{2}t, \cos\sqrt{2}t\}$

② $x_2'' = -12x_2$

$\lambda^2 + 12 = 0 \qquad \lambda = \pm i\sqrt{12}$

SFS = $\{\operatorname{sen}\sqrt{12}t, \cos\sqrt{12}t\}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_1\operatorname{sen}\sqrt{2}t + C_2\cos\sqrt{2}t\\ C_3\operatorname{sen}\sqrt{12}t + C_4\cos\sqrt{12}t\end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \operatorname{sen} \sqrt{2}t + C_2 \cos \sqrt{2}t \\ C_3 \operatorname{sen} \sqrt{12}t + C_4 \cos \sqrt{12}t \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} \qquad X'(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}C_1 \cos \sqrt{2}t - \sqrt{2}C_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}t \\ \sqrt{12}C_3 \cos \sqrt{2}t - \sqrt{12}C_4 \operatorname{sen} \sqrt{12}t \end{pmatrix}$$

$$X'(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}C_1 \\ \sqrt{12}C_3 \end{pmatrix}$$

supongamos las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y'_1(0) = 1 \\ y'_2(0) = 1 \end{cases} \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Y'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = S^{-1}Y(0) \qquad X'(0) = S^{-1}Y'(0)$$

$$S\,X(0) = Y(0) \qquad S\,X'(0) = Y'(0)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}C_1 \\ \sqrt{12}C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = 0 \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$$C_4 = 0$$

$$\sqrt{12}C_3 = -1/5 \longrightarrow C_3 = -\frac{1}{5\sqrt{12}}$$

$$\sqrt{2}C_1 = 1 - 1/5 = 4/5 \rightarrow C_1 = \frac{4}{5\sqrt{2}}$$

Por lo tanto queda:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 4/5\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t \\ -1/5\sqrt{12} \operatorname{sen} \sqrt{12}t \end{pmatrix}$$

Deshaciendo el cambio:

$$Y = SX$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5\sqrt{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2}t \\ -\frac{1}{5\sqrt{12}} \operatorname{sen} \sqrt{12}t \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = \frac{4}{5\sqrt{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2}t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5\sqrt{12}} \operatorname{sen} \sqrt{12}t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y_1(t) = 4/5\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t + 2/5\sqrt{12} \operatorname{sen} \sqrt{12}t \\ y_2(t) = 8/5\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t - 1/5\sqrt{12} \operatorname{sen} \sqrt{12}t \end{Bmatrix}$$

Solución homogenea y particular, SFS

- Solución general $y = y_H + y_P$

La sol. general de $Y' = A(t)Y + G(t)$

se puede escribir $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$
y_H es la sol. general de lo homogenea $Y = A(t)Y$
y_P es una sol particular

- PVI : solución única

sean $A(t)$ y $G(t)$ funciones continuas en I

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + G(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$ tiene solución única

Sistema de ecs. diferenciales con coeficientes constantes

$$Y' = A \cdot Y + G(t)$$

→ SOLUCIÓN DE LA HOMOGENEA

$$Y' = A \cdot Y \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Las soluciones deben ser del tipo $\vec{Y} = \vec{v} e^{\lambda t}$

$$Y' = \lambda e^{\lambda t} \vec{v} \qquad A \cdot Y = A e^{\lambda t} \vec{v}$$

$$Y' = AY$$

$$\overbrace{\lambda e^{\lambda t} \vec{v}}^{Y'} = A \overbrace{e^{\lambda t} \vec{v}}^{Y}$$

$$\lambda \vec{v} = A \vec{v}$$

⇒ $\vec{v}$ es vector propio con valor propio λ.
$y(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$ es solución $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Teorema : $\dim(S_H) = n$

El espacio vectorial S_H de las soluciones de $Y' = AY$ (también llamado SFS) es de dimensión n

- **Proposición: Uso de $\vec{v}$.p para el SFS**

sean $v_1, \dots, v_n$ una base de vectores propios de A con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valores propios asociados (iguales o no)

entonces
$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 \\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2 \\ \vdots \\ y_n(t) = e^{\lambda_n t} v_n \end{cases}$$

son una base de S_H, es decir, forman un SFS

- **La solución general de la ecuación homogenea**

$$\vec{y}_H(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \vec{v}_n$$

ejemplo: $\begin{cases} y'_1 = y_1 + 12 y_2 \\ y'_2 = 3y_1 + y_2 \end{cases}$ $\quad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underset{Y'}{\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}} = \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \underset{Y}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} \qquad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0$$
$$= (\lambda - 7)(\lambda + 5) = 0$$
$$\lambda = 7 \qquad \lambda = -5$$

$\underline{\lambda = 7}$
$$(A - \lambda I)X = 0$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 12 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} y = \alpha \\ x = 2\alpha \end{matrix}$$
$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = -5}$
$$(A - \lambda I)X = 0$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 12 & 0 \\ 3 & 6. & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} y = \alpha \\ x = -2\alpha \end{matrix}$$
$$v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución general: $Y(t) = C_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 2C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_1 = 1/2 \\ C_2 = 1/2 \end{matrix}$$

Sol. particular: $Y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Valores propios complejos

Objetivo: de dos vectores propios complejos conjugados se pueden obtener dos soluciones reales del SFS

Sea $Y' = AY$

$$A \begin{cases} \vec{v}.p: \ \alpha + \beta i \rightarrow v.p. \ \lambda & A\lambda = \lambda v \\ \vec{v}.p: \ \alpha - \beta i \rightarrow v.p. \ \bar{\lambda} & A\bar{\lambda} = \bar{\lambda}\bar{v} \end{cases}$$

Por lo tanto
$$Y_1(t) = e^{\lambda t} v$$
$$Y_2(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}$$

son soluciones complejas de $Y' = A \cdot Y$

Podemos obtener dos soluciones reales L.I. de la siguiente forma

- Escogemos una de las soluciones complejas, no importa cual, se obtendrán las mismas 2 sol reales
- ej. escogemos $Y_1(t) = e^{\lambda t} v$ $\qquad \lambda = \alpha + \beta i$, $v = \vec{a} + \vec{b} i$

$$e^{\lambda t}\vec{v} = e^{(\alpha+\beta i)t}(\vec{a} + \vec{b} i)$$
$$= e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t}(\vec{a} + \vec{b} i) \overset{\text{Euler}}{=} e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \,\text{sen}\,\beta t)(\vec{a} + \vec{b} i)$$
$$= \underbrace{e^{\alpha t}(a\cos\beta t - b\,\text{sen}\,\beta t)}_{Z_1} + i\underbrace{e^{\alpha t}(a\,\text{sen}\,\beta t + b\cos\beta t)}_{Z_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_1(t) = (a\cos\beta t - b\,\text{sen}\,\beta t)e^{\alpha t} \\ Z_2(t) = (a\,\text{sen}\,\beta t + b\cos\beta t)e^{\alpha t} \end{array}\right\} \text{son soluciones reales L.I. de } Y' = AY$$

ejemplo: $Y'(t) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} Y(t)$

Valores propios: $|A-\lambda I| = 0 = (6-\lambda)(4-\lambda) + 5 = 24 - 10\lambda + \lambda^2 + 5$

$= \lambda^2 - 10\lambda + 29 =$ $\quad \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$= (\lambda - 5 - 2i)(\lambda - 5 + 2i)$ $\quad = 5 \pm i\frac{\sqrt{16}}{2} = \boxed{5 \pm 2i = \lambda}$

vectores propios:

$\lambda = 5 + 2i$

$(A - (5+2i)I)X = 0$

$\left(\begin{matrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \rightarrow (1-2i)x = y \rightarrow \underline{v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}}$

$\underline{\lambda = 5 - 2i \rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}}$

Soluciones complejas

$$\left.\begin{array}{l} Y_1(t) = e^{(5+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} \\ Y_2(t) = e^{(5-2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$ son sols. complejas de $Y'(t) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} Y(t)$

Obtención de soluciones reales

$Y_1(t) = e^{(5+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$

$= e^{5t} \cdot e^{2it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$

(podemos coger $y_1(t)$ ó $y_2(t)$, la solución será la misma)

$= e^{5t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$

$= e^{5t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$

~~$= e^{5t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right) + e^{5t}($~~

$= e^{5t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 2t + i\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t + i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right)$

$$= \underbrace{e^{5t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right)}_{Z_1(t)} + i\,\underbrace{e^{5t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\cos 2t\right)}_{Z_2(t)}$$

Solución general

$$Y(t) = C_1 e^{5t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

No hay base de vectores propios → Cadena de Jordan

Teorema:

Sean $v_1, \dots, v_m$ vectores de una cadena de Jordan asociados al valor propio λ de A.

Entonces las siguientes funciones son l.i. y satisfacen $Y' = AY$ (son soluciones del sistema homogeneo)

λ_1

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\lambda t} v_1 \\ y_2(t) &= e^{\lambda t} v_2 + t e^{\lambda t} v_1 \qquad \frac{t^k}{k!} \quad k=0,1,\dots,m-1 \\ &\vdots \\ y_m(t) &= e^{\lambda t} v_m + t e^{\lambda t} v_{m-1} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda t} v_1 \end{aligned}}$$

se pueden obtener las n soluciones del SFS repitiendo esto para cada valor propio.

NOTA: Una matriz diagonalizable con base de vectores propios es un caso particular de esto, donde hay n cadenas de Jordan de longitud 1 que son precisamente los vectores propios

ejemplos

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y(t)$$

Hallar cadenas de Jordan

$$\dots \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} Av_1 &= 2v_1 \longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Av_2 &= v_1 + 2v_2 \longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ Av_3 &= 3v_3 \longrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ Av_4 &= v_3 + 3v_1 \longrightarrow v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por el teorema

cadena $\lambda = 2$:

$$Y_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_2(t) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

cadena $\lambda = 3$:

$$Y_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_4(t) = e^{3t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$SFS = \{ Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \}$$

Solución general

$$Y(t) = C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t) + C_3 Y_3(t) + C_4 Y_4(t)$$

Vectores de Jordan complejos

De nuevo se pueden obtener soluciones reales

ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} Av_1 = iv_1 \\ Av_2 = v_1 + iv_2 \\ Av_3 = -i\, v_3 \\ Av_3 = v_3 - iv_4 \end{array}$$

2 cadenas de Jordan

$\{ v_1 = (1\ i\ 0\ 0)^t,\ v_2 = (0\ 1\ i\ 1)^t \}$

$\{ v_3 = (1 - i\ 0\ 0)^t,\ v_4 = (0\ 1\ -i\ 1)^t \}$

NOTA. De cada cadena
salen dos soluciones
(en total cuatro) complejas.
De las dos soluciones de
una cadena cualquiera
se obtienen 4 sol. reales.
(con la otra cadena se obt.
las mismas o c. l.)

Basta considerar $\lambda = i$ para generar las $n = 4$ soluciones reales

Por el teorema:
$$Y_1(t) = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_2(t) = e^{it}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + te^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1(t) = (\cos t + i \operatorname{sen} t)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \underset{1}{e^{\alpha t}} \rightarrow$$

en este caso $\alpha = 0$
(la parte real del valor propio)

$$= \left[\cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + i\left[\cos t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{Z_1(t)} + i\underbrace{\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{Z_2(t)}$$

$$Y_2(t) = (\cos t + i \operatorname{sen} t)\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + t(\cos t + i \operatorname{sen} t)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \left[\cos t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t\operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$+ i\left[\cos t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cos t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} t\cos t \\ \cos t - t\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{Z_3(t)} + i\underbrace{\begin{pmatrix} t\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t + t\cos t \\ \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}}_{Z_4(t)}$$

$$\boxed{\text{Sol. general: } Z(t) = C_1 Z_1(t) + C_2 Z_2(t) + C_3 Z_3(t) + C_4 Z_4(t)}$$

→ SOLUCION PARTICULAR E.D. lineal no homogenea

$$(1) \quad Y' = A \cdot Y + G(t)$$

Sea $Y_H(t) = C_1 Y_1(t) + \ldots + C_n Y_n(t)$ solución general de la homogenea.
Basta encontrar una solución particular Y_P de (1)
La solución completa es:

$$Y(t) = Y_H(t) + Y_P(t)$$

· Método de variación de parámetros

Sabiendo $\underset{n\times 1}{Y_H(t)} = C_1 \underset{n\times 1}{Y_1(t)} + C_2 \underset{n\times 1}{Y_2(t)} + \ldots + C_n \underset{n\times 1}{Y_n(t)}$

↳ matricialmente: $Y_H(t) = \underbrace{\left(\underset{n\times 1}{Y_1(t)} \ \underset{n\times 1}{Y_2(t)} \ \ldots \ \underset{n\times 1}{Y_n(t)} \right)}_{M(t):\ \text{matriz fundamental de soluciones } n\times n} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = M(t) \cdot C$

conjeturamos $Y_P(t) = u_1(t) Y_1(t) + u_2(t) Y_2(t) + \ldots + u_n(t) Y_n(t)$

↳ matricialmente: $Y_P(t) = \underbrace{\left(\underset{n\times 1}{Y_1(t)} \ \underset{n\times 1}{Y_2(t)} \ \ldots \ \underset{n\times 1}{Y_n(t)} \right)}_{M(t) \ n\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}}_{u(t) \ n\times 1}$

En resumen:
conjeturamos $\boxed{Y_P(t) = M(t) \cdot u(t)}$

sustituyendo esta expresión en $Y'(t) = A\, Y(t) + G(t)$

$$[M(t) \cdot u(t)]' = A\,[M(t)\, u(t)] + G(t)$$

$$\cancel{\boxed{M'(t)}\boxed{u(t)}} + M(t)\, u'(t) = \cancel{\boxed{A M(t)}\boxed{u(t)}} + G(t)$$

como $M'(t)$ es matriz fund. sol: $M'(t) = A\, M(t)$

queda: $\boxed{M(t)\, u'(t) = G(t)}$

$$u'(t) = M^{-1}(t) \cdot G(t)$$

integrando

$$u(t) = \int \underset{n\times n}{M^{-1}(t)} \cdot \underset{n\times 1}{G(t)} \, dt$$

y como $\underset{n\times 1}{\underbrace{Y_P(t)}} = \underset{n\times n}{\underbrace{M(t)}} \cdot \underset{n\times 1}{\underbrace{u(t)}}$

$$\boxed{\underset{n\times 1}{\underbrace{Y_P(t)}} = \underset{n\times n}{\underbrace{M(t)}} \int \underset{n\times 1}{\underbrace{M^{-1}(t) \cdot G(t)}} \, dt}$$

este método sirve incluso si $A = A(t)$
es muy poderoso pero tambien muy costoso.

En la practica se prefiere el método de los cts. ind.

ejemplo: $Y'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ $G(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

... $y_H(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Conjeturamos $Y_p(t) = M(t) \cdot u(t)$

siendo $\boxed{M(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}}$ importante entender esta matriz

$M_{n \times n} = \underset{n\times 1}{Y_1} \; \underset{n\times 1}{Y_2} \; \underset{n\times 1}{Y_3} \ldots$

$u(t) = \int M^{-1}(t) G(t) \, dt$

necesitamos $M^{-1}(t) \cdot G(t)$

$$M^{-1}(t) = \frac{1}{-3e^{-7t}} \begin{pmatrix} -2e^{-5t} & -e^{-5t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} e^{2t} & \frac{1}{3} e^{2t} \\ \frac{1}{3} e^{5t} & -\frac{1}{3} e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}(t) \cdot G(t) = \begin{pmatrix} 2t e^{2t} + \frac{1}{3} e^{t} \\ t e^{5t} - \frac{1}{3} e^{4t} \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

$$u(t) = \int M^{-1}(t) G(t) \, dt = \int \begin{pmatrix} 2t e^{2t} + \frac{1}{3} e^{t} \\ t e^{5t} - \frac{1}{3} e^{4t} \end{pmatrix} dt$$

$$\boxed{u(t) = \begin{pmatrix} t e^{2t} - \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{3} e^{t} \\ \frac{1}{5}\left(t e^{5t} - \frac{1}{5} e^{5t}\right) - \frac{1}{12} e^{4t} \end{pmatrix}}$$

$$Y_p(t) = M(t) \cdot u(t)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t}(t - \frac{1}{2}) + e^{t}(\frac{1}{3}) \\ \frac{1}{5} e^{5t}(t - \frac{1}{5}) + e^{4t}(-\frac{1}{12}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} + t - \frac{1}{5} + e^{-t}(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}) \\ t - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}(t - \frac{1}{5}) + e^{-t}(\frac{1}{3} + \frac{2}{12}) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y_p(t) = \begin{pmatrix} 2t - \frac{7}{10} + \frac{1}{4} e^{-t} \\ \frac{3}{5} t - \frac{21}{52} + \frac{1}{2} e^{-t} \end{pmatrix}}$$

$$Y(t) = Y_H(t) + Y_P(t)$$

$$\boxed{Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t - \frac{7}{10} + \frac{1}{4} e^{-t} \\ \frac{3}{5} t - \frac{21}{52} + \frac{1}{2} e^{-t} \end{pmatrix}}$$

· método de los coeficientes indeterminados

- A constante
- $G(t)$: vector de exponenciales, senos, cosenos, polinomios, sumas de estos, productos de estos

según $G(t)$, se conjetura una solución particular

Para simplificar la tabla, llamamos

$$P_k(t) := \begin{pmatrix} v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} t + \dots + \begin{pmatrix} v_k \end{pmatrix} t^k$$

es decir, un 'polinomio' de grado k.

NOTA: En la tabla interpretar que, si λ no es v.p entonces
$m(\lambda) = 0$
$P_0(t) = (v)$

$G(t)$	k	$Y_p(t)$
$P_m(t)$	$m(0)=k$	$P_{m+k}(t)$
$e^{\alpha t} \cdot v$	$m(\alpha)=k$	$e^{\alpha t}\left[P_k(t)\right]$
$\cos(\beta t)\cdot v_1 + \text{sen}(\beta t) v_2$	$m(\beta i)=k$	$\cos \beta t \left[P_k(t)\right] + \text{sen}\, \beta t \left[P_k(t)\right]$
$e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t)\cdot v_1 + \text{sen}(\beta t) v_2\right]$	$m(\alpha+\beta i)=k$	$e^{\alpha t}\left[\cos \beta t \left(P_k(t)\right) + \text{sen}\, \beta t \left(P_k(t)\right)\right]$

ejemplo

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 4e^t \\ -2e^t \end{pmatrix}$$

valores propios $\lambda = 3$ (doble)
$\lambda = -3$

A es diagonalizable

$$y_H(t) = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Conjeturamos, teniendo en cuenta $G(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} e^t$

$$\boxed{Y_p(t) = e^t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$ (1 no es valor propio)

Tiene que cumplir el sistema no homogeneo: $Y' = AY + G$

$$e^t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dividimos por e(t) y resolvemos

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad y_p(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = Y_H(t) + Y_p(t)$$

ejemplo $Y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} -4\cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

$\lambda = 0, 4$ valores propios $\rightarrow$ $y_h(t) = C_1 e^{0t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

conjetura: $\boxed{Y_p(t) = \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}$

Se sustituye en $Y' = AY + G$ y se igualan senos y cosenos

$$Y' = AY + G$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\operatorname{sen} t + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\cos t\right) + \begin{pmatrix} -4\cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} & (\cos) \quad (1) \\ -\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & (\operatorname{sen}) \quad (2) \end{cases}$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$-\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}$$

⚠

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{gauss}} \boxed{\begin{matrix} c = 0 \\ d = 1 \end{matrix}}$$

en (1)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{matrix} a = -2 \\ b = 2 \end{matrix}}$$

Solución general

$$Y(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\operatorname{sen} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t$$

ejemplo

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_H(t) = C_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conjetura ($\lambda = 0$ es valor propio!)

$$\boxed{Y_p(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}} \qquad Y'_p(t) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

sust. en la E.D.

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

igualando coeficientes

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} & (1) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} & (2) \end{cases}$$

$d = \beta$
$c = \beta$

sust (1) en (2)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$b = \alpha$
$a = 2 + \alpha$

~~Como buscamos UNA sol. part lo mas conveniente es $\alpha = \beta = 0$~~

~~$Y_p(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ no funciona sust en $Y' = AY + G$!!~~

~~probamos $\alpha = \beta = 1$ $Y_p(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$ tampoco funciona! queda $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$~~

~~probamos $\alpha = 1$, $\beta = -1$ $Y_p(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} t$ ya funciona~~

poco matemático

sust $a = 2 + \alpha$, $b = \alpha$, $c = \beta$, $d = \beta$ en (1) queda $\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\beta = -1}$

y tomando $\alpha = 0$ (se comprueba que cumple la ec.)

$$Y_p(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

ejemplo $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(...) $y_H(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\lambda = 1$ raiz doble
cadena de Jordan
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}.p$
$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sabiendo $G(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

tomamos la conjetura ($\lambda = 0$ no es vp, $\lambda = 2$ no es vp)

$$\boxed{Y_p(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} e^{2t}}$$

sustituyendo en $Y' = AY + G$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} e^{2t} \right] + \begin{pmatrix} t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

igualando coeficientes t, e^{2t} y ctes.

$$\begin{array}{ll} \text{ctes.} & \left\{ \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & (1) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (2) \\ \begin{pmatrix} 2e \\ 2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (3) \end{array} \right. \\ t. & \\ e^{2t} & \end{array}$$

(2): $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\begin{array}{l} d = 0 \\ c = -1 \end{array}}$

sust en (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\begin{array}{l} b = 0 \\ a = -1 \end{array}}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2e \\ 2f \end{pmatrix}$ ⚠

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\begin{array}{l} f = 1 \\ e = 1 \end{array}}$

$$Y_p(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

sol. gen. $Y(t) = Y_p(t) + Y_H(t)$

$Y(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$

CONVERSION DE UNA ECUACION DE ORDEN n A UN SISTEMA DE ORDEN 1.

- Tenemos la ec. de orden n

$$(1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y = b(t)$$

- Introducimos las variables

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

- Y se obtiene el sistema de orden 1.

$$(2) \quad \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = -a_{n-1}\,y_n - \ldots - a_1\,y_2 - a_0\,y_1 + b(t) \end{cases}$$

Proposición:

si $\varphi(t)$ es sol de (1) $\rightarrow \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{n-1}(t) \end{pmatrix}$ es sol de (2)

si $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ es sol de (2) $\rightarrow$ $\varphi(t) = y_1$ es sol de (1)

ejemplo:

$$\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = e^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow[y_2 = y' \\ y_3 = y'']{\text{introd. } y_1 = y} \boxed{\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ y'_3 = -3y_3 - 2y_2 + e^t \end{cases} \quad \text{C.I.} \quad \begin{matrix} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(0) = 0 \end{matrix}}$$

Se ha obtenido el sistema

$$Y' = AY + G$$

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} \quad \text{con solución:}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \boxed{\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{6}e^t + \tfrac{1}{2}e^{-t} - \tfrac{1}{6}e^{-2t}} \\ \tfrac{1}{6}e^t - \tfrac{1}{2}e^{-t} + \tfrac{1}{3}e^{-2t} \\ \tfrac{1}{6}e^t + \tfrac{1}{2}e^{-t} - \tfrac{2}{3}e^{-2t} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{solución de la ec. inicial}$$

CONVERSIÓN DE UN SISTEMA DE ORDEN n A UN SISTEMA DE ORDEN 1

- Tenemos un sistema con variables $y_1, \dots, y_n$ con un mayor orden de derivación $k_1, \dots, k_n$ respectivamente.
- Para y_1 con mayor orden de derivación k_1 introducimos

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1', \quad \dots, \quad x_{k_1} = y_1^{(k_1-1)}$$

- Lo mismo para y_i con mayor orden de derivación k_i
- Sea $l = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ el número de nuevas variables se obtiene el sistema de orden 1:

$$\left(A_{l \times l} \right) \cdot X' = \left(B_{l \times l} \right) \cdot X + \left(C_{l \times l} \right)$$

ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} y''_1 - 3y_1' + y_2' &= -2y_1 + y_2 \\ y_1' + y_2' &= 2y_1 - y_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{C.V.} \quad \begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_1' \\ x_3 &= y_2 \end{aligned} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} x'_1 \qquad\qquad &= x_2 \\ x'_2 + x'_3 &= -2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x'_3 &= 2x_1 - x_2 - x_3 \end{aligned} \right.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} + C$$

$$A X' = BX + C$$

si $\det(A) \neq 0$, el sistema se dice no degenerado, y premultiplicando por A^{-1}:

$$\boxed{X' = A^{-1}BX + A^{-1}C}$$

sistema de orden 1 : sus soluciones son equivalentes al primero

ejemplo (anterior)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} X \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sistema Paco-Ricardo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (C_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el sistema, premultiplicando por A^{-1} queda

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

que es un sistema lineal (en este ejemplo también homogeneo) de orden 1, que sabemos resolver

si $\det(A) = 0$: sistema degenerado

En este caso el que el sistema tenga o no soluciones depende de otras consideraciones en las que no vamos a entrar.

Como no existe A^{-1} no podemos premultiplicar por ella

ejemplo:
$$\begin{cases} y''_1 - y_1' + y_2' - y_2 = 0 \\ y''_1 + y_1' + y_2' + 2y_2 = 0 \end{cases}$$

$K_1 = 2$ (mayor orden de deriv de y_1)
$K_2 = 1$
} 3 variables nuevas

$$x_1 = y_1 \quad x_2 = y_1' \quad x_3 = y_2$$

$$\xrightarrow{\text{c.v.}} \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x_2' - x_2 + x_3' - x_3 = 0 \\ x_2' + x_2 + x_3' + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 + x'_3 = +x_2 + x_3 \\ x'_2 + x'_3 = -x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} X$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow$ Sistema degenerado.

En este caso se puede solucionar de la siguiente forma, volviendo al sistema inicial:

Restamos la 1era ec a la 2ª

$$2y_1' + 3y_2 = 0 \longrightarrow \boxed{y_2 = -\tfrac{2}{3} y_1'}$$

sustituyendo en la 1era

$$y''_1 - y_1' + (-\tfrac{2}{3}y_1')' - (-\tfrac{2}{3}y_1') = 0$$

$$\tfrac{1}{3} y''_1 - \tfrac{1}{3} y_1' = 0$$

$$\boxed{y''_1 - y'_1 = 0}$$

$$\xrightarrow{\text{sol.}} \quad y_1(t) = C_1 + C_2 e^t$$

$$y_2(t) = -\tfrac{2}{3} y_1' = -\tfrac{2}{3} C_2 e^t$$