ETSITelecomunicación

Complementos Matemáticos

Apuntes de Pak

Complementos Matemáticos para Telecomunicaciones

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Primer cuatrimestre de 1[er] curso
Curso 2003/2004

Fecha de última actualización: 31 Julio 2007

Complementos Matemáticos

Tablas y Resúmenes

Tema 1: Conjuntos

Tema 2: El razonamiento lógico

Tema3: Aplicaciones o funciones

(i) Definiciones y funciones elementales

(ii) Límites, continuidad y cálculo diferencial

Tema 4: Números Complejos

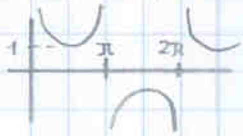
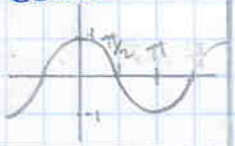
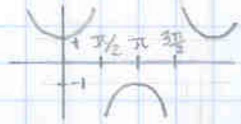
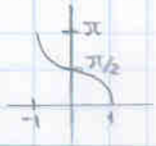
Tema 5: Polinomios

Tema 6: Integración

Tema 7: Geometría

Ejercicios

- Funciones trigonométricas e hiperbólicas

$f(x)$	$\frac{df}{dx}(x)$	$\frac{1}{f(x)}$	$f^{-1}(x)$	$\frac{d\, f^{-1}(u)}{dx}$ $u=f(x)$
sen x 	$\cos x$	cosec x 	arcsen x 	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\cos x$ 	$-\text{sen}\, x$	sec x 	arc cos x 	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ 	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 - tg^2 x$ $\frac{d}{dx}$ cotg $x = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} = -1 - \text{cotg}^2 x$	cotg $x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$ 	arc tg x 	$\frac{u'}{1+u^2}$
sh $x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 	ch x		arg sh $x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 	$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
ch $x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 	sh x		arg ch $x = \ln(x \pm \sqrt{x^2+1})$ 2 versiones 	$(\pm)\frac{u'}{\sqrt{-1+u^2}}$
th $x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 	$\frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$		arg th $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 	$\frac{u'}{1-u^2}$

Trigonométricas		Hiperbólicas
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	! =	$ch^2 x - sh^2 x = 1$ $1 + th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$
$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}\, a \cos b \pm \cos a\, \text{sen}\, b$ $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$ $tg(a \pm b) = \frac{tg\, a \pm tg\, b}{1 \mp tg\, a\, tg\, b}$	= !	$sh(a \pm b) = sh\, a\, ch\, b \pm ch\, a\, sh\, b$ $ch(a \pm b) = sh\, a\, sh\, b \pm ch\, a\, ch\, b$
$\text{sen}(2x) = 2\, \text{sen}\, x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ $= 2\cos^2 x - 1$ $= 1 - 2\sin^2 x$ $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$	= = !	$sh(2x) = 2\, sh\, x\, ch\, x$ $ch(2x) = 2 ch^2 x - 1$ $th(2x) = \frac{2\, th\, x}{1 + th^2 x}$
$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$		

Integración de funciones racionales de sen y cos. por sustitución

$\int R(\text{sen}\, x, \cos x)\, dx$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= tg\frac{x}{2} \\ x &= 2\, \text{arctg}\, t \\ \text{sen}\, x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx &= \frac{2dt}{1+t^2} \end{aligned}}$$

casos más simples

→ R es impar en sen x $\quad R(-\text{sen}\, x, \cos x) = -R(\text{sen}\, x, \cos x)$

cuando hay senos elevados a n impar

$\int R(\text{sen}\, x, \cos x)\, dx$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \cos x \\ \text{sen}^2 x &= 1 - t^2 \\ dt &= -\text{sen}\, x\, dx \end{aligned}}$$

→ R es impar en cos x $\quad R(\text{sen}\, x, -\cos x) = -R(\text{sen}\, x, \cos x)$

cuando hay cosenos elevados a n impar

$\int R(\text{sen}\, x, \cos x)\, dx$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \text{sen}\, x \\ \cos^2 x &= 1 - t^2 \\ dt &= \cos x\, dx \end{aligned}}$$

→ R es par en sen. cos $\quad R(-\text{sen}\, x, -\cos x) = R(\text{sen}\, x, \cos x)$

cuando hay un número par de senos y cosenos multiplicándose

$$\boxed{\begin{aligned} t &= tg\, x \\ \text{sen}\, x &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx &= \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}}$$

Integrar potencias de sen, cos, tan: (sin usar sustitución)

potencia impar de sen/cos: $\boxed{\cos^2 + \sin^2 = 1}$

cualquier potencia de tg: $\boxed{1 + tg^2 = \frac{1}{\cos^2}}$

potencia par de sen: $\boxed{\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A}$

" " " cos: $\boxed{\cos 2A = 2\cos^2 A - 1}$ → $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

Tabla de derivadas de las funciones elementales

$f(x)$		$Df(x)$	
k		0	
x^k	$(\sqrt{x})$	$k x^{k-1}$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
a^x	(e^x)	$a^x \ln a$	(e^x)
$\log_a x$	$(\ln x)$	$1/x \ln a$	$(1/x)$
$\operatorname{sen} x$		$\cos x$	
$\cos x$		$-\operatorname{sen} x$	
$\operatorname{tg} x$		$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	
$\operatorname{cotg} x$		$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$	
$\operatorname{arctg} x$		$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arcsen} x$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$		$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	
$\operatorname{th} x$		$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	
$\arg \operatorname{sh} x$		$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\arg \operatorname{ch} x$		$\frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}$	
$\arg \operatorname{th} x$		$\frac{1}{1-x^2}$	

utilizando regla de la cadena

$f(u(x))$		$Df(u(x))$	
k		0	
u^k	$(\sqrt{u})$	$u' k u^{k-1}$	$\left(\frac{u'}{2\sqrt{u}}\right)$
a^u	(e^u)	$u' a^u \ln a$	$(u' e^u)$
$\log_a u$	$(\ln u)$	$u'/u \ln a$	(u'/u)
$\operatorname{sen} u$		$u' \cos u$	
$\cos u$		$-u' \operatorname{sen} u$	
$\operatorname{tg} u$		$\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \operatorname{tg}^2 u)$	
$\operatorname{cotg} u$		$-\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = u'(-1 - \operatorname{cotg}^2 u)$	
$\operatorname{arctg} u$		$\frac{u'}{1+u^2}$	
$\operatorname{arcsen} u$		$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
$\arccos u$		$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
$\operatorname{sh} u$		$u' \operatorname{ch} u$	
$\operatorname{ch} u$		$u' \operatorname{sh} u$	
$\operatorname{th} u$		$\frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u} = u'(1 - \operatorname{th}^2 u)$	
$\arg \operatorname{sh} u$		$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	
$\arg \operatorname{ch} u$		$\frac{u'}{\sqrt{-1+u^2}}$	
$\arg \operatorname{th} u$		$\frac{u'}{1-u^2}$	

Complementos Matemáticos - Referencia Rápida

conjuntos: $\in, \notin, :, \subset, \subseteq, \setminus, \cup, \cap, A'$

($\subseteq$: subconj. puede ser totalidad; $\setminus$: menos)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

naturales, enteros, quebrados, reales, complejos

ec. cuadrática
$a=1$ $b=$ par

$-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

Razonamiento lógico: $\wedge$ (y), $\vee$ (o), $\neg$ (no)

- directa $p \to q$
- recíproca $q \to p$
- contraria $\neg p \to \neg q$
- contrarecíproca $\neg q \to \neg p$

Demostración: Falso $\to$ contraejemplos

Verdadero $\to$ tertio exclusivo $(p \vee q)\ \neg p \to q$

$\to$ reducción al absurdo: suponer $p \to \neg q \to$ da lugar a algo absurdo

$\to$ inducción

$P(1)$ y $\{P(K) \to P(K+1)\}$

Funciones: clasificación $F: A \to B$

- variable: escalar, vectorial, x real, x compleja
- función: escalar, vectorial, x real, x compleja

$Im(F)$, $D(F)$

$D(f+g) = D(f) \cap D(g)$

Dominios:
- denominador $\neq 0$
- interior raíz par ≥ 0
- interior logaritmo > 0

acotada, monótona (creciente, decreciente)

simétrica: par, impar

periódica

- valor absoluto: inecuaciones
- Trascendentes:
  - exponencial
  - trigonométricas
  - hiperbólicas

Límites: Propiedades:
- $g \leq f$ ($B_a(r)$) $\to \lim g \leq \lim f$
- $\lim g = L$, $\lim f = L$, $f \leq h \leq g \to \lim h = L$
- función acotada $\times$ f cuyo límite $= 0 \to \lim = 0$

ej $x \operatorname{sen} x$

\+ Límites: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ $(a>1)$ — lo de abajo crece mucho más rápido que lo de arriba

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}(x) = \pm \pi/2$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

no existen límites de funciones periódicas en $\pm\infty$

¡OJO con $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$! ¿$x\to 0^-$ o $x \to 0^+$?

ej: $\frac{1}{1+e^{1/x}}$

Resolución de indeterminaciones

$\infty - \infty$: multiplicar y dividir por conjugada

$\frac{\infty}{\infty}$: dividir por el menor de los factores de x de entre el mayor del numerador y del denom

$\frac{0}{0}$: simplificar al máximo, a veces se cancela

$$1^\infty \quad \lim f(x)^{g(x)} = 1^\infty = e^h \qquad h = g(x)(f(x)-1)$$

otras formas:

ej: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{4 \frac{x}{2} \frac{x}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Continuidad: f continua en $[a,b]$ si f continua en $]a,b[$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

regla de la cadena: f y g continuas en $a \to g \circ f$ continua en a

Tipos:
- evitable: $\exists \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$
- salto: finito, infinito
- esencial: ej $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

Teoremas para $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua
- acotada
- alcanza máx y mín abs (teorema de Weierstrass)
- teorema de los valores intermedios

Cálculo diferencial:

Def $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ cociente incremental

f derivable $\to f$ continua

f continua $\not\to f$ derivable ej: $|x|$

$$(f\cdot g)' = f'g \cdot fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Regla de la cadena: $\boxed{[g(f(x))]' = [g'(f(x))] \cdot [f'(x)]}$

Truquillos: - derivada de la inversa: $f: A\to B$, derivable, biyectiva, f^{-1} continua, f^{-1} derivable, $f'(x)\neq 0, \forall x \in A$

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$

ej $f(x)=y=\cos x$ $f'(x)$: $-\operatorname{sen} x$

$f^{-1}(y) = x = \arccos y$

$(\arccos x)' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = x'$

$D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- derivada logarítmica $F(x) = f^1(x) f^2(x) f^3(x) \dots$

$\ln F(x) = \ln f^1(x) + \ln f^2(x) + \dots$

$F'(x) = \left[\frac{f^{1\prime}(x)}{f^1(x)} + \frac{f^{2\prime}(x)}{f^2(x)} + \dots\right] F(x)$

ec de recta tangente en $(a, f(a))$ $\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a)}$ $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$ (grad)

diferencial: recta tangente en un punto pero que pasa por el origen

Puntos críticos: $f'(x) = 0 \to$ extremo relativo (Teorema de Fermat)

$f''(x) > 0$ mín, $f''(x) < 0$ máx

máx abs f = mayor ($f(a)$, $f(b)$, mayor de los máx rel)

$f'(x) > 0 \to f \nearrow$

$f'(x) < 0 \to f \searrow$ (corolario)

Teorema de Rolle f continua

$\boxed{\exists c : f'(c) = 0}$

Corolarios: - entre $f(x)=0$ y $f(x=0)$ $\exists f'(x)=0$

- entre 2 sol consecutivas de $f'(x)=0$ $\exists$ a lo sumo 1 de $f(x)=0$

Teorema del Valor Medio

f $C[a,b]$ y $D]a,b[$

$$\exists c : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

L'Hopital: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ si existe ej $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x - x}{x - sen\,x} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to 0}\frac{tg^2 x}{1-\cos x} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to 0}\frac{2(1+tg^2 x)}{\cos x} = 2$

o Polinomios de Taylor

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots + \frac{f^n(0)x^n}{n!}}$$

$\boxed{\text{Error} \approx P_{n+1}}$

$$sen\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$f^{2n}(0) = 0$
$f^{2n-1}(0) = (-1)^{n-1}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$f^{2n}(0) = (-1)^n$
$f^{2n}(0) = 0$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Resto n-ésimo: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Polinomio de Newton
$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots \binom{n}{n}b^n$

$P_n(x) = f(x) \rightarrow P_n(g(x)) = f(g(x))$
$e^{3x+2} = 1 + 3x + 2 + \frac{(3x+2)^2}{2} + \frac{(3x+2)^3}{3!} + \dots$

o Numeros complejos:

$z = a + bi$ $Re(z) = a$ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\boxed{(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2}$

$Im(z) = b$ $arg(z) = atan2\left(\frac{b}{a}\right)$

$\bar{z} = a - bi$

- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
- $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$\overline{z \pm u} = \bar{z} \pm \bar{u}$
$\overline{z/u} = \bar{z}/\bar{u}$
$\overline{z \cdot u} = \bar{z} \cdot \bar{u}$

forma polar o modulo-argumental
$z = |z|\cos\theta + i|z|sen\,\theta$
$= |z|_\theta$

sencilla para trabajar
$z \cdot u = |z||u|_{\theta+\alpha}$ $z/u = |z|/|u|_{\theta-\alpha}$
$z^n = |z^n|_{n\theta}$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)_{\theta k} \quad \theta k = \frac{\theta + k2\pi}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots n}$$

Formula de euler:

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}}$$

o Polinomios

Teorema de Ruffini
$P(a) = $ resto de $\frac{P(x)}{x-a}$
↳ $P(a) = 0 \rightarrow a$ es raiz

Teorema Fundamental del Álgebra
TODO polinomio no cte tiene raiz

Cardano y Vietta
si los coef son enteros
b raiz $= \frac{p}{q}$ → p divisor de a_0, q divisor de a_n

Si coeficientes $\mathbb{R}$ → Raices complejos conjugadas $\boxed{\left.\begin{matrix} a+bi \\ a-bi \end{matrix}\right\} (x-a)^2 + b^2}$

Teorema de Unicipidad
factorización es única
multiplicidad es única

$P(x) = a_n(x-r_1)^{m_1} \dots (x-r_n)^{m_n}[(x-a_1)^2 + b_1^2][\dots]$

- Superficie de un cuerpo de revolución

$$\boxed{S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

· Geometria vectores, bases, $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$
ec. rectas posiciones relativas con Rouché Frobenius
ec. planos
$\boxed{m' = \frac{1}{m}}$

· Integración

– por partes $\int uv' = uv - \int u'v$

– cociente de polinomios $\int P/Q\,dx$
si $gr\,P \geq gr\,Q$ $P = QC + R$
$P/Q = C + R/Q$
si $gr\,P \leq gr\,Q$ → división en fracciones simples
- ↳ $\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + c$
- ↳ $\int \frac{1}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n}dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}$
- ↳ $\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$ → llevar a un logaritmo: $\int \frac{u'}{u}$ y una arctg: $\int \frac{u'}{1+u^2}$

– por sustitución
- ej: lo que hay dentro de raiz $= t^2$ no olvidar el dx!
- para usar $sen^2 + \cos^2 = 1$ y $ch^2 - sh^2 = 1$

$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = \left(\frac{x}{k} = sen\,t\right)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2+x^2}} = \left(\frac{x}{k} = sh\,t\right)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}} = \left(\frac{x}{k} = ch\,t\right)$

– Integrales de funciones racionales seno y coseno

– AREAS y VOLUMENES:
$A = \int_a^b f(x)\,dx$ cuidado si pasa por eje x 1ro estudiar la función y hacer cambios apropiados.
$\boxed{\text{area de elipse} \quad A = \pi ab}$

– Volumen de Revolución: $\boxed{V = \pi\int_a^b f^2\,dx}$

– Longitudes de arcos: $\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,dx}$

TEMA 1 CONJUNTOS

un conjunto de elementos ej $A = \{1, 3\}$ (conjunto: A; elemento: 1)

Lenguaje básico

- $\in$: se incluye en $1 \in A$
- $\notin$: no se incluye en $5 \notin A$
- $:$: tal que, con la particularidad
- $\subset$: es subconjunto de $\subsetneq$ para recalcar que no puede ser total.
- $\subseteq$: es subconjunto que puede ser la totalidad
- $\setminus$: menos
- $\cup$: unión
- $\cap$: intersección
- A^c, A', $\bar{A}$: complementario

· Determinación de un conjunto

↳ por extensión (citar todos los elementos) ej $A = \{1, 3\}$

↳ por comprensión (citar las particularidades de los elementos) ej $B = \{\text{acabados en cero}\}$

· Igualdad

$D = \{r \in \pi : r \,//\, r_0\}$

$E = \{r \in \pi : r \text{ no corte } r_0\}$

$D = E$ (siempre y cuando consideres que r_0 corta r_0)

· Subconjunto

ej: $F = \{\text{múltiplos de } 5\} = \{\dot{5}\}$

$G = \{\text{acabados en cero}\}$

$G \subset F$

$G \subsetneq F$

ej: $H = \{\text{decimales finitos}\} \rightarrow h = a'\, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots b_n$

$I = \{\text{quebrados} : \frac{p}{m} : m \neq 0 : m = 2^k 5^\ell\}$

es H subconjunto de I?

$$h \times \frac{10^n}{10^n} = \frac{a b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots b_n}{10^n} = \frac{p}{2^n 5^n}$$

$H \subset I$

$3'41416 \times \frac{10^6}{10^6}$ $\quad \frac{341416}{10^6} = \frac{341416}{2^6 5^6}$

· Conjunto universal

la totalidad de elementos

ej: $J = \{\text{raíces de } x^2 - 4x + 3 = 0\}$ $\quad \mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}\}$

$J^c = \{z \in \mathbb{C},\ z \neq 1,\ z \neq 3\}$

· Diferencia

$\rightarrow A \setminus B$ (A menos B)  $= \{x \in A : x \notin B\}$

$\rightarrow A \cup B$  $= \{x \in A \text{ o } x \in B\}$

$\rightarrow A \cap B$  $= \{x \in A \text{ y } x \in B\}$

· Conjunto ordenado: importa el orden de los elementos

ej $K = \{\text{coeficientes de un polinomio}\}$

· Sucesión

ej. $L = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ $\quad L = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad L = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

- Naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$x + 3 = 0$??

- Enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{Z}^- = \{\text{enteros negativos}\}$

$3x = 5$??

- Racionales (o quebrados) $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} = \{\text{decimales periódicos}\}$ $= \{\text{quebrados}\}$

$x^2 = 2$??

- Irracionales: decimales no periodicos ej: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \pi$
- Reales: $\mathbb{R} = \{\text{racionales e irracionales}\}$ → se suele trabajar con intervalos de la recta real

$[a, b]$

$]a, b]$

$]-\infty, 0[$

etc...

$]-\infty, +\infty[\equiv \mathbb{R}$

$x^2 + 1 = 0$??

- Imaginarios ej $\sqrt{-1}$
- Complejos $\mathbb{C} = \{\text{reales e imaginarios}\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

entornos:

$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

entorno (abierto) de a de radio ε

TEMA 2: EL RAZONAMIENTO LÓGICO

Lenguaje del Razonamiento

1. Definición 2. Proposición (lema, proposición, teoréma, corolario) 3. Ejemplos

↳ simples: * $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
↳ compuestas: * 16 es par y cuadrado perfecto

· Conectores

$\wedge$ y $\vee$ o $\neg$ negación $\rightarrow$ implicación $\leftrightarrow$ doble implicación

- Cuantificadores

$\exists$ existe $\nexists$ no existe $\forall$ para todo $\exists!$ existe un único elemento

* $\exists! \, 0 \in \mathbb{Z} : z + 0 = z \ \forall z \in \mathbb{Z}$

· Proposiciones

· directa $p \rightarrow q$
recíproca $q \rightarrow p$
contraria $\neg p \rightarrow \neg q$
contrarecíproca $\neg q \rightarrow \neg p$

equivalentes

$x > 2 \rightarrow x > 0$

$x \not> 0 \rightarrow x \not> 2$

· Condiciones necesarias y suficientes

$p \rightarrow q$

suficiente → necesaria

* f. diferenciable → f. continua
es suficiente para que f. sea continua — es necesario para que f. sea diferenciable

* no tan obvio lingüísticamente hablando: n acaba en 0 → $n = \dot{5}$
suficiente — necesario

* $c = a \cdot b$ es impar ⟷ a y b son impares

* r es quebrado ⟷ r es periódico

$x > 2 \rightarrow x > 0$
si $x > 2$ entonces $x > 0$
si $x > 2$ necesariamente $x > 0$
$x > 2$ sólo si $x > 0$
$x > 2$ sólo cuando $x > 0$
es condición necesaria para $x > 2$ que $x > 0$
todos los $x > 2$ verifican $x > 0$

$a = 2n+1$
$b = 2m+1$
$a \cdot b = (2n+1)(2m+1)$
$= 4mn + 2n + 2m + 1$
$= 2(2mn + n + m) + 1$
$= 2k + 1$ (impar)

$a = 2n+1$
$b = 2m$
$a \cdot b = (2n+1)2m$
$= 2nm + 2m$
$= 2(nm + m)$
$= 2k$ (par)

Métodos de demostración

a) Falso $\quad p \not\rightarrow q \quad$ utilizando contraejemplos

* toda ec. de 2º grado tiene 2 raíces. contraejemplo: $x^2+2x+1=(x+1)^2$
* $n=\dot{5} \rightarrow n$ acaba en 0. contraejemplo: $5 \cdot 3 = 15$

b) Verdadero $\quad p \rightarrow q \quad$ comprobar ejemplos NO es una demostración

No existen métodos generales. Espabílese Ud.

Algunos métodos usados:

(i) Tertio exclusivo $\quad$ * $\quad (p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$

(ii) Reducción a lo absurdo $\quad (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ contrarecíproca)

en lugar de demostrar $p \rightarrow q$ se demuestra $\neg q \rightarrow \neg p$

* $z \in \mathbb{Z}$ impar : $z = z_1 \cdot z_2 \rightarrow z_1 \wedge z_2$ pares ?

la contrarecíproca es:

no (z_1 y z_2 impares) $\rightarrow z = z_1 \cdot z_2$ no impar

z_1 o z_2 par $\rightarrow z = z_1 \cdot z_2$ par

$$\begin{aligned} z_1 &= 2m \\ z_2 &= 2n+1 \\ z_1 \cdot z_2 &= 2m(2n+1) \\ &= 4mn+2m \\ &= 2(2mn+m) \\ &= 2k \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_1 &= 2m \\ z_2 &= 2n \\ z_1 \cdot z_2 &= (2m)(2n) \\ &= 4mn \\ &= 2k \end{aligned}$$

en el libro pone: supones p cierto y q falso, y llegas a una situación absurda, lo que quiere decir que $p \rightarrow q$

(iii) Inducción matemática

· utilizada con propiedades de un número natural

1. demostrar que la propiedad se cumple en 1
2. suponiendo que se cumple en k, demostrar que tb. en $k+1$

$$P(1) \text{ y } \{P(k) \rightarrow P(k+1) \ \forall k\} \rightarrow P(n) \ \forall n$$

ej. demostrar que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

• $P(1) \qquad 1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 \qquad$ SI

• suponiendo que $P(k)$ se cumple $\quad 1^2+\ldots+k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$$P(k+1) = \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6} \quad ①$$

y tb. $\quad P(k+1) = 1^2+\ldots+k^2+(k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad ②$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$$

SI

luego se cumple $P(n) \ \forall n$

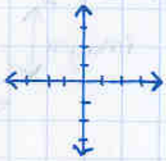
TEMA 3: APLICACIONES O FUNCIONES

Producto Cartesiano

$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$ todas las parejas de elementos

ej: $\mathbb{R} =$ 

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$



un elemento cualquiera de $\mathbb{R}^3$ sería (x_1, x_2, x_3) una n-tupla o vector

Correspondencia

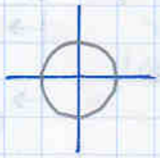
- No coges todas las parajas
- Haces corresponder ciertos elementos de a con ciertos elementos de b.

ej: el juego de los barcos

$A = \{A, B, C, \dots\}$
$B = \{1, 2, 3, \dots\}$

	A	B	C	D	E	F
1		X	X	X		X
2						X
3			X	X		

ej: $(x, y) : x^2 + y^2 = 1$



$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

- la representación de estas correspondencias se llama grafo o gráfica.
- Las correspondencias que nos interesan son las aplicaciones o funciones

un pequeño inciso:

ec. cuadratica:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{1}{2a}b \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{1}{2a}b \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} = -\frac{1}{2a}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2a}b\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

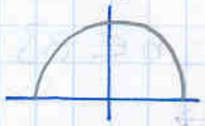
si $a = 1$ y b es par, se queda

$$\boxed{= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}}$$

Aplicaciones o Funciones

· son correspondencias que cumplen $\left.\begin{matrix}(x,y)\in F\\(x,z)\in F\end{matrix}\right\} y=z$

ej $y=+\sqrt{1-x^2}$



$\boxed{y=\pm\sqrt{1-x^2} \text{ no es una función}}$

sean A y B dos conjuntos:

Dominio e Imagen:

$D(F)=\{x\in A: \exists y\in B, (x,y)\in F\}$

$Im(F)=\{y\in B: \exists x\in A, (x,y)\in F\}$

$\forall x\in D(F)\ \exists!\, y\in Im(F),\ (x,y)\in F$

Restricción

si quiero restringir el conjunto a C en lugar de todo A

se escribe $f|_C$

Clasificación

F: A ⟶ B

variable: → escalar, → vectorial

función → escalar (un nº) → real / compleja

→ vectorial (un vector)

ej $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función escalar real, variable escalar

ej $f: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ función escalar real, variable vectorial
temperatura en un espacio tridimensional

ej $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ función escalar compleja, variable escalar

ej $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ función escalar compleja, variable escalar

ej $f: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ función vectorial, variable vectorial
velocidad del aire en un espacio 3D

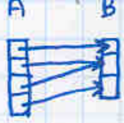
Tipos

F: A → B mirando sólo el conjunto de destino B

· **Inyectiva** $F(x)=F(z)\Rightarrow x=z$
dos elementos no pueden tener la misma imagen
truquillo: una recta horizontal solo toca un punto

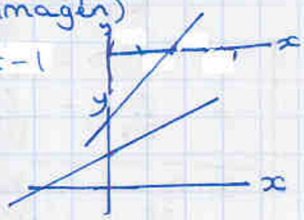
ej: $f|_{x>0}(x)=+\sqrt{1-x^2}$

· **Sobreyectiva** $Im(F)=B$
todo el conjunto B es pareja de alguien
$\forall y\in B\ \exists x\in A: f(x)=y$



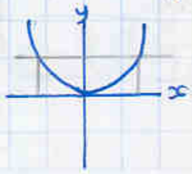
(dos elementos pueden tener la misma imagen)

ej: $f: 3x-1$



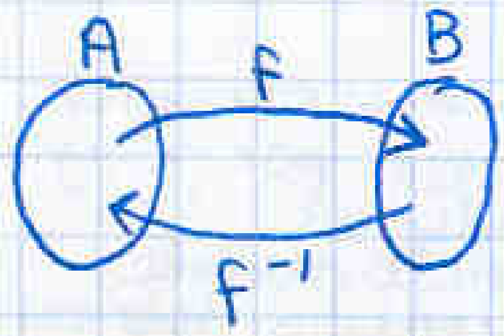
· **Biyectiva**
Inyectiva y sobreyectiva ej $f(x)=\frac{1}{2}x+1$
Solo las biyectivas tienen inversa

· **Ninguna**
Ni inyectiva ni sobreyectiva ej x^2

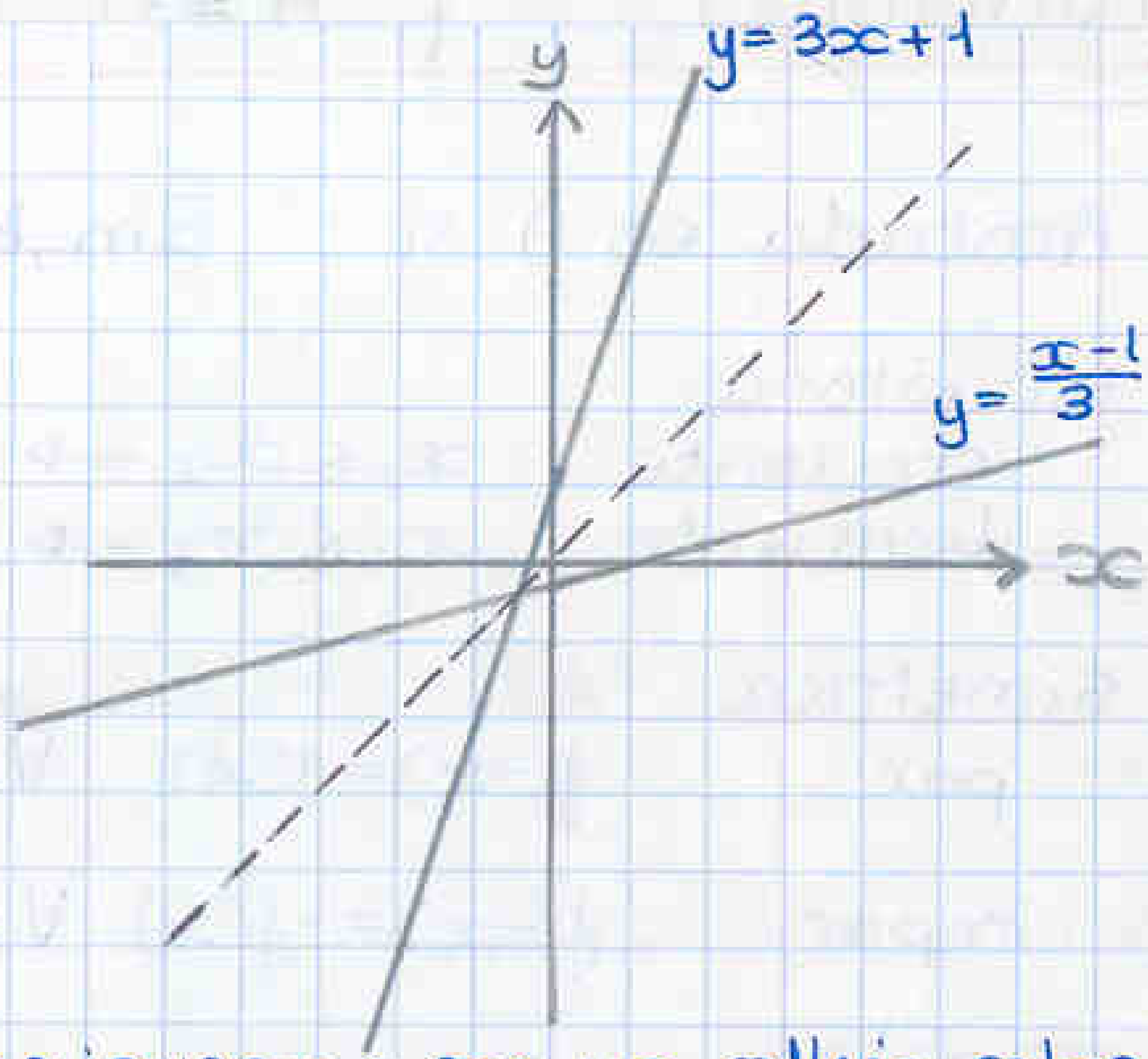


Función inversa

$\exists f^{-1} \longleftrightarrow f$ biyectiva

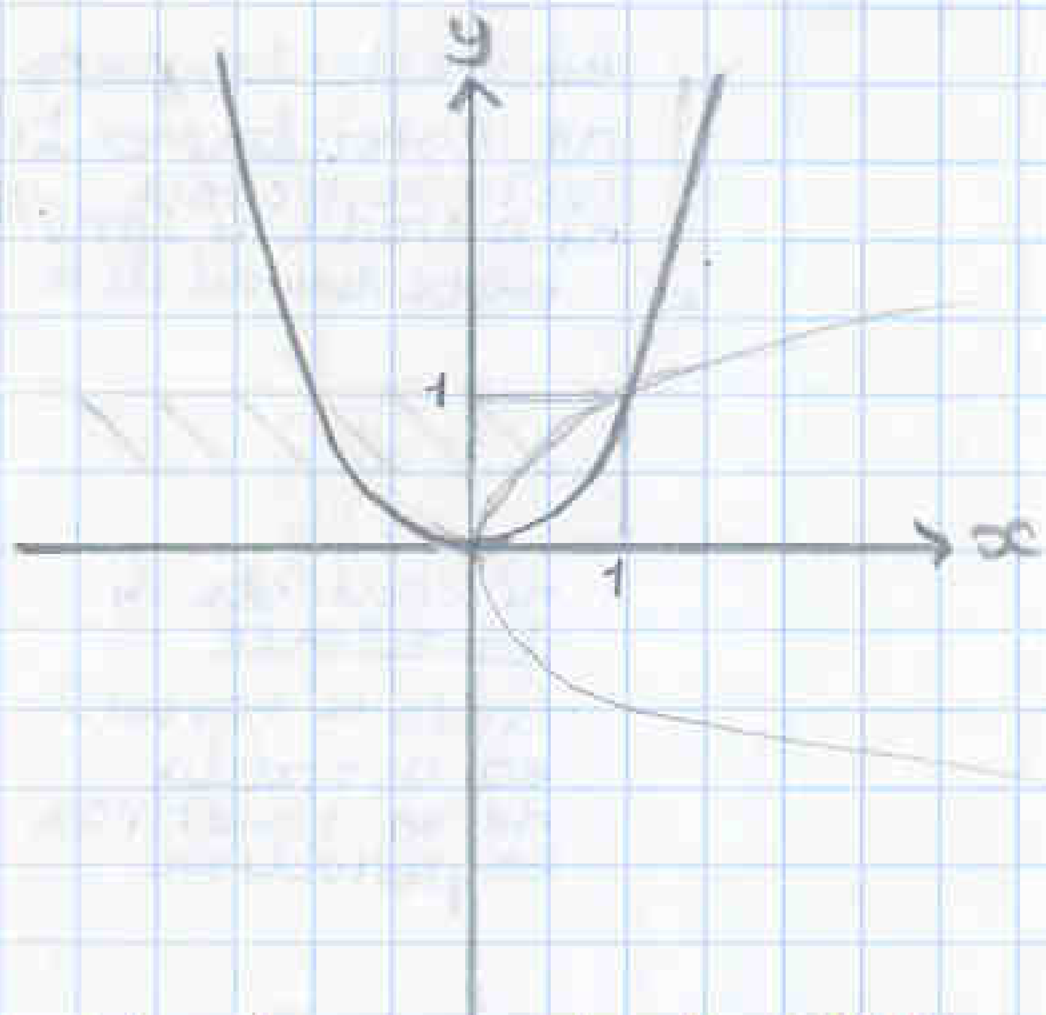


ej:



las inversas son un reflejo sobre la recta $y=x$

ej: $y=x^2$ no tiene inversa

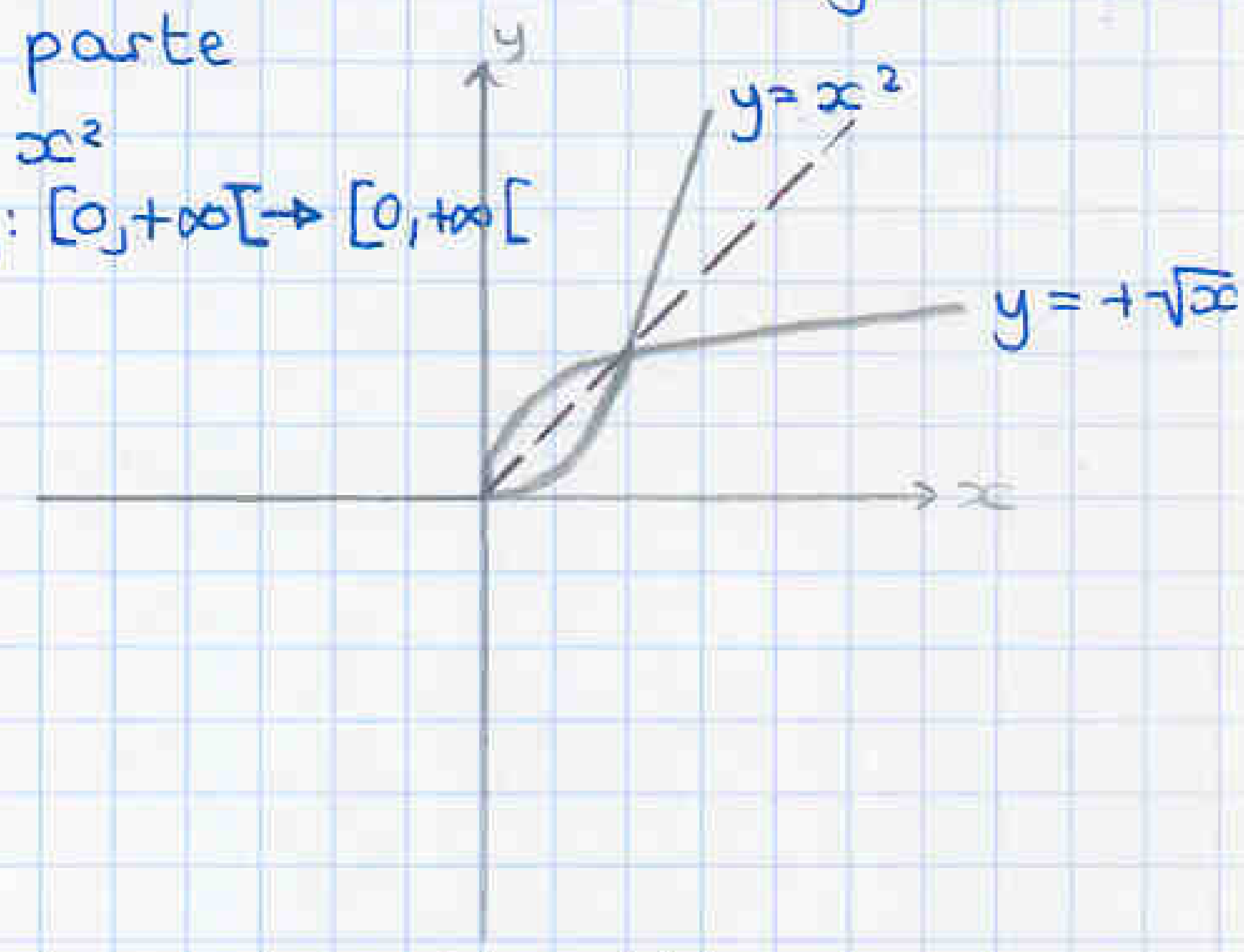


si hiciéramos la inversa, un valor de x tendría dos valores de y.

si que tendría inversa si cogemos sólo una parte

$y=x^2$

$y: [0,+\infty[\rightarrow [0,+\infty[$



ahora ya es inyectiva (aunque no es biyectiva, no debemos pensar en TODOS los casos, sino en solo los posibles, es decir, ignoramos los negativos, de forma que sí que tiene inversa)

Por eso en algunos libros pone
$\exists f^{-1} \longleftrightarrow f$ inyectiva

Funciones $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- **Acotada** en A si $\exists m, M \in \mathbb{R} : m < f(x) < M \quad \forall x \in A$

  ej $f(x) = \sin(x)$

- **Monótona**

  creciente $x_1 \leq x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$

  decreciente $x_1 \leq x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2)$

  podemos cambiar $\leq$ y $\geq$ por $<$ y $>$ para ser estrictamente creciente o decreciente.

  ej $y=2$ es creciente y decreciente, pero no estrictamente

- **Simétrica** (el dominio tiene que ser simétrico)

  (eje y) par $f(-x)=f(x) \quad \forall x \in A$ ej x^2

  (origen) impar $f(-x)=-f(x) \quad \forall x \in A$ ej x^3

  ej: parte entera de x

  es creciente, pero no estrictamente (sólo a trozos) ni acotada ni simétrica

  ej: parte decimal de x

  ni creciente ni decreciente (sólo a trozos) es acotada no es simétrica es periódica

- **Periódica**

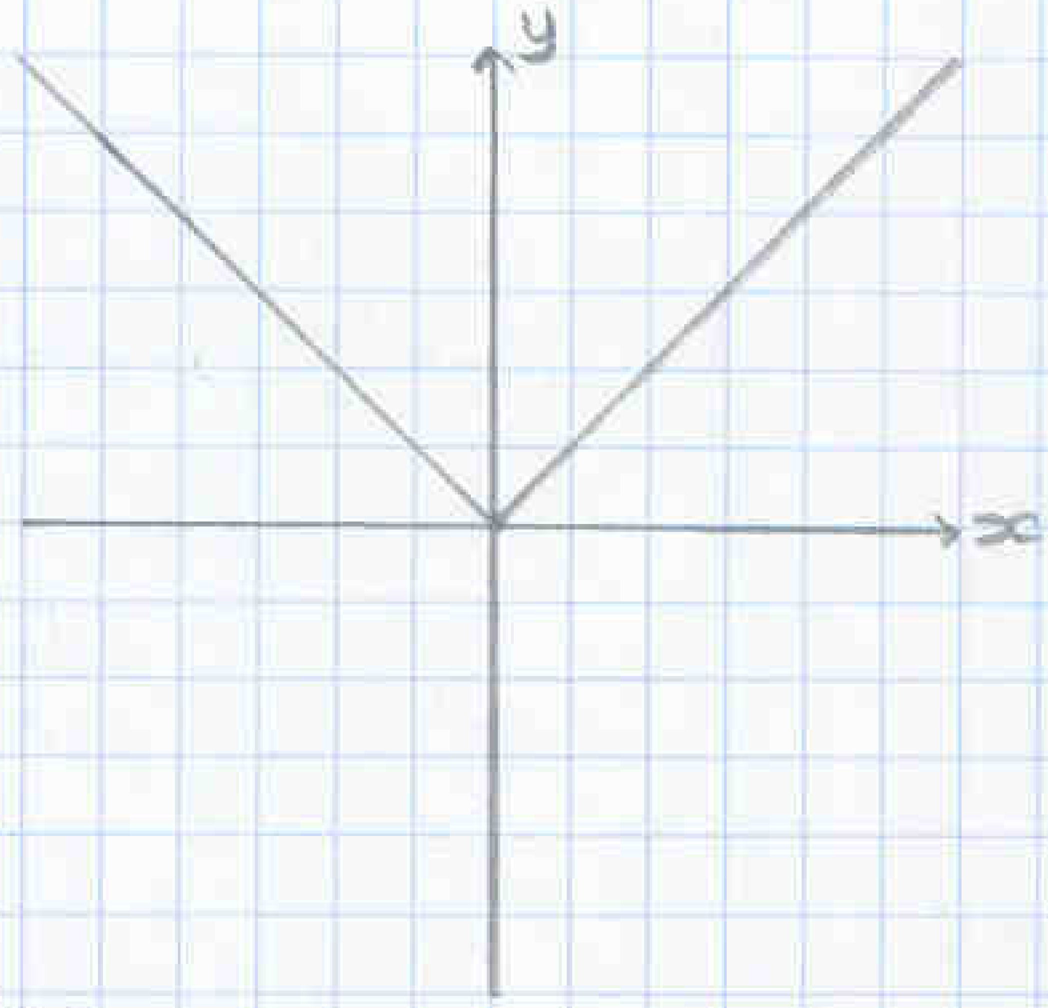
  $\exists K>0 : f(x)=f(x+K) \quad \forall x \in A$

  se llama periodo de f al menor de los K's

Módulo: Valor Absoluto

Def. $x \in \mathbb{R}$

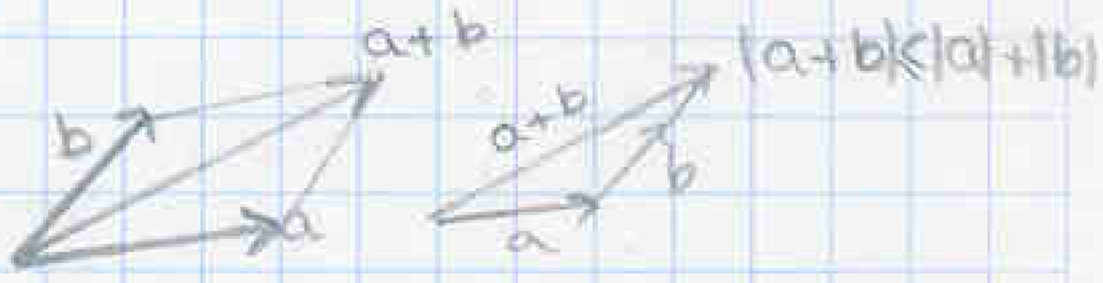
$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



- es acotada inferiormente por 0
- es estrictamente decreciente en $]-\infty, 0[$
- es estrictamente creciente en $]0, +\infty[$
- en $x = 0$ tiene un mínimo y vale 0
- es par
- es continua
- no es derivable en $x = 0$
- $\text{Im}(|x|) = [0, +\infty[$
- corte con los ejes en $(0, 0)$

Propiedades:

1) $|a| = 0 \longleftrightarrow a = 0$
2) $|a| = |-a|$
3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4) $|a| \leq \varepsilon \rightarrow -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon \quad \varepsilon > 0$
5) $-|a| \leq a \leq |a|$
6) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular)
7) $||a| - |b|| \leq |a - b|$
8) $|a - b| \leq |a| + |b|$



Ecuacione e Inecuaciones

$$|2x + 3| \leq 6$$

$$-6 \leq 2x + 3 \leq 6$$

$-6 \leq 2x + 3$	$2x + 3 \leq 6$
$-9 \leq 2x$	$2x \leq 3$
$-9/2 \leq x$	$x \leq 3/2$
$x \geq -\frac{9}{2}$	

$$-\frac{9}{2} \leq x \leq 3/2$$

$$\left[-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$|x - 1| < |x|$$

dividamos el problema en distintos casos

$\rightarrow x \leq 0 \quad -(x-1) < -x \rightarrow -x + 1 < -x \rightarrow 1 < 0$

$\rightarrow 0 < x \leq 1 \quad -(x-1) < x \rightarrow 1 < 2x \rightarrow x > 1/2 \quad]1/2, 1]$

$\rightarrow x \geq 1 \quad x - 1 < x \rightarrow -1 < 0 \rightarrow [1, +\infty[$

solución $\boxed{x > \frac{1}{2}}$

Funciones Elementales

Algebraicas $(+, -, \times, \div)$

Polinómica: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad a_i \in \mathbb{R}$

- $\text{Dom } p(x) = \mathbb{R}$
- $\text{Im } p(x) \begin{cases} \mathbb{R} & gr(p) \text{ es impar} \\ ? & gr(p) \text{ es par} \end{cases}$
- continuas
- diferenciables

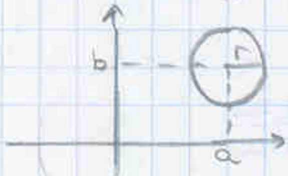
Racionales: $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

- $\text{Dom } R(x) = \mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\}$ menos

Irracionales: tienen raices

- si raiz es par $\sqrt[2n]{g(x)}$ $\quad \text{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{x : g(x) < 0\}$

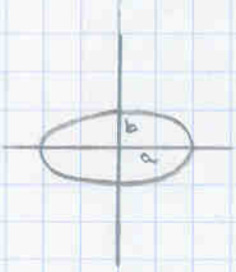
ej circunferencia:



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$y = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$

ej elipse



$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

> nota
> $\text{Dom } (f(x) + g(x)) = \text{Dom } f(x) \cap \text{Dom } g(x)$

Trascendentes

Exponencial $\quad y = a^x \quad \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \quad$ a es la base

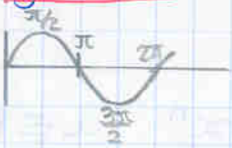
- $\text{Dom} = \mathbb{R}$
- continuas
- acotadas inferiormente por el 0 $\quad a^x > 0 \quad \mathbb{R} \to]0, +\infty[$
- pasan por $(0,1)$ y $(1,a)$

$a > 1$ | $a < 1$

- siempre Biyectiva
- $\exists f^{-1} \quad \log_a x :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

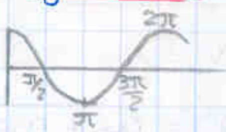
Trigonométricas

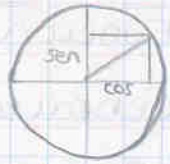
$y = \text{sen}\, x$



$\mathbb{R} \to [-1, 1]$ acotada
$T = 2\pi$
continua
diferenciable
no inyectiva

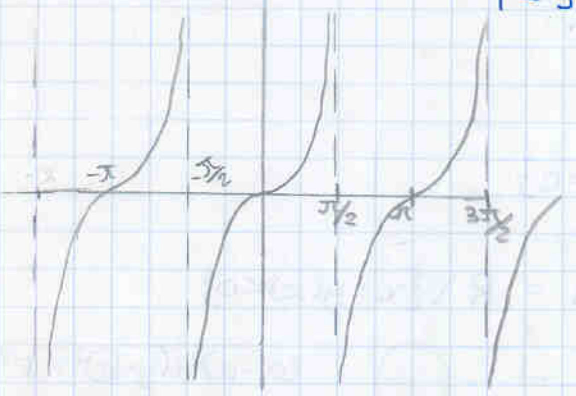
$y = \cos x$



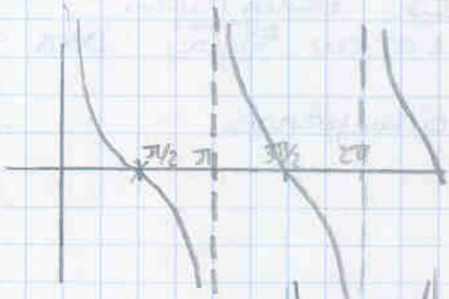


$y = \tan x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

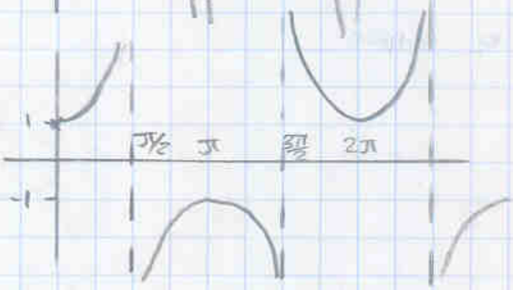
$\text{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$ múltiplos impares de $\pi/2$
$T = \pi$



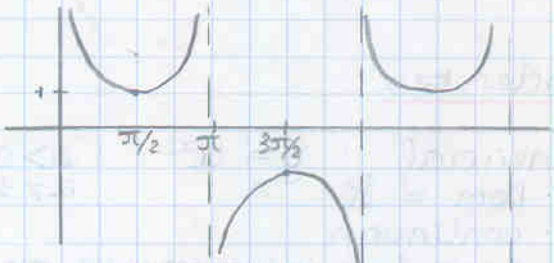
$y = \text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$



$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$



$y = \text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$



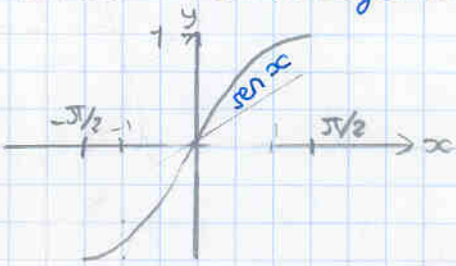
Fórmulas:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\, a \cos b \pm \cos a\, \text{sen}\, b$
$\cos\,(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$
$\text{sen}\, 2a = 2\, \text{sen}\, a \cos a$
$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
$\text{sen}\, \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$
$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$

$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$\cot^2 \theta + 1 = \text{cosec}^2 \theta$
$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

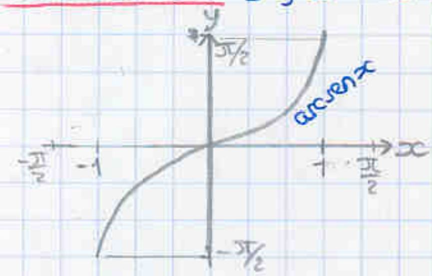
Inversas de las trigonométricas

$y = \operatorname{sen} x$ se escoge un trozo donde es inyectiva

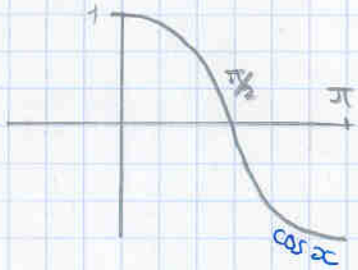


$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$

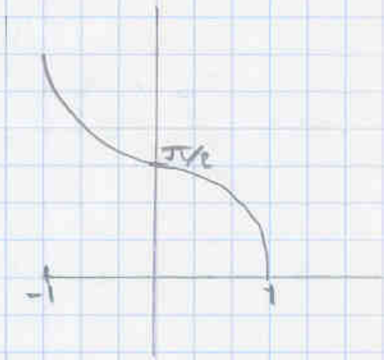
arc sen x $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



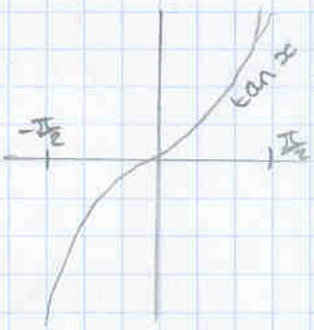
$y = \cos x$ se define en $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$



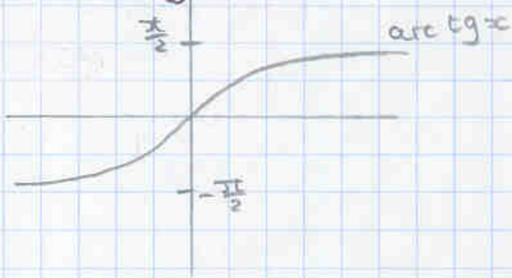
arc cos x



$y = \tan x$ se define en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow]-\infty, +\infty[$



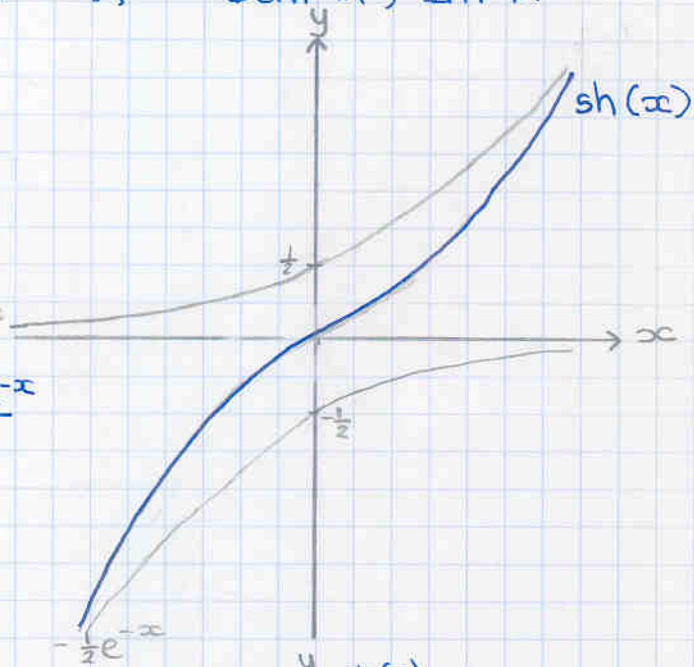
arc tg x



Funciones Hiperbólicas

- **Seno hiperbólico** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dom $\mathbb{R}$, Im $\mathbb{R}$

$$\boxed{sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$



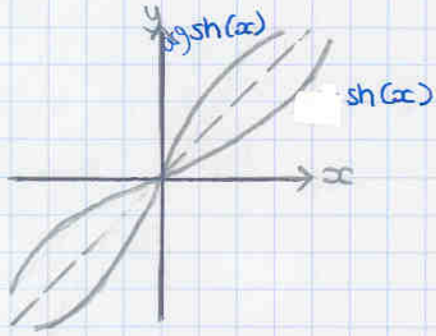
- Estrictamente creciente $\forall \mathbb{R}$
- Inyectiva, Sobreyectiva $\}$ Biyectiva
- Impar $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\frac{e^{(-x)} - e^{-(-x)}}{2}$
- Derivable en $\mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} sh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$= ch(x)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} sh(x) = ch(x)}$$

- Tiene inversa

arg sh(x) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$2y = e^x - e^{-x}$$
$$e^x - e^{-x} - 2y = 0$$
$$(\times \underset{>0}{e^x}) \quad e^x(e^x - e^{-x} - 2y) = 0$$
$$e^{2x} - 1 - 2ye^x = 0$$
$$(z = e^x) \quad z^2 - 2yz - 1 = 0$$
$$z = y \pm \sqrt{y^2+1}$$
$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$
$$x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

$\left(\begin{array}{l} \sqrt{y^2} = y \\ \sqrt{y^2+1} > y \\ y - \sqrt{y^2+1} < 0 \\ \text{como } e^x > 0 \\ \text{el signo menos} \\ \text{se ignora} \end{array}\right)$

$$\boxed{\arg sh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})}$$

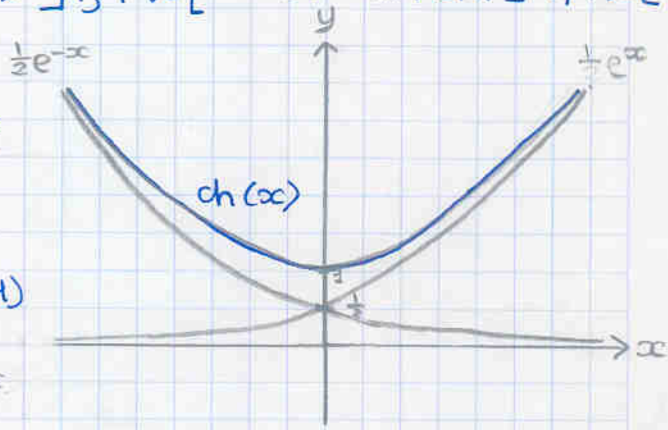
$$\frac{d}{dx}(\arg sh(x))$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right]$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{2}(2x)(x^2+1)^{-1/2}}{x + \sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{(\cancel{\sqrt{x^2+1}+x})\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\arg sh(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

• Coseno Hiperbólico

$f: \mathbb{R} \to]1, +\infty[$ Dom $\mathbb{R}$, Im $]-1, +\infty[$

$$\boxed{ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

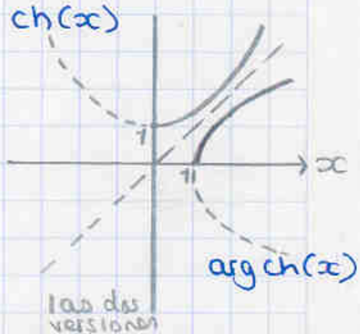


- Decreciente $]-\infty, 0[$ y Creciente $]0, +\infty[$
- No es inyectiva
- Par $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2}\right)$
- Derivable en $\mathbb{R}$. mínimo local en $(0,1)$

$$\frac{d}{dx}(ch(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(ch(x)) = sh(x)}$$

Para que haya inversa, tiene que ser inyectiva. Cogemos sólo el segmento $[0, +\infty[$



Inversa: arg ch(x) $f: [1, +\infty[\to [0, +\infty[$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$2y = e^x + e^{-x}$$
$$e^x + e^{-x} - 2y = 0$$
$$e^x(e^x + e^{-x} - 2y) = 0$$
$$e^{2x} + 1 - 2ye^x = 0$$
$$z^2 - 2yz + 1 = 0$$
$$z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$
$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$
$$x = \ln[y \pm \sqrt{y^2 - 1}]$$
$$y = \ln[x \pm \sqrt{x^2 - 1}]$$

$\left(\sqrt{y^2} = y,\ \sqrt{y^2 - 1} < y,\ y - \sqrt{y^2 - 1} > 0\right.$ no hay que ignorarlo$\left.\right)$

$$\boxed{\arg ch(x) = \ln[x \pm \sqrt{x^2 - 1}]}$$

$$\frac{d}{dx}(\arg ch(x)) = \frac{d}{dx}\left[\ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})\right] = \frac{1 \pm (\frac{1}{2})(2x)(x^2 - 1)^{-1/2}}{x \pm \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{(\sqrt{x^2 - 1} \pm x)}{(x \pm \sqrt{x^2 - 1})\sqrt{x^2 - 1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \arg ch(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (\ln[x \pm \sqrt{x^2 - 1}])}$$

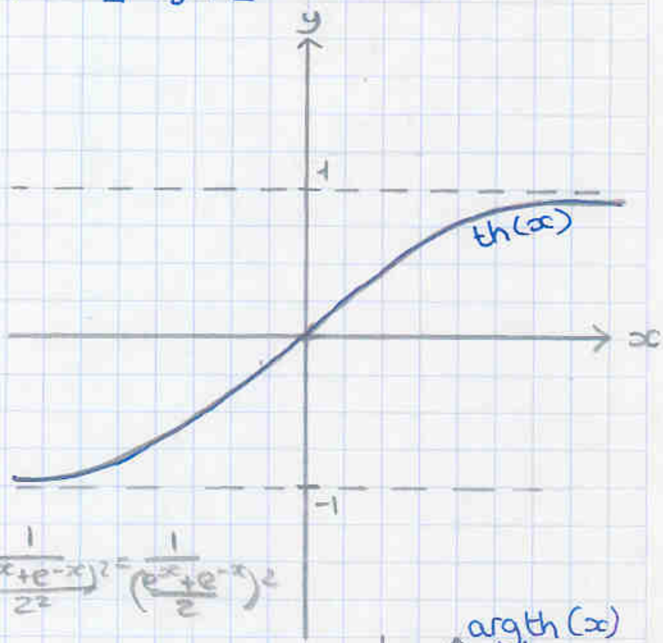
$$\underset{\text{rama } +}{\arg ch(x)} = -\underset{\text{rama } -}{\arg ch(x)}$$
$$\ln[x + \sqrt{x^2 - 1}] = -\ln[x - \sqrt{x^2 - 1}]$$
$$\ln[x + \sqrt{x^2 - 1}] = \ln[x - \sqrt{x^2 - 1}]^{-1}$$
$$[x + \sqrt{x^2 - 1}] = (x - \sqrt{x^2 - 1})^{-1}$$
$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$
$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})}$$
$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x^2 - (x^2 - 1)}$$
$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - x^2 + 1}$$
$$x + \sqrt{x^2 - 1} = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

las 2 funciones posibles para arg ch (x) son simétricas respecto eje x

Tangente hiperbólica

$f: \mathbb{R} \to]-1, 1[$

$$\boxed{th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}}$$
$$= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



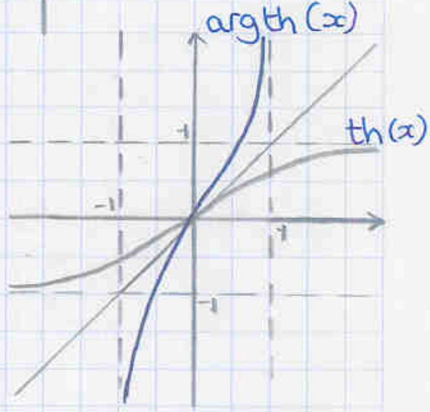
- estrictamentre creciente
- impar
- $\left.\begin{array}{l}\text{inyectiva}\\ \text{sobreyectiva}\end{array}\right\}$ biyectiva

$$\frac{d}{dx} th(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$$
$$= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$
$$= \frac{(e^{2x}+2+e^{-2x}) - (e^{2x}-2+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{\frac{(e^x+e^{-x})^2}{2^2}} = \frac{1}{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} th(x) = \frac{1}{ch^2(x)}}$$

tiene inversa:

$argth(x)$ $\quad f:]-1, 1[\to \mathbb{R}$



$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$y(e^x + e^{-x}) = e^x - e^{x}$$
$$ye^x + ye^{-x} = e^x - e^{-x}$$
$$e^x - e^{-x} - ye^x - ye^{-x} = 0$$
$$e^x(e^x - e^{-x} - ye^x - ye^{-x}) = 0$$
$$e^{2x} - 1 - ye^{2x} - y = 0$$
$$(z = e^x)$$
$$z^2 - 1 - yz^2 - y = 0$$
$$(1-y)z^2 - 1 - y = 0$$
$$z^2(1-y) = 1+y$$
$$z^2 = \frac{1+y}{1-y}$$
$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$
$$\ln e^{2x} = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$
$$2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$
$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$
$$argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\boxed{argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

$$\frac{d}{dx}(argth(x)) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} argth(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{(1-x)(1)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1-x)+(1+x)}{\frac{(1+x)(1-x)^2}{(1-x)}}\right] = \frac{1}{2}\frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x+x-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

- Ecuaciones que incluyen funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned}
ch^2 x - sh^2 x &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(e^x+e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4} \\
&= \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{4} \\
&= \frac{(e^{2x}+1+1+e^{-2x})-(e^{2x}-1-1+e^{-2x})}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{ch^2(x) - sh^2(x) = 1}$$

$$\begin{aligned}
sh(2x) &= \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x-e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{2} \\
&= 2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{sh(2x) = 2sh\,x \; ch\,x}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
&\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\\
&\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x \\
&\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x
\end{aligned}}$$

Concepto de límite

- Conjunto acotado

$A \subset \mathbb{R}$ esta acotado

↳ superiormente si $\exists K \in \mathbb{R}$: $x \leq K$ $\forall x \in A$

↳ inferiormente si $\exists K \in \mathbb{R}$: $x \geq K$ $\forall x \in A$

ej $0 < \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \leq 1$

ej $\{(-2)^n\}_{n=0}^{\infty}$ no acotado

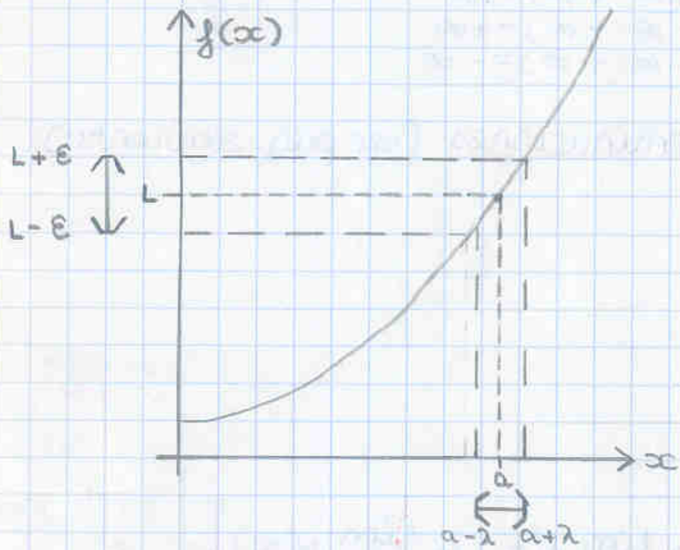
- Definición de límite

sea $f: A \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, $a \in A$

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

si: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \lambda > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon$ si $|x - a| < \lambda$

explicación



Cualquier entorno de L (de radio ε) tan pequeño como quieras;

tiene un entorno correspondiente de a (de radio λ)

de forma que a cualquier valor de x en el entorno $B_a(\lambda)$ le corresponde una imagen $f(x)$ en el entorno $B_L(\varepsilon)$

- Límites laterales

$L^+ = \lim_{x \to a^+} f(x)$ $x > a$

$L^- = \lim_{x \to a^-} f(x)$ $x < a$

- Relación entre L^-, L^+ y L

si $\exists L \longleftrightarrow L = L^+ = L^-$

$\nexists L \longleftarrow L^+ \neq L^-$

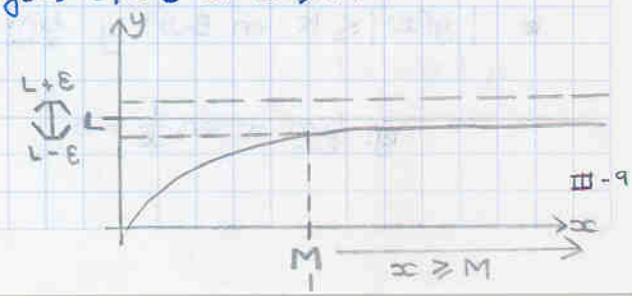
$\nexists L \longleftarrow \nexists L^+$ o $\nexists L^-$

- Límites infinitos

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si $\forall M > 0 \ \exists \lambda > 0 : f(x) \geq M$ si $|x - a| < \lambda$

- Límites en el infinito

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon$ si $x \geq M$



- Algebra de Límites

$$\underbrace{\text{si } \exists \lim_{x\to a} f(x) = L \quad y \quad \exists \lim_{x\to a} g(x) = M}$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = L\cdot M$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a} z^{f(x)} = z^{L}$

$\lim\limits_{x\to a} k f(x) = kL$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ $(M\neq 0)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \ln L$ $(L>0)$

$\lim\limits_{x\to a} x = a$

$\lim\limits_{x\to a} kx = ka$

$\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$

$\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$

sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios

$\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(a)}{q(a)}$ $[q(a)\neq 0]$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \begin{cases} \frac{a^n}{b^n} & gr(p) = gr(q) \\ 0 & gr(p) < gr(q) \\ \pm\infty & gr(p) > gr(q) \end{cases}$$

- Límites Infinitos

para simplificar mi explicación utilizo símbolos. $+\infty \longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

$-\infty \longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

$\lim(+\infty + \infty) = +\infty$ $\quad$ $\lim(+\infty\cdot +\infty) = +\infty$

$\lim(-\infty - \infty) = -\infty$ $\quad$ $\lim(-\infty\cdot -\infty) = +\infty$

$\lim(-\infty\cdot +\infty) = -\infty$

Hay casos conflictivos: Indeterminaciones (ver pág. siguiente)

$\infty - \infty$

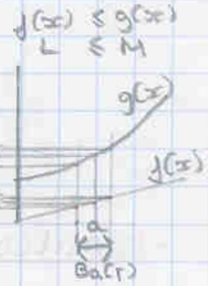
$\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty\cdot 0$, $\dfrac{0}{0}$

∞^0

1^∞

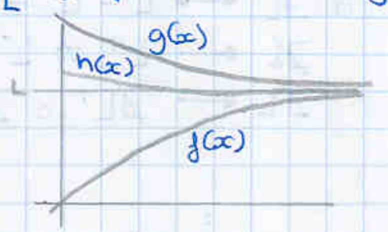
0^0

- Propiedades de límites

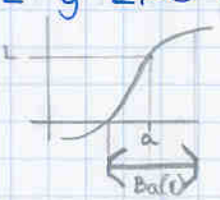


- si $f(x) \leq g(x)$ en $Ba(r) \longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ y $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \rightarrow \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$



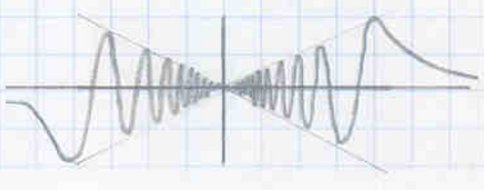
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $L\neq 0 \longrightarrow f$ tiene mismo signo que L en $Ba(r)$



- $|g(x)| \leq K$ en $Ba(r)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$

ej $|\operatorname{sen} x| \leq 1$

ej: $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$



Resolución de Indeterminaciones.

$\infty - \infty$: multiplicar y dividir por la expresión conjugada

* ej. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x}+x)(\sqrt{x^2+2x}-x)}{(\sqrt{x^2+2x}+x)}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$\frac{\infty}{\infty}$: buscar el mayor factor del nominador y del denominador, y dividir por el menor de ambos.

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} \underset{\text{dividir por } x}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1$

* ej. $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+3}{x^2-4x} \underset{\text{dividir por } x^2}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x}} = 4$

$\frac{0}{0}$ simplificar al máximo

* ej $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^3-4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{(\cancel{x-2})(x-3)}{x(\cancel{x-2})(x+2)} = \frac{x-3}{x(x+2)} = \frac{1}{8}$

1^∞

se utiliza que:

$$\lim_{f(x)\to\infty} \left(\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}\right)^n = e^n$$

y con ello se puede demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = (1^\infty) = e^h$$

donde h es:

$$h = \lim_{x\to+\infty} g(x)\left[f(x)-1\right]$$

* ej. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{6x-1}{6x+2}\right)^{2x+3} = (1^\infty) = e^h$

$h = \lim_{x\to+\infty} (2x+3)\left(\frac{6x-1}{6x+2}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} (2x+3)\left(\frac{\cancel{6x}-1-\cancel{6x}-2}{6x+2}\right)$

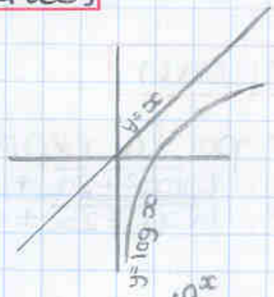
$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+3)(-3)}{6x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x-9}{6x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6-\frac{9}{x}}{6+\frac{2}{x}} = -1$

por lo que

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{6x-1}{6x+2}\right)^{2x+3} = e^{-1}$

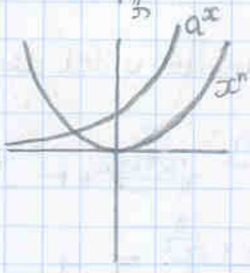
Límites importantes

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$



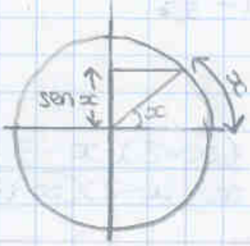
x crece mucho más que log x

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a>1)$$



a la larga (∞) a^x crece mucho más que x^n

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

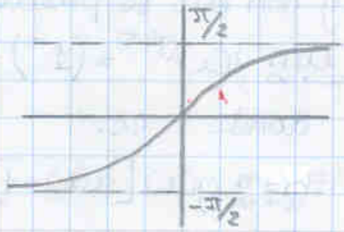


$\operatorname{sen} x < x$

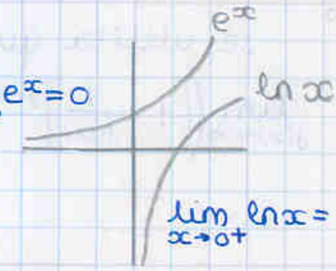
se deriva que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg}(x) = \pm \frac{\pi}{2}$$



$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$



$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Límites que no existen

$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x \quad \lim_{x \to \infty} \cos x \quad \lim_{x \to \infty} \tan x$ ... funciones periódicas

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ ... ...

Más ejemplos de límites

ej: utilizando fórmulas trigonométricas como $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ → $2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{4 \frac{x}{2} \frac{x}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ej: (OJO CON $\frac{1}{x}$ ¿$x \to 0^+$ o $x \to 0^-$?)

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+e^{1/x}}$ depende de si es 0^+ o 0^-

si $x \to 0^+$ $\quad \frac{1}{x} \to +\infty \quad e^{\frac{1}{x}} \to +\infty \quad 1+e^{\frac{1}{x}} \to +\infty \quad \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \to 0$

si $x \to 0^-$ $\quad \frac{1}{x} \to -\infty \quad e^{\frac{1}{x}} \to 0 \quad 1+e^{\frac{1}{x}} \to 1 \quad \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \to 1$

CONTINUIDAD

Def: sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
es continua en punto $a \in A$ $\quad (\exists B_a(r) \subset A)$

$\boxed{\text{si } \exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$

se representa
$\mathcal{C}(A) = \{f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continua en } A\}$

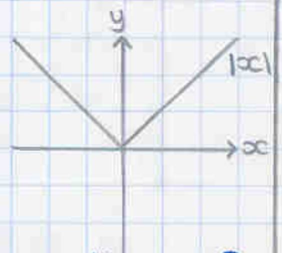
↳ f es discontinua en a si f no es continua en a
↳ f es continua en A si f continua $\forall a \in A$
↳ si $A = [a, b]$ $\quad (\nexists B_a(r) \subset A)$
f continua en $[a,b]$ si f continua en $]a,b[$
y si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Ejemplos:

$p(x)$ continua en $\mathbb{R}$
$p(x)/q(x)$ continua en su dominio

$\left.\begin{array}{l} e^x, \log^x \\ \text{sen}^x, \cos^x, \text{sh}^x, \text{ch}^x, \text{th}^x, \text{arctg}^x \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}$

$\text{tg}(x)$ en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



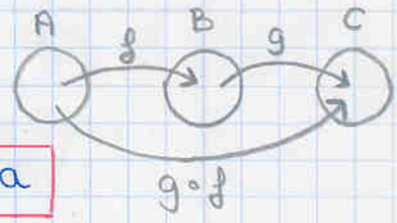
$|x|$ continua en $\mathbb{R}$

Álgebra de funciones continuas

sean f y g continuas en $a \in A$
↳ $f \pm g \quad f \cdot g \quad kf$ son continuas
↳ f/g continua en $a \longleftrightarrow g(a) \neq 0$

Regla de la cadena

sea $g \circ f \equiv$ combinación de f y $g \equiv g(f(x))$



$\boxed{g \text{ y } f \text{ continuas en } a \longleftrightarrow g \circ f \text{ continua en } a}$

↳ las discontinuidades de $a^{f(x)}$, $|f(x)|$, sen $f(x)$, ... son a lo sumo las de $f(x)$
↳ las discontinuidades de $\log_a f(x)$, $\sqrt{f(x)}$ son las de $f(x)$ y los puntos $f(x) \leq 0$

Discontinuidades

- **evitable** $\exists \lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

ej: $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x}$ en 2 es $\dfrac{0}{0} \Rightarrow \nexists \lim \rightarrow$ no continua

$= \dfrac{(x-3)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}(x)}$

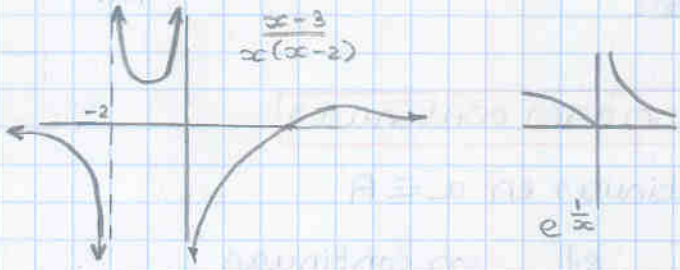
$= \dfrac{x-3}{x^2+2x}$ en 2 es $-\dfrac{1}{8} \Rightarrow$ continua

- **salto**

$$\nexists \lim_{x \to a} f(x) \begin{cases} \text{finito: } \exists L_+ = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \exists L_- = \lim_{x \to a^-} f(x) \quad L_+ \neq L_- \\ \text{infinito: } L_+ = \pm\infty \ \text{ y/o } \ L_- = \pm\infty \end{cases}$$

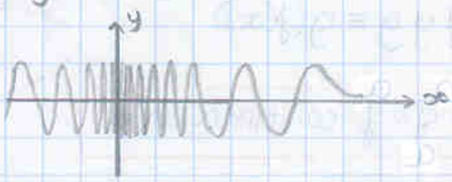
ej salto finito

ej salto infinito



- **esencial** $\nexists \lim f(x)$ por alguno o ambos lados

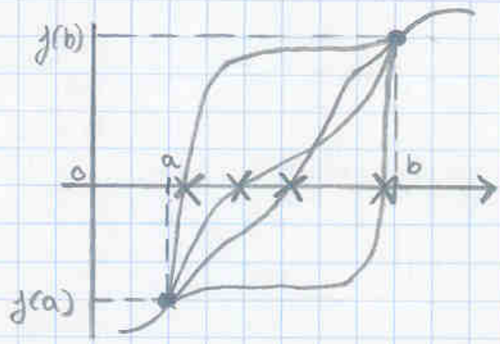
ej $y = \text{sen}\,\frac{1}{x}$



Teoremas sobre continuidad

- Teorema de Bolzano

$f \in \mathcal{C}[a,b], \quad f(a)\cdot f(b)<0 \rightarrow \exists\, x\in\,]a,b[\;:\; f(x)=0$



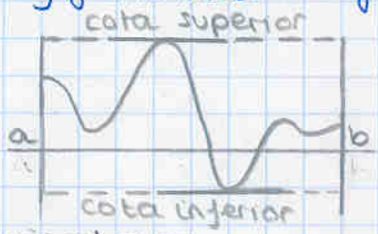
- Definición Máximo/Mínimo absoluto

f tiene máximo/mínimo absoluto en I si: $\exists x^* \in I : f(x) \leq / \geq f(x^*) \quad \forall x\in I$

- Teorema

$f\ [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y f continua $\longrightarrow f$ acotada

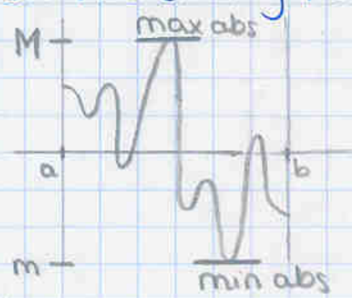
sólo intervalo cerrado



↳ Teorema de Weierstrass

$f: [a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ continua $\longrightarrow$ f alcanza máximo y mínimo abs,

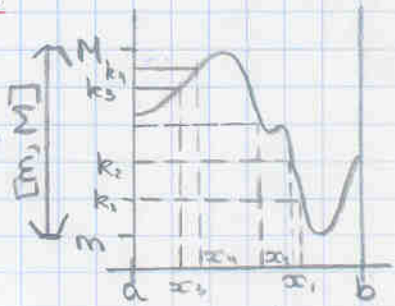
$m=f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)=M \quad \forall x\in[a,b]$



↳ Teorema de los valores intermedios

$f: [a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ continua

$\forall k\in[m,M] \quad \exists \quad x\in[a,b] \;:\; f(x)=k$



CÁLCULO DIFERENCIAL

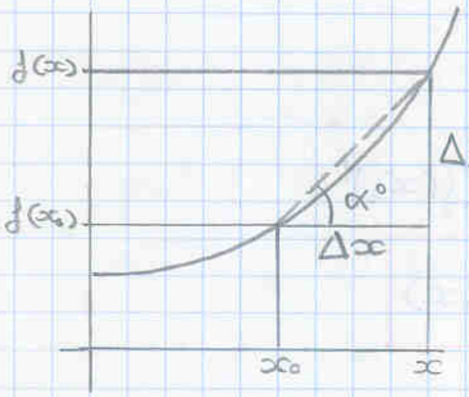
Definición: se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ es derivable en $x_0 \in]a,b[$ si:

intervalo abierto para q todos los puntos tengan entorno

$$\boxed{\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}}$$

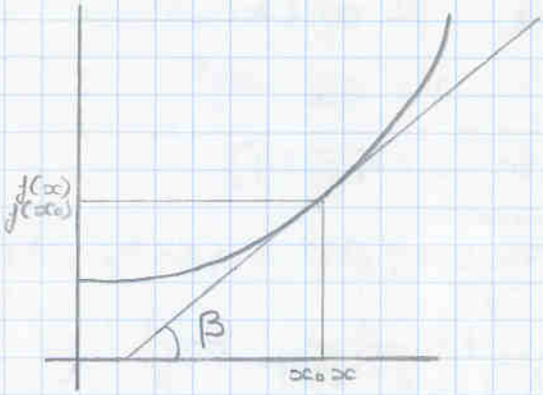
cociente incremental

Interpretación geométrica



el cociente incremental

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$



cuando $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta = f'(x_0)$$

Teorema:

f derivable en $x_0 \longrightarrow f$ continua en x_0

condición necesaria

$\boxed{f \text{ continua en } x_0 \not\to f \text{ derivable}}$

- Álgebra de derivadas

sean f, g derivables en $x \equiv \exists f'(x)$ y $\exists g'(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} (f \pm g)' &= f' \pm g' \\ (kf)' &= k f' \\ (f \cdot g)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}}$$

- Regla de la cadena

$\exists f'(x)$ y $\exists g'(f(x)) \longrightarrow \exists \, [g(f(x))]'$

$$\boxed{[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Ejemplos

ej $y = \operatorname{sen}(3x+1)$ $\quad y' = \cos(3x+1) \cdot 3$

ej $y = e^{x^2}$ $\quad y' = 2x \cdot e^{x^2}$

ej $y = \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

son 3 composiciones

$x \rightsquigarrow x^2+1 \rightsquigarrow x + \sqrt{x^2+1} \rightsquigarrow \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$$y' = \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{senh}(x))$ $\quad ch^2 - sh^2 = 1$

$$y' = ch(x) \cdot \frac{1}{1+sh^2 x} = \frac{ch(x)}{ch^2(x)} = \frac{1}{ch(x)}$$

Tabla de derivadas de las funciones elementales

$f(x)$		$Df(x)$	
k x^k	$(\sqrt{x})$	0 kx^{k-1}	$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
a^x $\log_a x$	(e^x) $(\ln x)$	$a^x \ln a$ $1/x \ln a$	(e^x) $(1/x)$
$\operatorname{sen} x$ $\cos x$ $\operatorname{tg} x$ $\operatorname{cotg} x$		$\cos x$ $-\operatorname{sen} x$ $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$	
$\operatorname{arctg} x$ $\operatorname{arcsen} x$ $\arccos x$		$\frac{1}{1+x^2}$ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\operatorname{sh} x$ $\operatorname{ch} x$ $\operatorname{th} x$		$\operatorname{ch} x$ $\operatorname{sh} x$ $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	
$\operatorname{arg\,sh} x$ $\operatorname{arg\,ch} x$ $\operatorname{arg\,th} x$		$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}$ $\frac{1}{1-x^2}$	

utilizando regla de la cadena

$f(u(x))$		$Df(u(x))$	
k u^k	$(\sqrt{u})$	0 $u' \, k u^{k-1}$	$\left(\frac{u'}{2\sqrt{u}}\right)$
a^u $\log_a u$	(e^u) $(\ln u)$	$u' a^u \ln a$ $u'/u \ln a$	$(u' e^u)$ (u'/u)
$\operatorname{sen} u$ $\cos u$ $\operatorname{tg} u$ $\operatorname{cotg} u$		$u' \cos u$ $-u' \operatorname{sen} u$ $\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \operatorname{tg}^2 u)$ $-\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = u'(-1 - \operatorname{cotg}^2 u)$	
$\operatorname{arctg} u$ $\operatorname{arcsen} u$ $\arccos u$		$\frac{u'}{1+u^2}$ $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
$\operatorname{sh} u$ $\operatorname{ch} u$ $\operatorname{th} u$		$u' \operatorname{ch} u$ $u' \operatorname{sh} u$ $\frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u} = u'(1 - \operatorname{th}^2 u)$	
$\operatorname{arg\,sh} u$ $\operatorname{arg\,ch} u$ $\operatorname{arg\,th} u$		$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$ $\frac{u'}{\sqrt{-1+u^2}}$ $\frac{u'}{1-u^2}$	

Dos 'trucos' para facilitar la derivación

- Derivada de la inversa

sea $f: A \to B$, derivable, biyectiva, f^{-1} continua, f^{-1} derivable, $f'(x) \neq 0\ \forall x \in A$

Para $y = f(x) \in B$, $\boxed{(f^{-1}(y))' = \dfrac{1}{f'(x)}}$

EJEMPLOS

ej: $x \underset{\text{argsh } x,\ f^{-1}}{\overset{\text{sh } x,\ f}{\rightleftarrows}} y$

$f(x)$: $y = \text{sh } x$ su inversa (sin hacer aun el cambio de x a y)

$f'(x)$: $y = \text{ch } x$ $f^{-1}(y)$: $x = \text{arg sh } y$

según este 'truco'

$D[f^{-1}(y)]$: $x' = \dfrac{1}{\text{ch } x}$ //

¡aun queda arreglarlo porque está x en función de x!

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$

$\text{ch } x = \sqrt{1 + \text{sh}^2 x}$

como $y = \text{sh } x$

$\text{ch } x = \sqrt{1+y^2}$

arreglándolo un poco queda

$D[f^{-1}(x)]$: $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ //

ej: $y = \cos x$ $x = \arccos y$

$y' = -\text{sen } x$ $x' = \dfrac{1}{-\text{sen } x}$

$$x' = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\text{sen } x = \sqrt{1-\cos^2 x}$
$= \sqrt{1-y^2}$

arreglándolo

$D(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- Derivada Logarítmica (cuando hay muchos productos) $(g \cdot f)' = g'f + f'g$ sería muy lento

sea $F(x) = f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)$

entonces: $\ln F(x) = \ln f_1(x) + \ln f_2(x) \ldots + \ln f_n(x)$

por lo tanto: $\boxed{\dfrac{F'(x)}{F(x)} = \left[\dfrac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \dfrac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right] F(x)}$

ej: $y = e^{1/x}(1+\text{sen } x)\,\text{th}^2 x$

$\ln y = 1/x + \ln(1+\text{sen } x) + 2 \ln \text{th } x$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{1+\text{sen } x} + 2 \cdot \frac{(1-\text{th}^2 x)}{\text{th } x}$$

$$y' = \left[e^{1/x}(1+\text{sen } x)\,\text{th}^2 x\right]\left[-\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{1+\text{sen } x} + 2\,\frac{(1-\text{th}^2 x)}{\text{th } x}\right]$$

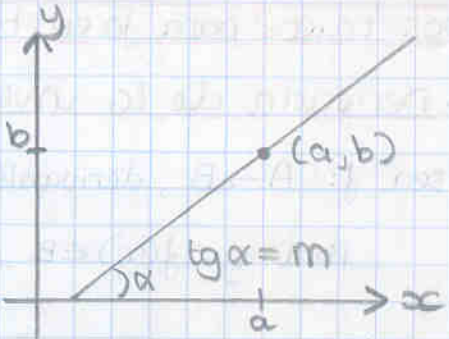
Recta tangente y diferencial de una función en un punto

Recta tangente

la ecuación de una recta que pasa por un punto (a,b) y tiene pendiente m es:

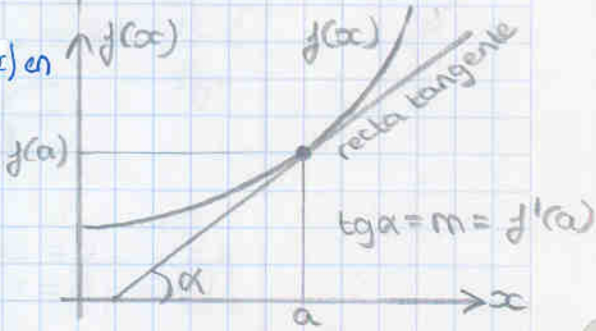
$$y-b=m(x-a)$$

$$\left(\begin{array}{l} y=mx-ma+b \\ y=mx+c \end{array}\right)$$

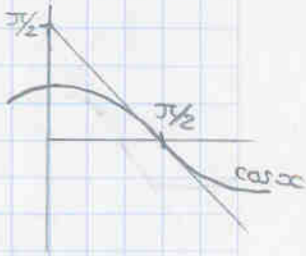


la ec. de la tangente a una función $f(x)$ en un punto 'a' es:

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

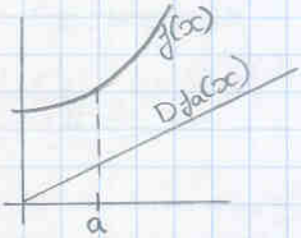


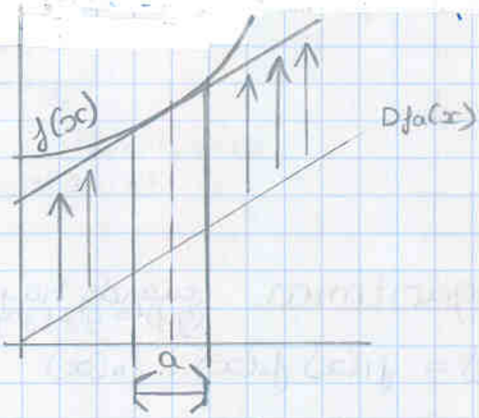
ej $f(x)=\cos x$ $\quad f(\pi/2)=0$
$f'(x)=-\operatorname{sen} x$ $\quad f'(\pi/2)=-1$
tangente de $\cos x$ en $\pi/2$ es:
$y-0=-1(x-\pi/2)$
$y=\pi/2-x$



Diferencial de una función en un punto a $Df_a(x)$

es una recta
- *pasa por el origen
- *es paralela a la tangente de la función en el punto a

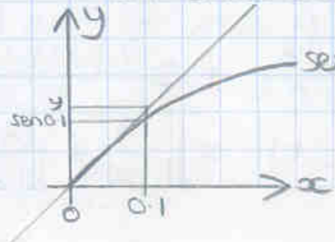




si se traslada a la curva, es una buena aproximación a la curva en un entorno de a

se utiliza para hacer aproximaciones

ej: sen 0.1
utilizemos diferencial en el punto 0.
0.1 será buena aproximación en entorno de 0.



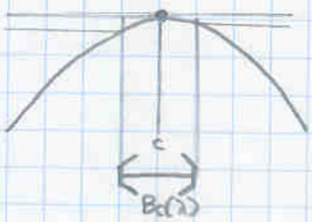
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$
$y-\operatorname{sen}(0)=\cos(0)(x-0)$
$y=x$
$\operatorname{sen} 0.1\approx 0.1$

Extremos relativos y puntos críticos

- Definición de extremo relativo

f tiene un máximo / mínimo extremo relativo en $c \in I$ si :

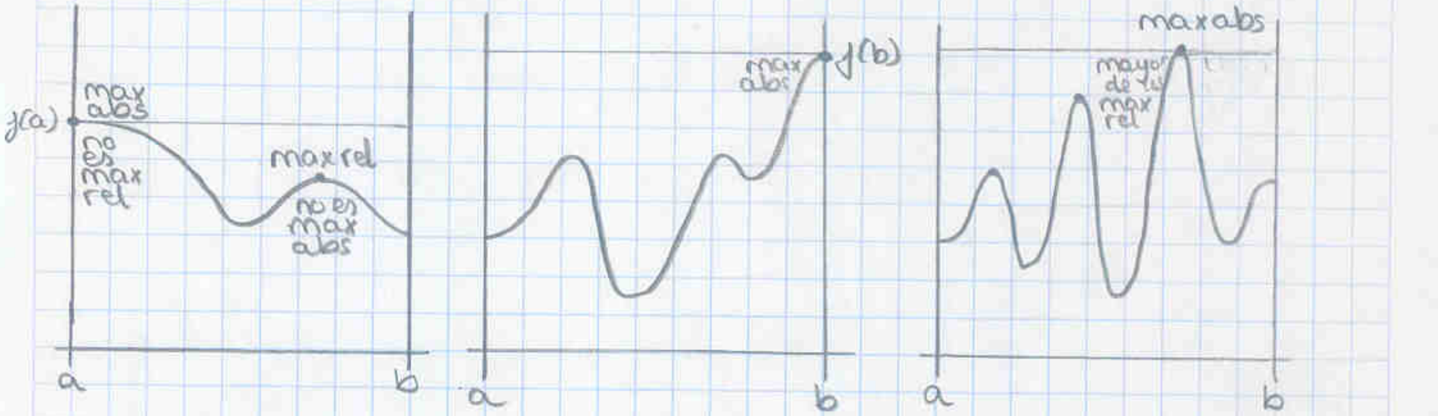
$$\exists B_c(\lambda) \subset I \; : \; f(x) \lessgtr f(c) \quad \forall x \in B_c(\lambda)$$



- Extremos absolutos vs. extremos relativos

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. y dif. en $]a,b[$

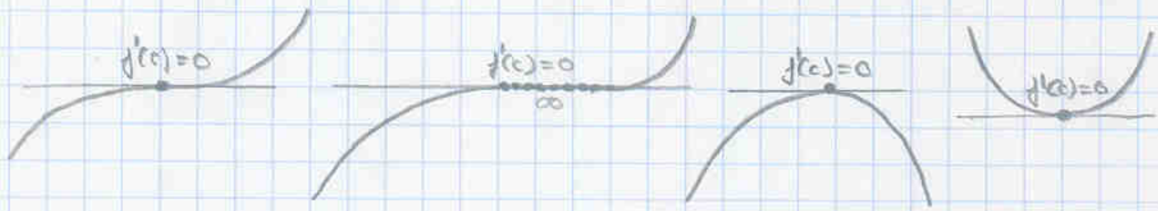
máx abs de f = mayor ($f(a)$, $f(b)$, mayor de los máximos relativos)
mín " " " = menor (" , " , menor " " mínimos ")



- Definición: Punto crítico

sea $f \in D(]a,b[)$

$c \in]a,b[$ es pto. crítico si $\boxed{f'(c)=0}$



- Teoremas sobre derivadas

- Teorema de Fermat (condición necesaria de extremo)

sea f $\mathcal{D}(]a,b[)$ sea $c \in]a,b[$

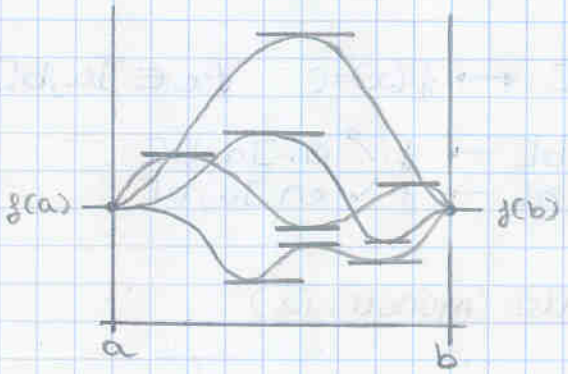
c es extremo $\longrightarrow f'(c)=0$

$\exists$ puntos críticos no extremos
ej $f(x)=x^3$ en $x=0$

- Teorema de Rolle

sea $f \in \mathcal{D}(]a,b[)$ y $\mathcal{C}([a,b])$ sea $c \in]a,b[$ sea $f(a)=f(b)$

$\exists c : f'(c)=0$



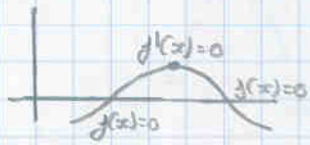
si no se cumplen las condiciones

si $f \notin \mathcal{C}[a,b]$

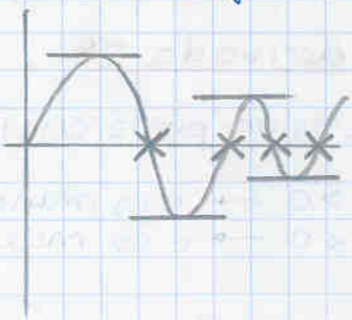
si $f \notin \mathcal{D}]a,b[$

↳ corolarios

- entre dos soluciones de $f(x)=0$ existe una de $f'(x)=0$



- entre dos soluciones consecutivas de $f'(x)=0$ hay a lo sumo una de $f(x)=0$

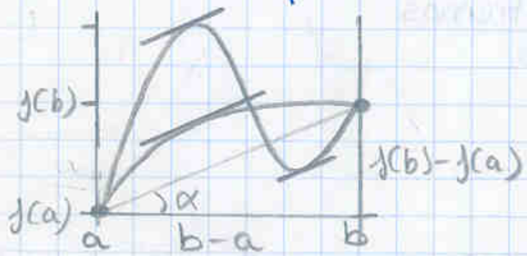


- Teorema del valor medio

sea $f \in \mathcal{C}([a,b])$ $f \in \mathcal{D}(]a,b[)$ y sea $c \in]a,b[$

$$\boxed{\exists c \; : \; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

es decir, que la variación media se alcanza al menos en un punto



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tg\,\alpha = f'(c)$$

se verá mas adelante que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

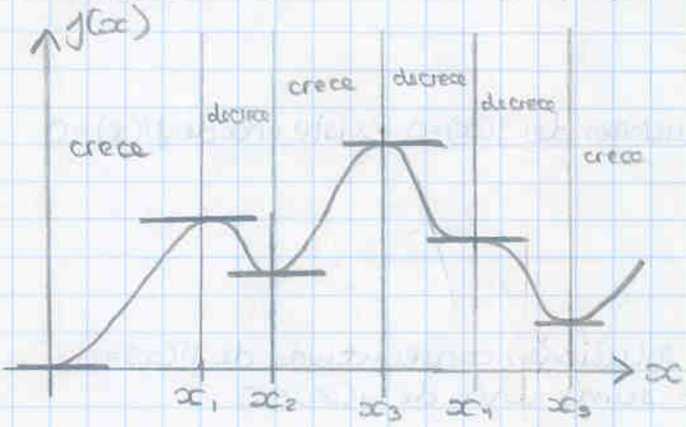
↳ Corolarios

- $f = cte.$ en $]a,b[\longleftrightarrow f'(x)=0 \quad \forall x \in]a,b[$
- $f'(x) \geq 0$ en $]a,b[\longrightarrow f \nearrow$ en $]a,b[$
  $f'(x) \leq 0$ en $]a,b[\longrightarrow f \searrow$ en $]a,b[$

- Crecimiento y decrecimiento (monotonía)

sea $f \in \mathcal{D}(]a,b[)$
sea $f'(x)=0$ en $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n$

f es monótona (o crece o decrece) en $[a,x_1], [x_1,x_2] \ldots [x_n, b]$



- Criterio de la derivada 2ª

$f'(c)=0 \longrightarrow c$ es un punto crítico

a) $f''(c) > 0 \longrightarrow c$ es mínimo relativo
b) $f''(c) < 0 \longrightarrow c$ es máximo relativo

- Regla de L'Hopital

sean f, g
condiciones: c puede ser ∞

1) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ ó $\lim_{x \to c} = \infty$ que sea indeterminado

2) $\exists f'(x)$ y $\exists g'(x)$ en $B_c(\lambda)$ (salvo quizá en c) que existan derivadas

3) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in B_c(\delta)$ $x \neq c$ q. se puedan hacer cocientes

entonces:

$\rightarrow \boxed{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$ si éste existe

ejemplo:

ej: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1$

ej: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

no se anula salvo en 0

$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{2 \cancel{\operatorname{sen} x} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\cos x \cancel{\operatorname{sen} x}} = 2$

ej: $\lim_{x \to \infty} (1 + x)^{1/x}$

$\lim_{x \to \infty} \ln(1 + x)^{1/x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1 + x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0$

$\rightarrow \lim_{x \to \infty} = e^0 = 1$

ej $\lim_{x \to \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ no sirve L'Hôpital

vamos a calcularlo de otra manera sin L'Hopital

$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1$

ej $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

ej: Hallar la derivada en $x = 0$ de $y = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

→ es continua?:

¿ $\exists \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$? SI ✓

→ la derivada:

$y'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

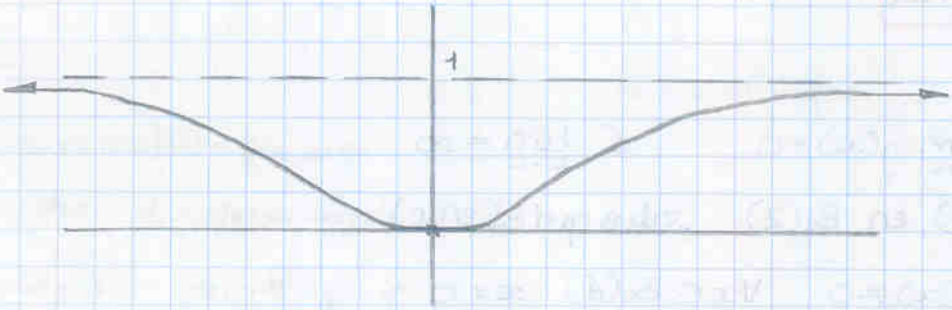
$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right)}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ mas complicado que el anterior

como hacerlo?

$= \lim_{x \to 0} = \frac{1/x}{e^{1/x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-1/x^2}{e^{1/x^2}(-2/x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0$

dibujada detras

$$y=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad y'=\begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$



- $]-\infty,0[$ $y'<0$ ↘
- $]0,+\infty[$ $y'>0$ ↗
- en $x=0$, mín. rel y abs. que vale 0
- no tiene máximos
- par

Otro ejemplo de L'Hôpital

Hallar a: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=4$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=(1^\infty)=e^h$$

cómodo: $h=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x\,\frac{x+a-x+a}{x-a}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}=2a$

$$e^{2a}=4$$
$$2a=\ln 4=2\ln 2$$
$$a=\ln 2$$

tb se puede:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\frac{x+a}{x-a}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{x+a}{x-a}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+a)-\ln(x-a)}{1/x}}\underset{L'H}{=}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/(x+a)-1/(x-a)}{-1/x^2}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-a-x-a}{x^2-a^2}(-x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax^2}{x^2-a^2}}=e^{2a}$$

- Polinomios de Taylor

Permiten aproximar localmente funciones "suaves"

$f \in \mathcal{C}^n(]-a, a[)$

$\mathcal{C} \equiv$ continua
$\mathcal{C}^1 \equiv$ derivada 1ª cont.
$\mathcal{C}^n =$ derivada $n^{\text{ésima}}$ cont.

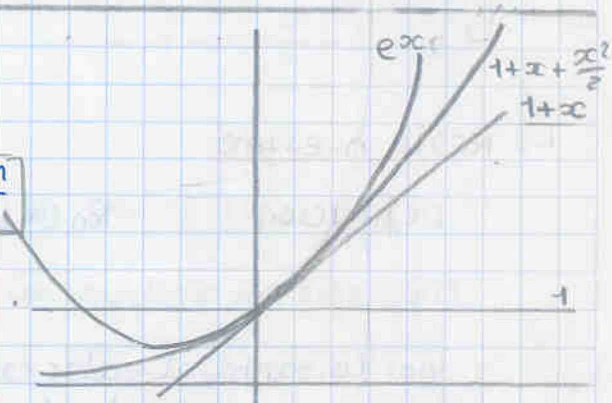
El polinomio de Taylor de grado n de f en el origen se define.

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots + \frac{f^n(0)x^n}{n!}}$$

Ej $f(x) = e^x$ $\quad f(0) = 1$
$f'(x) = e^x$ $\quad f'(0) = 1$
$f^n(x) = e^x$ $\quad \boxed{f^n(0) = 1}$

$$\boxed{P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}$$

$f(x) \approx P_n(x)$
$e^x \approx 1$
$e^x \approx 1 + x$
$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$



Ej: $f(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\frac{\pi}{2})$
$f'''(x) = -\cos x = \operatorname{sen}(x + 3\frac{\pi}{2})$
$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 4\pi/2)$
$f^{V}(x) = \operatorname{sen}(x + 5\frac{\pi}{2})$
$f^{VI}(x) = \operatorname{sen}(x + 6\pi/2)$
$f^{VII}(x) = \operatorname{sen}(x + 7\pi/2)$
$f^{VIII}(x) = \operatorname{sen}(x + 8\pi/2)$

$f^n(x) = \operatorname{sen}(x + n\pi/2)$

	orden deriv: $2n-1$	n
$f(0) = 0$		
$f'(0) = 1$	$2\cdot 1 - 1$	1
$f''(0) = 0$		
$f'''(0) = -1$	$2\cdot 2 - 1$	2
$f^{IV}(0) = 0$		
$f^{V}(0) = 1$	$2\cdot 3 - 1$	3
$f^{VI}(0) = 0$		
$f^{VII}(0) = -1$	$2\cdot 4 - 1$	4
$f^{VIII}(0) = 0$		

si n es par $f^{2n-1}(0) = -1$
si es impar $f^{2n-1}(0) = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{2n}(0) = 0 \\ f^{2n-1}(0) = (-1)^{n-1} \end{array}}$$

$$\boxed{P_{2n-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}$$

Ej $f(x) = \cos x$

$f'(x) = \cos(x + \pi/2)$
$f''(x) = \cos(x + 2\pi/2)$
$f'''(x) = \cos(x + 3\pi/2)$
$f^{IV}(x) = \cos(x + 4\pi/2)$
$f^{V}(x) = \cos(x + 5\pi/2)$
$f^{VI}(x) = \cos(x + 6\pi/2)$

	orden deriv $2n$
$f(0) = 1$	
$f'(0) = 0$	
$f''(0) = -1$	$2\cdot 1$
$f'''(0) = 0$	
$f^{IV}(0) = 1$	$2\cdot 2$
$f^{V}(0) = 0$	
$f^{VI}(0) = -1$	$2\cdot 3$

si n es par $f^{2n}(0) = 1$
si n es impar $f^{2n}(0) = -1$

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{2n-1}(0) = 0 \\ f^{2n}(0) = (-1)^n \end{array}}$$

$$\boxed{P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}}$$

Ej $f(x) = \ln(1+x)$ $f(0) = 0$

↑ para aprox en f

$f'(x) = 1/1+x$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = -1/(1+x)^2$ $f''(0) = -1$

$f'''(x) = 2/(1+x)^3$ $f'''(0) = 2!$

$f^{IV}(x) = -2\cdot3/(1+x)^4$ $f^{IV}(0) = -3!$

$f^{V}(x) = 2\cdot3\cdot4/(1+x)^5$ $f^{V}(0) = 4!$

$f^{VI}(x) = -2\cdot3\cdot4\cdot5/(1+x)^6$ $f^{VI}(0) = -5!$

$$\boxed{f^n(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}$$

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{\cancel{2}x^3}{\cancel{3!}} - \frac{\cancel{2\cdot3}x^4}{\cancel{4!}} + \dots$$

$$\boxed{P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}}$$

↳ Resto n-ésimo

Definición $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

(bajo ciertas condiciones) → $\boxed{\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0}$

por lo tanto, el valor exacto de $\ln 2$ viene dado por la suma ∞

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

↳ Error aproximado

el error aproximado cometido al utilizar $P_n(x)$ viene dado por el elemento siguiente $(P_{n+1}(x) - P_n(x))$

↳ si es nulo, el siguiente

Ej. utilizar Taylor para aproximar sin 0.1

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$P_1(0.1) = x = 0.1$ Error: $\frac{x^3}{3!} = \frac{0.1^3}{6} = 1.\hat{6}\times10^{-4}$

→ $\operatorname{sen} 0.1 \approx 0.1 \pm 1.\hat{6}\times10^{-4}$

$P_2(0.1) = x - x^3/3! = 0.0998\hat{3}$ Error: $\frac{x^5}{5!} = 8.3\hat{3}\times10^{-8}$

→ $\operatorname{sen} 0.1 \approx 0.0998\hat{3} \pm 8.3\hat{3}\times10^{-8}$

$P_3(0.1) = x - x^3/3! + x^5/5! = 0.099833416$ Error $= x^7/7! = 1.984\times10^{-11}$

→ $\operatorname{sen} 0.1 \approx 0.099833416 \pm 1.984\times10^{-11}$

↳ Otra propiedad

$P_n(x) = f(x) \longrightarrow P_n(g(x)) = f(g(x))$

ej e^x

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

e^{3x+2}

$$P_n(x) = 1 + (3x+2) + \frac{(3x+2)^2}{2} + \frac{(3x+2)^3}{3!} + \frac{(3x+2)^4}{4!} + \dots + \frac{(3x+2)^n}{n!}$$

- Más ejemplos del polinomio de Taylor

ej. $f(x) = sh(x)$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = ch(x)$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = sh(x)$ $\quad f''(0) = 0$

$f^{2n-1}(x) = ch(x)$ $\quad f^{2n-1}(0) = 1$

$f^{2n}(x) = sh(x)$ $\quad f^{2n}(0) = 0$

$$\boxed{P_{2n+1}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

sumándolos queda:

$P_n(x) = 1 + x^2/2 + x^3/3! + x^4/4! + \ldots + x^n/n!$

= Polinomio de e^x

ej $f(x) = ch(x)$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = sh(x)$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = ch(x)$ $\quad f''(0) = 1$

$f^{2n-1}(x) = sh(x)$ $\quad f^{2n-1}(0) = 0$

$f^{2n}(x) = ch(x)$ $\quad f^{2n}(0) = 1$

$$\boxed{P_{2n}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!}}$$

	$f(x)$	$P_n(x)$
+	$sh(x)$	$x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
	$ch(x)$	$1 + x^2/2 + x^4/4! + x^6/6! + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!}$
=	e^x	$1 + x + x^2/2 + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + x^6/6! + x^7/7! + x^n/n!$

como era de esperar, ya que

$$sh(x) + ch(x) = e^x$$

pequeño inciso

Progresión geométrica

ej $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots$

$r = 1/2$

$$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$$

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-r}}$$ ej $1/\tfrac{1}{2} = 2$

$$\binom{m}{n} = \frac{\overset{\text{tiene que ser entero}}{m!}}{n!(m-n)!}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))\cancel{(m-n)}!}{n!\ \cancel{(m-n)}!}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{\overset{\text{puede no ser entero}}{m}(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}$$

Taylor en $(1+x)^{\alpha}$

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = (\alpha)(1+x)^{\alpha-1}$ $\qquad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ $\qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$ $\qquad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$f^{n}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ $\qquad f^{n}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$

$$P_n(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$P_n(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n$$

- se puede utilizar para aproximar $\sqrt{2}$

$f(x) = \sqrt{x+1}$

$f(x) = (1+x)^{1/2}$

$$P_n(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{(1/2)(-1/2)\dots(1/2-n+1)}{n!}x^n$$

$$P_3(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!} = 1.4375$$

$$\text{Error} = \left|\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{4!}\right| = 0.0390625$$

$$\sqrt{2} = 1.4375 \pm 0.0390625$$

usando $f(x)\ \sqrt{x+1}$ se necesita un polinomio de grado muy alto para hacer la aproximación, ya que x tiene que moverse 1 desde 0.

sabiendo que $\sqrt{2} = 1.4\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2}$ se puede utilizar $f(x) = 1.4(1-x)^{1/2}$ desplazando x sólamente $1/50$. Hay mas formas de moverse menos aún.

- utilicemos $f(x) = 1.4(1-x)^{1/2}$

$$P_3(1/50) = 1.4\left[1 + (1/2)(1/50) + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}(1/50)^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!}(1/50)^3\right]$$

$$= 1.4139307$$

$$1.4 \times \left|\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{4!}(1/50)^4\right| = 8.75\times10^{-9}$$

el error es mucho menor que antes

Polinomio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

TEMA 4: NÚMEROS COMPLEJOS

- Números Complejos

$x^2+1=0$

$i: \sqrt{-r^2} = \pm ri$

imaginarios

$$\boxed{\mathbb{C} = \{z = (a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}}$$

$z + z' = (a+a', b+b')$
- → asociativa $z+u+v = (z+u)+v = z+(u+v)$
- ↳ conmutativa $z+u = u+z$
- ↳ elemento nulo $(a,b)+(0,0) = (a,b)$
- ↳ elemento opuesto $(a,b)+(-a,-b) = (0,0)$

$z \cdot z' = (aa'-bb', ab'+a'b)$
- ↳ asociativa $(z\cdot u)\cdot v = z\cdot(u\cdot v)$
- ↳ conmutativa
- ↳ elemento unidad $(a,b)\cdot(1,0) = (a,b)$
- ↳ elemento inverso $z \cdot z^{-1} = (1,0)$
- ↳ distributiva de la multiplicación respecto de la suma $z\cdot(u+v) = zu+zv$

→ Propiedades

todas las de los conjuntos numericos anteriores mas otras propias:

↳ $(a,0)+(a',0) = (a+a',0)$
$(a,0)\cdot(a',0) = (aa',0)$ → $(a,0) := a \in \mathbb{R}$

↳ $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$ → $(0,1)^2 = -1$
$(0,1) = i$

↳ $(a,b) = (a,0)+(0,b)$
$= (a,0)+(b,0)\cdot(0,1)$ → $(a,b) = a+bi$

→ $a+bi$: la forma binómica

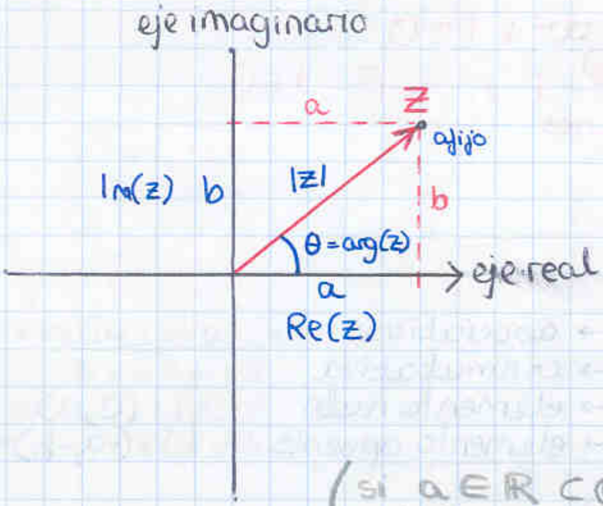
Simplifica las operaciones : sabiendo que $\boxed{i^2 = -1}$

↳ $(2+3i)+(-1+2i) = 1+5i$

↳ $(2+3i)\cdot(-1+2i)$
$= -2+4i-3i+6i^2$
$= -2+i+6i^2$
$= -2+i+6(-1)$
$= -8+i$

$$i^n \begin{cases} 1 & n = \dot{4} \\ i & n = \dot{4}+1 \\ -1 & n = \dot{4}+2 \\ -i & n = \dot{4}+3 \end{cases}$$

- **Representación de complejos: plano de Argand**



$z = a + bi$

$Re(z) = a \in \mathbb{R}$

$Im(z) = b \in \mathbb{R}$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$arg(z) = \theta$

$\frac{b}{a} = tg\,\theta$

$arg(z) = \theta = atan2\left(\frac{b}{a}\right)$

atan2 es similar a arctg, pero tiene en cuenta cuadrantes

$arctg(-1) = \frac{\pi}{4}$

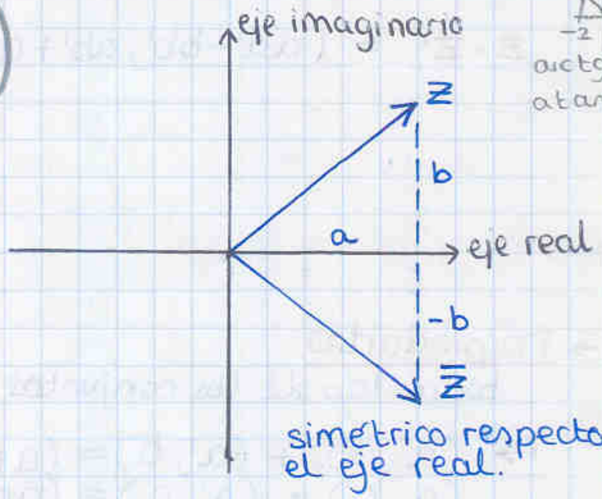
$atan2(-1) = \frac{3\pi}{4}$

- **Conjugado**

$\left(\begin{array}{l} \text{si } a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \\ |a| = a \\ \bar{a} = a \end{array}\right)$

sea $z = a + bi$

su conjugado es: $\boxed{\bar{z} = a - bi}$



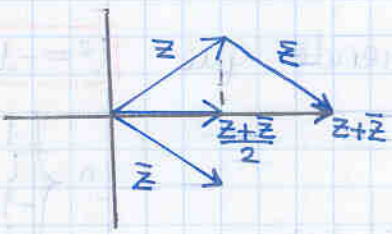
simétrico respecto el eje real.

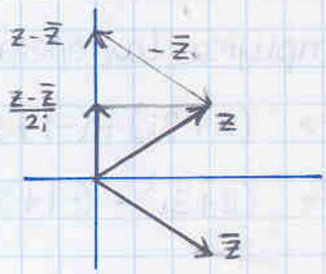
- **Propiedades con los conjugados**

→ $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ej $(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

útil para agilizar cálculos: $\boxed{(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2}$

→ $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ → $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$





→ $\overline{z \pm u} = \bar{z} \pm \bar{u}$

$\overline{z \cdot u} = \bar{z} \cdot \bar{u}$

$\overline{z/u} = \bar{z}/\bar{u}$

- Ecuaciones e inecuaciones con números complejos

* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

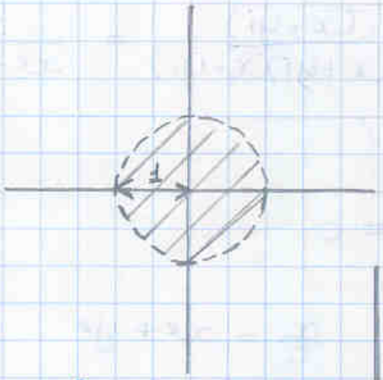
sea $z = x + yi$

$|z| < 1$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sqrt{x^2+y^2} < 1$

$x^2 + y^2 < 1^2$



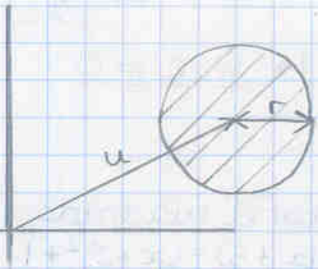
* $\{z \in \mathbb{C} : |z - u| \leq r,\ r \in \mathbb{R}\}$

$u \in \mathbb{C}$

ej $z - 2 + 5i$

$= z - (2 - 5i)$

$z - u$

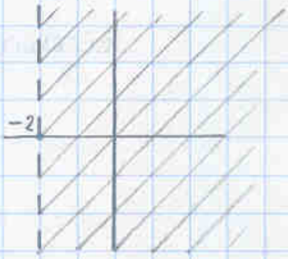


* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > -2\}$

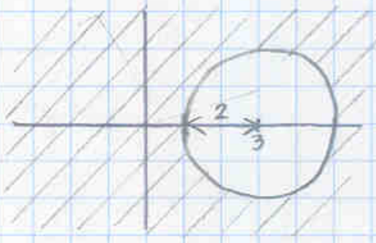
sea $z = x + yi$

$\operatorname{Re}(z) = x > -2$

$x > -2$



* $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \geq 2\}$

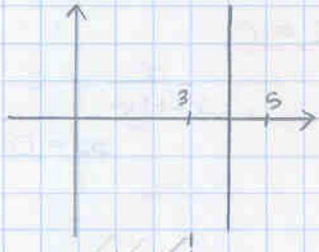


* $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = |z - 5|\}$

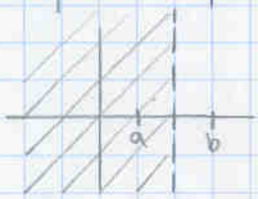
$|z|$ es la distancia desde $(0,0)$

$|z-3|$ es la distancia desde $(3,0)$

$|z-5|$ es la distancia desde $(5,0)$



* $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < |z - b| \quad a, b \in \mathbb{R}\}$



* $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z+3) < \pi/3$

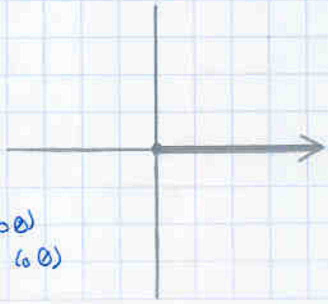
* $x + yi = |x + yi|$

como $|x + yi|$ es real

$x + yi$ tiene que ser real

como $|x+yi|$ es positivo (o 0)

$x + yi$ tiene que ser positivo (o 0)



$* \quad \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(1/z) = c \in \mathbb{R}\}$

sea $z = x + yi$

no mas empezar ($z \neq 0$) $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+yi} = \dfrac{(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2} i$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\boxed{\frac{x}{x^2+y^2} = c}$$

↳ si $c \neq 0$

$$\frac{x}{c} = x^2 + y^2$$

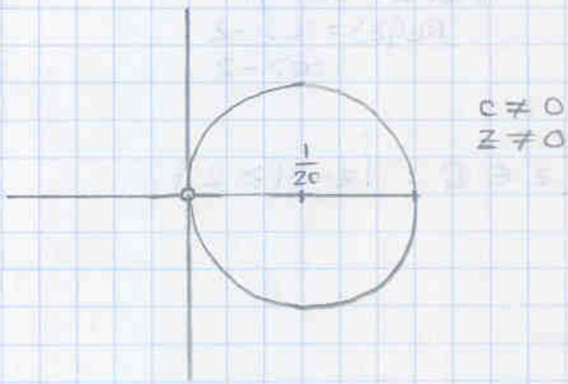
$$x^2 - \frac{x}{c} + y^2 = 0$$

completar el cuadrado
$(x^2+4x+5) = (x+2)^2+1$
$(x^2-6x+6) = (x-3)^2-3$
a = coger la mitad del coeficiente de x^1 para hacer $(x+a)^2$, luego restar a^2 y sumarle térm. indep.
si el coeficiente de x^2 no es 1
• ej $2x^2+8x+7$
$= 2(x^2+4x)+7$
$= 2[(x+2)^2-4]+7$
$= 2(x+2)^2-8+7$
$= 2(x+2)^2-1$
• ej $-3x^2-6x+4$
$= -3[x^2+2x]+4$
$= -3[(x+1)^2-1]+4$
$= -3(x+1)^2+3+4$
$= 7-3(x+1)^2$

$$\rightarrow \left[\left(x-\frac{1}{2c}\right)^2 - \left(\frac{1}{2c}\right)^2\right] + y^2 = 0$$

$$\left(x-\frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

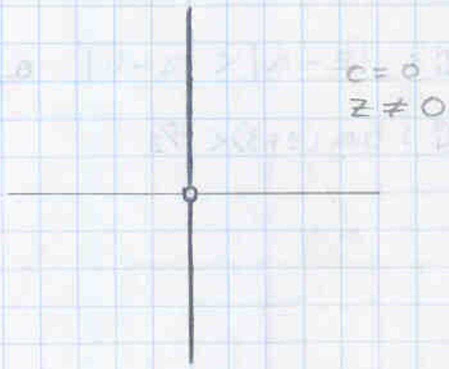
circunferencia con centro $\left(\frac{1}{2c}, 0\right)$ y radio $\left(\frac{1}{2c}\right)$



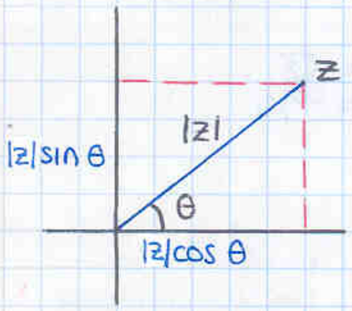
↳ si $c = 0$

$$\frac{x}{x^2+y^2} = 0$$

$x = 0$ (recta del eje de la y)



• Forma modulo-argumental o polar $|z|_\theta$

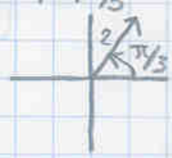


$Re(z) = |z| \cos\theta$
$Im(z) = |z| \operatorname{sen}\theta$

$z = Re(z) + Im(z)\, i$
$\quad = |z|\cos\theta + |z| \sin\theta\, i$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= |z|\cos\theta + i\,|z| \operatorname{sen}\theta \\ &\equiv |z|_\theta \end{aligned}}$$

ej $|2|_{\pi/3}$



• Propiedades de la forma modulo argumental

↳ $z \cdot z' = |z||z'|[(\cos \theta+\theta') + i \operatorname{sen}(\theta+\theta')]$

$$\boxed{z \cdot z' = (|z| + |z'|)_{\theta+\theta'}}$$

↳ $\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}[\cos \theta-\theta' + i \operatorname{sen} \theta-\theta']$

$$\boxed{\frac{z}{z'} = \left(\frac{|z|}{|z'|}\right)_{\theta-\theta'}}$$

↳ $z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

$$\boxed{z^n = (|z|^n)_{n\theta}} \qquad n \in \underset{\text{entero}}{\mathbb{Z}}$$

↳ $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos \theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k)$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)_{\theta_k}}$$

n distintos argumentos

$$\boxed{\theta_k = \frac{\theta + k2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1}$$

se pueden comprobar estas propiedades tanto con la forma binómica como con las identidades trigonométricas. Sería un buen ejercicio en plan "Show that.."

las distintas raíces de un complejo forman un polígono regular de n-lados.

ej $\sqrt[6]{64} = \pm 2$ y 4 más se pueden deducir por el plano de argand

$(1-i)^7$

en forma binómica se podría hacer arduamente
$(1-i)^7 = \binom{7}{0} - \binom{7}{1}i + \binom{7}{2}i^2 - \binom{7}{3}i^3 + \binom{7}{4}i^4 - \binom{7}{5}i^5 + \binom{7}{6}i^6 - \binom{7}{7}i^7$

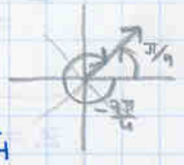
↳ expresarlo en forma polar

$|z| = \sqrt{2}$
$\arg(z) = -\pi/4$

$$1-i \equiv (\sqrt{2})_{-\frac{\pi}{4}}$$

↳ elevar a 7

$$\left[(\sqrt{2})_{-\frac{\pi}{4}}\right]^7 = (\sqrt{2^7})_{-\frac{7\pi}{4}} = (8\sqrt{2})_{\pi/4}$$



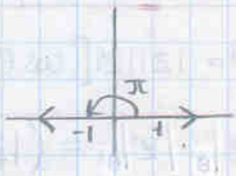
pasándolo de nuevo a binomio
$= 8\sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)$
$= 8\sqrt{2}(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)$
$= 8 + 8i$

$$\sqrt{1_0} = \begin{cases} 1_{\theta_1} \\ 1_{\theta_2} \end{cases}$$

$$\theta_1 = \frac{\theta + k2\pi}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

$$\theta_2 = \frac{\theta + k2\pi}{2} = \frac{0+2\pi}{2} = \pi$$

$$\sqrt{1_0} \begin{cases} 1_0 \\ 1_\pi \end{cases}$$



$$\sqrt[4]{1_\pi} = \begin{cases} 1_{\theta_1} \\ 1_{\theta_2} \\ 1_{\theta_3} \\ 1_{\theta_4} \end{cases} = \sqrt[4]{1_\pi} = \begin{cases} 1_{\pi/4} \\ 1_{3\pi/4} \\ 1_{5\pi/4} \\ 1_{7\pi/4} \end{cases}$$

$(= \sqrt[4]{-1})$

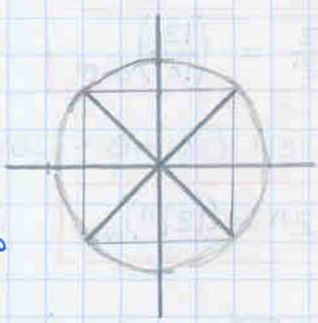
$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi + 2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

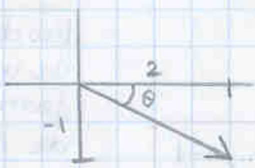
$$\theta_3 = \frac{\pi + 4\pi}{4} = 5\pi/4$$

$$\theta_4 = \frac{\pi + 6\pi}{4} = 7\pi/4$$

polígono regular inscrito en la circunf.



$\sqrt[3]{2-i}$



$|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
$\arg(z) = -\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) = -0.4636\ldots$ rad

$$2-i \equiv (\sqrt{5})_{0.464}$$

$$\sqrt[3]{(\sqrt{5})_{0.464}} = \begin{cases} \sqrt[6]{5}_{-0.155} \\ \sqrt[6]{5}_{1.940} \\ \sqrt[6]{5}_{4.034} \end{cases}$$

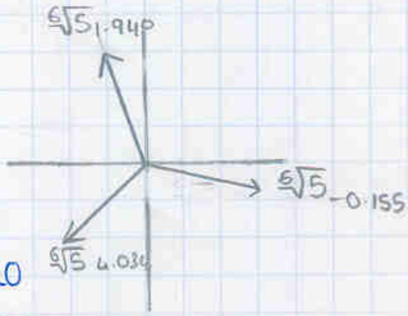
$\cancel{\theta_1 = \frac{-5.8191}{3}}$
$\cancel{\theta_2 = \frac{-5.8191 + 2\pi}{3}}$
$\cancel{\theta_3 = \frac{5.8191 + 4\pi}{3}}$

$$\theta_k = \frac{\theta + k2\pi}{3}$$

$k=0$ $\theta_1 = \frac{\theta}{3} = -0.155$

$k=1$ $\theta_2 = \frac{\theta + 2\pi}{3} = 1.940$

$k=2$ $\theta_3 = \frac{\theta + 4\pi}{3} = 4.034$



- Funciones complejas

$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_n z^n$ (a tb es complejo)

ej $P(z) = (1-i) + (3i)z + (1+2i)z^2$

$P(i) = (1-i) + (3i)i + (1+2i)i^2 = -3-3i$

ej $R(z) = P(z)/q(z)$ ... todas las operaciones algebraicas sabemos hacerlas con complejos

- Fórmula de Euler

Recordemos:

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + x^4/4! + \dots$$

$$\operatorname{sen} x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots$$

$$\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! - x^6/6! + \dots$$

además:

si $P_n(x) = f(x) \to P_n(g(x)) = f(g(x))$

esto se puede aplicar tb a un número $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = 1 + z + z^2/2 + z^3/3! + z^4/4! + \dots$$

$$e^{ib} = 1 + ib + \frac{(ib)^2}{2} + \frac{(ib)^3}{3!} + \frac{(ib)^4}{4!} + \dots$$

si esto se desarrolla sabiendo que: $i^n \begin{cases} 1 & n = 4 \\ i & n = 4+1 \\ -1 & n = 4+2 \\ -i & n = 4+3 \end{cases}$

$$e^{ib} = 1 + ib - \frac{b^2}{2} - i\frac{b^3}{3!} + \frac{b^4}{4!} + i\frac{b^5}{5!} - \frac{b^6}{6!}$$

$= \cos b$

$= i \operatorname{sen} b$

$\cos b = 1 - b^2/2 + b^4/4! - b^6/6! + \dots$

$i \operatorname{sen} b = ib - i b^3/3! + i b^5/5! - \dots$

$= i\,(b - b^3/3! + b^5/5! - \dots)$

$$\boxed{e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b \quad \forall b \in \mathbb{R}}$$

por lo tanto

$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = |z|e^{i\theta}$

$\boxed{z = |z|e^{i\theta}}$ otra forma de expresar números complejos

y como $e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$

se demuestra la fórmula de Euler:

$\boxed{e^{a+\theta i} = e^a(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}$ ← Fórmula de Euler

$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = e^{\ln|z|}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

$$\boxed{z = e^{\ln|z| + i\theta} = |z|\cdot e^{i\theta}}$$

$\boxed{e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)$

cos es par — sen es impar

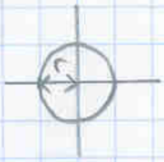
$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\operatorname{sen}\theta$

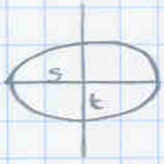
Ejercicios de Números Complejos

Demuestre que la función compleja $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{a^2}{z}\right)$ $a\in\mathbb{R}$ transforma la circunferencia en una elipse

Circunferencia $\longrightarrow$ Elipse

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = s\cos\theta \\ y = t\cos\theta \end{cases}$$





$$x^2+y^2=r^2 \qquad \frac{x^2}{s^2}+\frac{y^2}{t^2}=1$$

Los complejos que forman una circunferencia son:

$$|z|=r$$

$$z=r(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)=re^{i\theta}$$

apliquemos la función $f(z)$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(re^{i\theta}+\frac{a^2}{re^{i\theta}}\right)=\frac{1}{2}\left(re^{i\theta}+\frac{a^2}{r}e^{-i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[r(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)+\frac{a^2}{r}(\cos-\theta+i\,\text{sen}-\theta)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[r(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)+\frac{a^2}{r}(\underset{\text{par}}{\cos\theta}-i\,\underset{\text{impar}}{\text{sen}\,\theta})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(r+\frac{a}{r^2}\right)\cos\theta+i\,\frac{1}{2}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\text{sen}\,\theta$$

sea $f(z)=u=x+yi$

$$x=\frac{1}{2}\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$$
$$y=\frac{1}{2}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\text{sen}\,\theta$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{\frac{1}{2}\left(r+\frac{a^2}{r}\right)} \\ \text{sen}\,\theta &= \frac{y}{\frac{1}{2}\left(r-a^2/r\right)} \end{aligned}\right\}$$

al cuadrado y sumando

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}(r+a^2/r)^2}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}(r-a^2/r)^2}=1$$

la ecuación de una elipse

$z^4 - 27z = 0$ Resolver

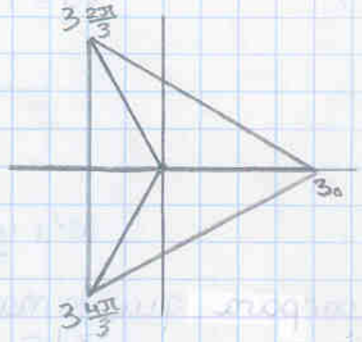
$$z^4 - 27z = 0$$
$$z(z^3 - 27) = 0$$

$\underline{z = 0}$

$$z^3 - 27 = 0$$
$$z^3 = 27$$
$$z = \sqrt[3]{27}$$

$$z = \sqrt[3]{27_0} \begin{cases} 3_0 = 3 \\ 3_{\frac{2\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \\ 3_{\frac{4\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$\theta_0 = \frac{0}{3} = 0$$
$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$$
$$\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$$



Solución:

$$z = \left\{0,\ 3,\ -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

TEMA 5: POLINOMIOS

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

→ Coeficientes: a_i $\mathbb{R}, \mathbb{C}$
→ Grado $= n$ $(a_n \neq 0)$
↳ Polinomio constante, grado cero
→ Raiz $= a$: $P(a) = 0$

→ **Operaciones**

sumar, restar, multiplicar

dividir $\quad \begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} r(x) & C(x) \end{array} \quad P = Q \cdot C + r$

→ **Teorema de Ruffini**

$$\boxed{\begin{array}{l} P(a) = \text{resto de la división } P(x)/x-a \\ \hookrightarrow P(a) = 0 \to a \text{ es raiz de } P(x) \end{array}}$$

↳ Regla de Ruffini $\quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$

$$\frac{P(x)}{x-a} = Q(x) + \underbrace{P(a)}_{\text{resto}}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \\ a & & a a_n & a^2 a_n + a a_{n-1} & \ldots & a^n a_n + a^{n-1} a_{n-1} + a^{n-2} a_{n-2} + \ldots + a a_1 \\ \hline & a_n & a a_n + a_{n-1} & \ldots & \ldots & \underset{\text{resto}}{P(a)} \end{array}$$

ej: dividir $P(z) = -i + (2+i)z + iz^2 - 3z^3$ entre $Q(z) = z + 2i$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -3 & i & 2+i & -i \\ -2i & & 6i & 14 & -32i+2 \\ \hline & -3 & 7i & 16+i & 2-33i \end{array}$$

resto
$P(-2i) = 2 - 33i$

Factorización

ej $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$

$P(z_1) = P(z_2) = 0$

$$z_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

$$z_2 = \frac{-a - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

$\rightarrow P(z) = k(z - z_1)(z - z_2)$

Lema de factorización (LF)

sea $P(x)$, $gr(P) = n$ $P(a) = 0 \rightarrow \exists!\, Q(x)$, $gr(Q) = n-1$: $P(x) = (x-a)Q(x)$

ej $P(z) = 6x^3 - 5x^2 + 2x - 3$

$P(1) = 6 - 5 + 2 - 3 = 0$

↳ 1 es raíz

$\rightarrow P(z) = (x-1)Q(x)$

para averiguar $Q(x)$, regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & -5 & 2 & -3 \\ 1 & & 6 & 1 & 3 \\ \hline & 6 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$Q(x) = 6x^2 + x + 3$

Teorema Fundamental del Álgebra (Gauss y D'Alembert)

TODO polinomio (no cte) tiene raíz.

$\forall\, P(z) \neq cte. \quad \exists z \in \mathbb{C} \, : \, P(z) = 0$

↳ Teorema de Factorización

$\forall P \quad P(z) = c(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)$ $a_i \in \mathbb{C}$, $n = gr(P)$

↳ Para facilitar la búsqueda de raíces (Cardano y Vietta)

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots a_n z^n$$
$$= k(z - b_1)(z - b_2) \dots$$

si los coeficientes son enteros $(a_i \in \mathbb{Z})$

si b raíz es entera $\rightarrow$ b es divisor de a_0

si b raíz $= \frac{p}{q}$ $\rightarrow$ p es divisor de a_0, q es divisor de a_n

↳ (cont.)

↳ Sobre las raices complejas (en parejas conjugadas)

si tengo $P(x)$ de coeficientes reales

si $z \in \mathbb{C} : P(z) = 0$ ⟶ $\bar{z} \in \mathbb{C} : P(\bar{z}) = 0$

si hay raices complejas — su conjugada tambien es raiz

↳ Corolarios del teorema de factorización

↳ a) P $gr(P) = n > 0$ no se anula en mas de n puntos

↳ b) si $P(z) = 0$ para ∞ z ⟶ $P \equiv 0$

↳ Teorema de Unicidad

La factorización es única

La multiplicidad algebraica de una raiz es tb única.

↳ Multiplicidad Algebraica

Cuando una raiz es mas de una vez raiz se define su multiplicidad algebraica ≡ ≡ nº de veces que se repite

> ej P $gr(P) = n$
>
> raices: $r_1, r_2, \dots, r_k$
>
> multiplicidades: $m_1, m_2, \dots, m_k$ $\quad \Sigma m = n$
>
> $P(x) = k(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2} \dots (x-r_k)^{m_k}$

$P(x)$ $gr(P) = n$ coeficientes reales para que raices complejas vayan en pares conjugados

raices reales: $r_1, \quad r_2, \quad \dots, \quad r_k$

con mult. algeb: $m_1, \quad m_2, \quad \dots, \quad m_k$

raices complejas: $\underbrace{\begin{matrix} a_1 + b_1 i \\ a_1 - b_1 i \end{matrix}}_{(x-a_1)^2 + b_1^2}, \quad \underbrace{\begin{matrix} a_2 + b_2 i \\ a_2 - b_2 i \end{matrix}}_{(x-a_2)^2 + b_2^2}, \quad \dots, \quad \underbrace{\begin{matrix} a_l + b_l i \\ a_l - b_l i \end{matrix}}_{(x-a_l)^2 + b_l^2}$

$\boxed{\left.\begin{matrix} a+bi \\ a-bi \end{matrix}\right\} (x-a)^2 + b^2}$

con mult algeb: $n_1, \quad n_2, \quad \dots, \quad n_l$

$$\boxed{P(x) = a_n (x-r_1)^{m_1} \dots (x-r_k)^{m_k} \left[(x-a_1)^2 + b_1^2\right]^{n_1} \dots \left[(x-a_l)^2 + b_l^2\right]^{n_l}}$$

Ejemplo de casi todo lo anterior

¡vaya poderío de ejemplo!

Factorizar:

$P(x) = 8x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

divisible entre 1
divisible entre 8
se hace esto sólo porque son coeficientes reales
→ divisible entre 1 y

candidatos para 1era factorización: $\pm 1, \pm 1/8, \pm 1/4, \pm 1/2$
↳ todas las demás factorizaciones reales estarán incluidas entre éstas

$P(1) = 8+2+3+3-5+1 \neq 0$
$P(-1) = -8+2-3+3+5+1 = 0$
¡-1 es raíz!

	8	2	3	3	−5	1
−1		−8	6	−9	6	−1
	8	−6	+9	−6	+1	0

$P(x) = (x+1)(8x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 1)$

candidatos para 2ª factorización: $-1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 1/8$
↳ +1 no puede ser porque antes no era
↳ −1 puede ser más de una vez raíz

$Q(-1) = 8+6+9+6+1 \neq 0$
$Q(1/2) = 8/16 - 6/8 + 9/4 - 3 + 1 = \frac{2-3+9-12+4}{4} = 0$
¡$1/2$ es raíz!

	8	−6	9	−6	1
1/2		4	−1	4	−1
	8	−2	8	−2	0

$P(x) = (x+1)(x-1/2)(8x^3 - 2x^2 + 8x - 2)$

candidatos para 3era factorización $\pm 1/2, \pm 1/4, \pm 1/8$
↳ ±2 no puede ser porque no era candidato en las anteriores

$R(1/2) \neq 0$
$R(-1/2) \neq 0$
$R(1/4) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + 2 - 2 = 0$
¡$1/4$ es raíz!

	8	−2	8	−2
1/4		2	0	2
	8	0	8	0

$P(x) = (x+1)(x-1/2)(x-1/4)(8x^2+8)$

como es de segundo grado, podemos resolverla de manera simple

$8x^2 + 8 = 0$
$8(x^2+1) = 0$ → este 8 pasa a multiplicar delante $P(x) = 8(x+1)(x-1/2)(x-1/4)(x^2+1)$
$x^2 + 1 = 0$
$x^2 = -1$
$x = \pm\sqrt{-1}$
$x = \pm i$

$$\boxed{P(x) = 8(x+1)(x-1/2)(x-1/4)(x-i)(x+i)}$$

↑ no olvidar ese 8.
se puede comprobar con el $8x^5$ de arriba y el $8(x+\ldots)(x-\ldots)(x+\ldots)(x+\ldots)(x+\ldots)$

se comprueba que las raíces complejas van en parejas conjugadas

en muchos casos no se factorizan los complejos y se deja
$P(x) = 8(x+1)(x-1/2)(x-1/4)(x^2+1)$

INTEGRACIÓN TEMA 6

Def. $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es primitiva de f si $F'(x)=f(x)$ $\forall x \in]a,b[$

ej $f(x)=x^2$ $F(x)=\frac{x^3}{3}+5$

Teorema

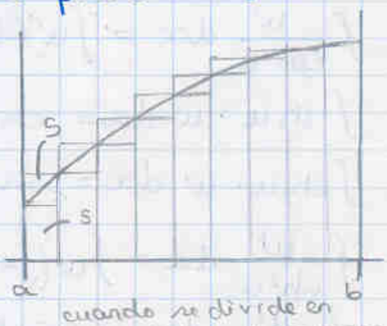
F_1, F_2 primitivas de $f \longrightarrow F_1 - F_2 = C$

Def. Integral indefinida de f es el cjto de todas sus primitivas

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

Def. Integral definida de f desde a hasta b

$\int_a^b f(x)\,dx$ = area entre la gráfica de f y el eje XX' (positiva por encima, negativa por debajo)



cuando se divide en rectangulos muy pequeños

$s \rightarrow \int \leftarrow S$

Regla de Barrow (Teorema Fundamental del cálculo)

si F es una primitiva de f $\qquad \int_a^b f(x) = F(b)-F(a)$

Linealidad

$$\int f+g = \int f + \int g$$

$$\int \alpha f = \alpha \int f \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\int f\cdot g \neq \int f \cdot \int g$

• Tabla de primitivas conocidas

$u = u(x)$

$$\int u^k \cdot u' \, dx = \frac{u^{k+1}}{k+1} + c \qquad k \in \mathbb{R} \quad k \neq -1$$

$$\int \frac{u'}{u} \, dx = \ln|u| + c$$

$$\int e^u \cdot u' \, dx = e^u + c$$

$$\int \operatorname{sen}(u) \cdot u' \, dx = -\cos u + c$$

$$\int \cos(u) \cdot u' \, dx = \operatorname{sen} u + c$$

$$\int \frac{u'}{\cos^2 u} \, dx = \int u'(1+\operatorname{tg}^2 u) \, dx = \operatorname{tg} u + c$$

$$\int \operatorname{sh} u \cdot u' \, dx = \operatorname{ch} u + c$$

$$\int \operatorname{ch} u \cdot u' \, dx = \operatorname{sh} u + c$$

$$\int \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u} \, dx = \int u'(1-\operatorname{th}^2 u) \, dx = \operatorname{th} u + c$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \, dx = \operatorname{arc\,sen} u + c = -\operatorname{arc\,cos} u + c$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}} \, dx = \operatorname{argsh} u + c$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}} \, dx = \operatorname{arg\,ch} u + c$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} \, dx = \operatorname{arg\,tg} u + c$$

$$\int \frac{u'}{1-u^2} \, dx = \operatorname{arg\,th} u + c$$

Ejemplos de Integrales

$$\int \frac{4x^3-3x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{4x^3}{\sqrt{x}}\,dx - \int \frac{3x}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \int 4x^{(3-1/2)}\,dx - \int 3x^{1/2}\,dx$$
$$= \int 4x^{5/2}\,dx - \int 3x^{1/2}\,dx$$
$$= 4\int x^{5/2}\,dx - 3\int x^{1/2}\,dx$$
$$= 4\left(\frac{x^{7/2}}{7/2}+c\right) - 3\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}+c\right)$$
$$= \frac{8}{7}\sqrt[2]{x^7} - 2\sqrt{x^3} + c$$

$$\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \operatorname{arcsen} x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{2} + c \qquad \int u\cdot u'\,dx = \frac{u^2}{2}+c$$

que no te engañen las fracciones, puede ser simplemente $u\cdot u'$

ej: $\int \frac{(1+tgx)^5}{\cos^2 x}$, $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$, $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^3}$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x)+c$$

$$\int tg^2 x\,dx = \int 1+tg^2x-1\,dx = \int 1+tg^2x\,dx - \int 1\,dx = tg\,x - x + c$$

$$\int sen^2 x\,dx = \int 1-\cos^2 x\,dx = \int dx - \int \cos^2 x\,dx \ldots \text{ NO}$$

$$sen\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}2\cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen\,2x + c$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \ldots \boxed{\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}} \quad \cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \int \cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}sen\,2x$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - sen\,2x\right]$$

$$\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx = -2\cos\sqrt{x} + c$$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^x+1}{e^x+1}\,dx - \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int dx - \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$
$$= x - \ln(e^x+1) + c$$

el truquillo de sumar y restar viene muy bien con e^x

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = \int \frac{1}{1-e^x}\,dx + \int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx = \int \frac{e^x+1-e^x}{1-e^x}\,dx + \int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx = \int e^x + \frac{1-e^x}{1-e^x}\,dx + \int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx$$

tb: $\to$ $$= \int \frac{1-e^x+2e^x}{1-e^x}\,dx = \int dx + 2\int \frac{e^x}{1-e^x} = \int dx - 2\int \frac{-e^x}{1-e^x}\,dx$$
$$= x - 2\ln|1-e^x| + c$$

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^3}\,dx = \int (1+e^x)^{-3}e^x\,dx = \frac{(1+e^x)^{-2}}{-2} + c$$

impar... ¡bien!

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx = \int \operatorname{sen} x\,(1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x\,dx$$
$$= \int \operatorname{sen} x\,(1-2\cos^2 x + \cos^4 x)\cos^2 x\,dx$$
$$= \int \operatorname{sen} x\,(\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x)\,dx$$
$$= \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx - 2\int \operatorname{sen} x \cos^4 x\,dx + \int \operatorname{sen} x \cos^6 x\,dx$$
$$= \frac{-\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7}\,dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx = \int \operatorname{sen}^5 x \cos^{-2/3} x\,dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^4 x \cdot \cos^{-2/3} x\,dx$$
$$= \int \operatorname{sen} x\,(1-\cos^2 x)^2 \cdot \cos^{-2/3}\,dx = \int \operatorname{sen} x\,(1-2\cos^2 x + \cos^4 x)\cos^{-2/3} x\,dx$$
$$= \int \operatorname{sen} x\left[\cos^{-2/3} x - 2\cos^{4/3} x + \cos^{10/3} x\right]dx$$
$$= \int \operatorname{sen} x \cos^{-2/3} x\,dx - 2\int \operatorname{sen} x \cos^{4/3} x\,dx + \int \operatorname{sen} x \cos^{10/3} x\,dx$$
$$= 3\cos^{1/3} x - 2\left(\tfrac{3}{7}\cos^{7/3} x\right) + \tfrac{3}{13}\cos^{13/3} x$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{dx}{4(x^2/4+1)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(\frac{x}{2})^2+1} = \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{1/2}{(\frac{x}{2})^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+c$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\cdot(1-\frac{x^2}{9})}} = \int \frac{dx}{3(1-(\frac{x}{3})^2)} = \int \frac{1/3}{(1-(\frac{x}{3})^2)}\,dx = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} + c$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x^2}} = -\int \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} = -\sqrt{5-x^2} + c$$
$$\frac{d}{dx}(5-x^2) = -2x$$

$$\int \frac{(1+\operatorname{tg} x)^5}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot(1+\operatorname{tg} x)^5\,dx = \frac{1}{6}(1+\operatorname{tg} x)^6$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{1/\cos^2(\frac{x}{2})\,dx}{\frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2(x/2)}} = \int \frac{1/\cos^2(\frac{x}{2})\,dx}{2\,\frac{\operatorname{sen} x/2}{\cos x/2}} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2(x/2)}}{2\operatorname{tg}(x/2)}\,dx$$

ángulo doble

dividir por $\cos^2$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2(x/2)}}{\operatorname{tg}(x/2)}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}$$

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2/3}{x^2-2x+3}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2+2/3}{x^2-2x+3}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}\,dx + \frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}\right)\int \frac{dx}{x^2-2x+3}$$
$$= \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+3| + 4\,\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2-1+3} = \int \frac{dx}{2+(x-1)^2}$$
$$= \int \frac{dx}{2\left(1+\frac{(x-1)^2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1/\sqrt{2}}{1+(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^2}\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)$$

- Integración por partes

Lo que sé integrar, lo integro, lo que no, lo copio menos: $\int$ copiar lo integrado y derivar lo copiado

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$uv' = (uv)' - u'v$$
$$\int uv' = uv - \int u'v$$

$$\boxed{\int uv' = uv - \int u'v}$$

ejemplos:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x - \int -\cos x \, dx$$
$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \ln x \, dx \quad (= 1 \cdot \ln x) \quad = x \cdot \ln|x| - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= x \ln|x| - x + c$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx \quad (= 1 \cdot \operatorname{arctg} x) \quad = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(1+x^2) = 2x \quad \text{¡queremos } 2x \text{ arriba!}$$
$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

$$\underbrace{\int x^n e^x \, dx}_{I_n} = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x \, dx$$
$$= x^n e^x - n \underbrace{\int x^{n-1} e^x \, dx}_{I_{n-1}}$$
$$= x^n e^x - n \left[x^{n-1} e^x - \int (n-1) x^{n-2} e^x \, dx \right]$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1} e^x - n(n-1) \underbrace{\int x^{n-2} e^x \, dx}_{I_{n-2}}$$

Solución: $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$
$I_0 = e^x + c$

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1 + x^2 - 1}{1+x^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x + c$$

$$\underbrace{\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx}_{I}$$

da igual cual integremos / copiemos, siempre y cuando la 2ª vez lo hagamos igual; si cambiaramos: ej si primero usamos sen bx como dv y luego e^{ax} como dv daría: $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$

$$I = e^{ax}\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right) - \int -\frac{1}{b}\cos bx \cdot a e^{ax}\, dx$$

$$I = e^{ax}\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\, dx$$

$$I = e^{ax}\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right) + \frac{a}{b}\left[e^{ax}\left(\frac{1}{b}\operatorname{sen} bx\right) - \int \frac{1}{b}\operatorname{sen} bx \cdot a e^{ax}\, dx\right]$$

$$I = e^{ax}\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right) + \frac{a}{b^2} e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a^2}{b^2}\underbrace{\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\, dx}_{I}$$

$$I = \frac{-e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a^2}{b^2} I$$

despejar I

$$I = \left(\frac{1}{1+(a^2/b^2)}\right)\left(-\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\operatorname{sen} bx\right)$$

- Integración del cociente de polinomios

$\frac{P}{Q} = C$, resto R

$P = QC + R$

$\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

1) si $gr(P) \geq gr(Q)$

$$\rightarrow \frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q} \rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \underbrace{\int C(x)\,dx}_{\text{inmediata}} + \underbrace{\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx}_{\text{ver caso 2}}$$

2) si $gr(P) < gr(Q)$

→ Descomposición en fracciones simples

Para $Q(x) = \underbrace{(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}\cdots(x-r_k)^{m_k}}_{\text{raices reales } r_i \text{ con multiplicidad } m_i}\underbrace{\left[(x-a_1)^2+b_1^2\right]\left[(x-a_2)^2+b_2^2\right]\cdots\left[(x-a_\ell)^2+b_\ell^2\right]}_{\text{raices complejas (por parejas conjugadas) sin multiplicidad}}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{\frac{A_1}{(x-r_1)^{m_1}} + \frac{A_2}{(x-r_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{A_{m_1}}{(x-r_1)}}_{r_1} + \underbrace{\frac{B_1}{(x-r_2)^{m_2}} + \frac{B_2}{(x-r_2)^{m_2-1}} + \cdots + \frac{B_{m_2}}{(x-r_2)}}_{r_2}$$

$$+ \underbrace{\frac{F_1}{(x-r_k)^{m_k}} + \frac{F_2}{(x-r_k)^{m_k-1}} + \cdots + \frac{F_{m_k}}{(x-r_k)}}_{r_k}$$

$$+ \underbrace{\frac{M_1x+N_1}{(x-a_1)^2+b_1^2}}_{\substack{a_1+ib_1\\a_1-ib_1}} + \underbrace{\frac{M_2x+N_2}{(x-a_2)^2+b_2^2}}_{\substack{a_2+ib_2\\a_2-ib_2}} + \cdots + \underbrace{\frac{M_\ell x+N_\ell}{(x-a_\ell)^2+b_\ell^2}}_{\substack{a_\ell+ib_\ell\\a_\ell-ib_\ell}}$$

las raices complejas no deben tener multiplicidad, sino se tendría que utilizar método más complicado de Hermite

$A_i, B_i, \ldots, F_i, M_i, N_i$ son reales desconocidos

Sumando las fracciones : común denominador $Q(x)$

Igualando el numerador a $P(x)$

↳ una vez igualado; $A_i, B_i, \ldots, F_i, M_i, N_i$ se pueden hallar de dos formas

↳ igualando coeficientes

↳ dando valores a x tal que se anulen algunas incognitas

(se pueden combinar los dos métodos)

Las integrales que quedan tras la descomposición y cómo integrarlas está a continuación:

- $\int \frac{1}{(x-a)} dx = \ln|x-a| + c$

- $\int \frac{1}{(x-a)^n}$ $(n>1)$ $dx = \int (x-a)^{-n} dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{(-n+1)} = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c$

- $\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2} dx$

como ya tenemos x arriba, intentamos convertirlo en $\frac{u'}{u}$ para que sea $\ln(u)$. Para ello queremos $2(x-a)$ arriba

$$= M\int \frac{x+N/M}{(x-a)^2+b^2} dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+2N/M}{(x-a)^2+b^2} dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+2a-2a+2N/M}{(x-a)^2+b^2} dx$$

$$= \underbrace{\frac{M}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2} dx}_{\text{ya está preparado para el logaritmo}} + \frac{M}{2}\int \frac{\frac{2N}{M}+2a}{(x-a)^2+b^2} dx$$

$$+ \frac{M}{2}\left(\frac{2N}{M}+2a\right)\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left[(x-a)^2+b^2\right] + (N+aM)\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx$$

como no tenemos x arriba, intentemos convertirlo en $\int \frac{u'}{u^2+1} dx = \operatorname{arctg}(u^2+1)$

$$= \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\frac{(x-a)^2}{b^2}+1} = \frac{1}{b}\int \frac{1/b}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1} = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-a}{b}\right) = 1/b$

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2} = \frac{M}{2}\ln\left[(x-a)^2+b^2\right] + \left(\frac{N+aM}{b}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

Sumando la integral de cada una de las fracciones simples (calculadas como se ve arriba) obtenemos la integral de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ que era nuestro objetivo

El método sirve para cualesquiera polinomios de coeficientes reales y sin tener $Q(x)$ multiplicidad en las raíces complejas.

Ahora veamos algunos ejemplos.

Ejemplos de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

$$\int \frac{3x+1}{x^2-5x+6}\,dx$$

- descomponer en fracciones simples:

$$\frac{3x+1}{x^2-5x+6} = \frac{3x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$3x+1 = A(x-3) + B(x-2)$$

2 formas de hallar A y B

→ igualar coeficientes:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{de } x: & 3 = A + B \\ \text{indep}: & 1 = -3A - 2B \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} A = -7 \\ B = 10 \end{array}$$

→ valores de x que anulen las incógnitas

$$\left.\begin{array}{ll} x=3: & 10 = B \\ x=2: & 7 = -A \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} B = 10 \\ A = -7 \end{array}$$

- integrar la suma de fracciones simples

$$\int \frac{3x+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int -\frac{7}{x-2} + \frac{10}{x-3}\,dx$$

$$= \int \frac{-7}{x-2}\,dx + \int \frac{10}{x-3}\,dx$$

$$= -7\ln|x-2| + 10\ln|x-3|$$

$$\int \frac{5}{x^2-4x+4}\,dx =$$

$$\frac{5}{x^2-4x+4} = \frac{5}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)}$$

$5 = A + B(x-2)$

coef x: $B=0$, $A=5$

$\frac{5}{(x-2)^2} = \frac{5}{(x-2)^2}$ se queda igual, porque era inmediata

$$\int \frac{5}{(x-2)^2}\,dx = \int 5(x-2)^{-2}\,dx = \frac{-5}{x-2} + c$$

$$\int \frac{x^5}{x^2+4}\,dx$$

como $\text{grad}(P(x)) > \text{grad}\,Q(x)$ dividir

$$\begin{array}{l|l} x^5 & x^2+4 \\ \hline -(x^5+4x^3) & x^3-4x \\ 0 - 4x^3 & \\ -(-4x^3-16x) & \\ 0 + 16x & \end{array}$$

$$x^5 = (x^2+4)(x^3-4x) + 16x$$

$$\frac{x^5}{x^2+4} = x^3 - 4x + \frac{16x}{x^2+4}$$

$$\int \frac{x^5}{x^2+4}\,dx = \int x^3 - 4x\,dx + \int \frac{16x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 16\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 8\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 8\ln(x^2+4) + c$$

$$\int -\frac{2x+1}{x^3+1}\,dx$$

cuidado

$$x^3+1=0$$
$$x^3=-1$$
$$x=\sqrt[3]{-1} < -1$$

$$x^3+1=(x+1)(\quad)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^3+1=(x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{2 raíces complejas}}$$

$$\frac{-(2x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}$$

$$-2x-1=A(x^2-x+1)+(Mx+N)(x+1)$$

para $x=-1 \Rightarrow 1=3A$

igualar coef $x^2 \Rightarrow 0=A+M$

igualar term indep $\Rightarrow -1=A+N$

$$\boxed{A=1/3,\quad M=-1/3,\quad N=-4/3}$$

$$\int\frac{-2x-1}{x^3+1}\,dx=\int\frac{1/3}{x+1}\,dx+\int\frac{-1/3\,x-4/3}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx-\frac{1}{3}\int\frac{x+4}{x^2-x+1}\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x+4}{x^2-x+1}\,dx$$

$$\int\frac{x+4}{x^2-x+1}\,dx=$$ queremos $\frac{u'}{u}$ para que sea $\ln(u)$ ya que tenemos x arriba, sólo necesitamos tener $2x-1$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+8}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1+8}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{9}{x^2-x+1}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\underbrace{\ln(x^2-x+1)}_{\text{no hacen falta palos porque nunca es negativo}}+\frac{9}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$\int\frac{1}{x^2-x+1}\,dx=$$ como no tenemos x arriba, lo convertimos a $\int\frac{u'}{u^2+1}\,dx$ para que sea $\operatorname{arctg} u$

completar el cuadrado

$$=\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1}\,dx=\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$=\int\frac{1}{(\frac{\sqrt3}{2})^2+(x-\frac{1}{2})^2}\,dx=\frac{1}{(\frac{\sqrt3}{2})^2}\int\frac{1}{1+\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{\sqrt3}{2})^2}}=\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)^2\int\frac{1}{1+\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt3}{2}}\right)^2}$$

la derivada de $\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt3}{2}}\right)$ es $\frac{2}{\sqrt3}$, por lo que hacemos entrar $\frac{2}{\sqrt3}$ a la integral

$$=\frac{2}{\sqrt3}\int\frac{\frac{2}{\sqrt3}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt3}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt3}\right)$$

$$\int-\frac{2x+1}{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|-\frac{3}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt3}\right)+C$$

- **Método de sustitución**

$$\int f(x)\,dx = \begin{pmatrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{pmatrix} = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

$$= F(t) + c = \left(t = g^{-1}(x)\right) = F(g^{-1}(x)) + c$$

Condiciones: g tenga inversa, g sea continua, es más, derivable

ejemplos:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \begin{pmatrix} x = t^2 \\ t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{pmatrix} = \int e^t\cdot 2t\,dt = 2\int e^t\cdot t\,dt$$

por partes

$$= 2te^t - 2\int e^t\,dt = 2te^t - 2e^t + c$$

$$= 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^3-1}} = \begin{pmatrix} x^3 - 1 = t^2 \\ 3x^2\,dx = 2t\,dt \end{pmatrix} = \int \frac{x^3\; x^2\,dx}{\sqrt{x^3-1}} = \int \frac{(t^2+1)\frac{2}{3}\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}}$$

$$= \int \frac{2}{3}(t^2+1)\,dt = \frac{2}{3}\int t^2+1\,dt = \frac{2}{9}t^3 + \frac{2}{3}t + c$$

$$= \frac{2t}{3}\left(\frac{t^2}{3} + 1\right) + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-1}\left(\frac{x^3-1}{3} + 1\right) + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3-1}\;\frac{x^3+2}{3} + c$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx = \begin{pmatrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{pmatrix} = \int \frac{t}{t+1}\,2t\,dt = \int \frac{2t^2}{t+1}\,dt$$

$$= \int (2t-2)\,dt + \int \frac{2\,dt}{t+1}$$

$$= t^2 - 2t + 2\ln|t+1| + c$$

cociente de polinomios

$$\begin{array}{r|l} 2t^2 & t+1 \\ \cline{2-2} -(2t^2+2t) & 2t-2 \\ \hline 0 - 2t & \\ -(-2t-2) & \\ \hline 0 + 2 & \end{array}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{pmatrix} x = \operatorname{sen} t \\ t = \arcsin x \\ dx = \cos t\,dt \end{pmatrix} = \int \cos t\cdot\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$$

coseno del ángulo mitad

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\underbrace{\operatorname{sen} 2t}_{2\operatorname{sen} t\cos t} + c$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\arcsin x) + c$$

$2\operatorname{sen} t\cos t \rightarrow$ $t = \arcsin x$: $\operatorname{sen}(\arcsin x) = x$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

$$\boxed{sen^2 + cos^2 = 1 \qquad ch^2 - sh^2 = 1}$$

ejemplo típico

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \begin{pmatrix} \frac{x}{k} = sen\, t \\ x = k\, sen\, t \\ dx = k \cos t\, dt \end{pmatrix} = \int \frac{k \cos t\, dt}{\sqrt{k^2 - k^2 sen^2 t}} = \int \frac{\cancel{k} \cancel{\cos t}\, dt}{\cancel{k} \cancel{\sqrt{1 - sen^2 t}}} = \int dt = t + c = \arcsen \frac{x}{k} + c$$

$$\sqrt{k^2\left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2\right)} = k\sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2\right)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 + x^2}} = \begin{pmatrix} x = k\, sh\, t \\ dx = k\, ch\, t\, dt \end{pmatrix} = \int \frac{k\, ch\, t\, dt}{\sqrt{k^2 + k^2 sh^2 t}} = \int \frac{\cancel{k}\, \cancel{ch\, t}\, dt}{\cancel{k} \cancel{\sqrt{1 + sh^2 t}}} = \int dt = t + c = \arg sh \frac{x}{k} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k^2}} = \begin{pmatrix} x = k\, ch\, t \\ dx = k\, sh\, t\, dt \end{pmatrix} = \int \frac{k\, sh\, t\, dt}{\sqrt{k^2 ch^2 t - k^2}} = \int \frac{k\, sh\, t}{k\sqrt{ch^2 t - 1}}\, dt = \int \frac{\cancel{k}\, sh\, t}{\cancel{k}\, sh\, t}\, dt = \int dt = t + c = \arg ch \frac{x}{k} + c$$

tambien se puede

$$= \begin{pmatrix} x = \frac{k}{sen\, t} \\ dx = \frac{-k \cos t\, dt}{sen^2 t} \end{pmatrix} = \int \frac{\frac{-k \cos t}{sen^2 t}}{\sqrt{\frac{k^2}{sen^2 t} - k^2}}\, dt = \int \frac{-\frac{k \cos t}{sen^2 t}}{\sqrt{\frac{k^2 - k^2 sen^2 t}{sen^2 t}}}\, dt = \int \frac{-\frac{k \cos t}{sen^2 t}}{\frac{k\sqrt{1 - sen^2 t}}{sen\, t}} = -\int \frac{dt}{sen\, t}$$

usar método del willy!

ej:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} = \begin{pmatrix} x - 1 = 2\, sh\, t \\ dx = 2\, ch\, t\, dt \end{pmatrix} = \int \frac{2\, ch\, t\, dt}{\sqrt{(2\, sh\, t)^2 + 4}} = \int \frac{\cancel{2}\, ch\, t\, dt}{\cancel{2}\sqrt{sh^2 t + 1}} = \int \frac{ch}{\sqrt{ch^2 t}}\, dt = \int dt = t + c = \arg sh\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

se podía directa

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1\right)}} = \int \frac{\frac{1}{2}\, dx}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}} = \arg sh\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

Integrales de funciones racionales de seno y coseno

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$$

está estudiado que el siguiente cambio de variable siempre funciona

$$\boxed{t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Si no lo recuerdas

partiendo de $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$\sin x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{\frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

$\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$

$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \operatorname{tg}^2$

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = \dots = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ejemplos:

$$\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\, dx = \begin{pmatrix} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \left(\frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \right) \left(\frac{2dt}{1+t^2} \right) = \int \left(\frac{1+t^2+2t}{1+\cancel{t^2}+1-\cancel{t^2}} \right) \frac{2dt}{(1+t^2)}$$

$$= \int \frac{\cancel{2}(t^2+2t+1)}{\cancel{2}(t^2+1)}\, dt = \int \frac{1+t^2}{1+t^2}\, dt + \int \frac{2t}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int dt + \int \frac{2t}{1+t^2}$$

$$= t + \ln|1+t^2| = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \ln\left|1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x - \cos x} = \begin{pmatrix} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{2dt/1+t^2}{1 + 2t/1+t^2 - 1-t^2/1+t^2}$$

$$= \int \frac{2dt}{\cancel{1}+t^2+2t-\cancel{1}+t^2} = \int \frac{\cancel{2}dt}{\cancel{2}t^2+2t} = \int \frac{dt}{t^2+t} = \int \frac{dt}{t(t+1)}$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = A(t+1) + Bt$$

$$t=0 \rightarrow \boxed{A=1}$$
$$t=-1 \rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t| - \ln|t+1| + c$$

c " $\ln c$

$$= \ln\left|\frac{ct}{t+1}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{c \operatorname{tg} x/2}{1 + \operatorname{tg} x/2}\right|$$

· Casos más simples

→ $\boxed{R \text{ es impar en } \operatorname{sen} x}$ $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$

cuando hay senos elevados a n impar

$t = \cos x$
$x = \arccos t$
$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2} \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1-t^2$ ← las potencias pares desaparecen
$dt = -\operatorname{sen} x\, dx$ ← el que queda suelto se va

$$\int tg^2 x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^2 x} dx = (t=\cos x) = \int \frac{\operatorname{sen}^4 x \quad \operatorname{sen} x\, dx}{\cos^2 x}$$
$$= \int \frac{(1-t^2)^2}{t^2} - dt = -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^2} dt = -\int \frac{dt}{t^2} + 2\int dt - \int t^2 dt$$
$$= \frac{1}{t} + 2t - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

→ $\boxed{R \text{ es impar en } \cos x}$ $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$

cuando hay cosenos elevados a n impar

$t = \operatorname{sen} x$
$x = \operatorname{arcsen} t$
$\cos^2 x = 1 - t^2$ ← las potencias pares
$dt = \cos x\, dx$ ← el que queda suelto

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \left(\begin{matrix} t = \operatorname{sen} x \\ \cos^2 x = 1-t^2 \\ dt = \cos x\, dx \end{matrix}\right) = \int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{(1-t^2)\, dt}{t^2} = \int \frac{1}{t^2} dt - \int dt$$
$$= -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x + C$$

→ $\boxed{R \text{ es par en } \operatorname{sen} x \cdot \cos x}$ $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$

cuando hay un número par de senos y cosenos multiplicándose ej: $\operatorname{sen}^3 \cos^5$, $\operatorname{sen}^4 \cos^4$

$t = tg\, x$
$x = \operatorname{arctg} t$
$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ — desaparecen las raíces
$dx = \frac{dt}{1+t^2}$

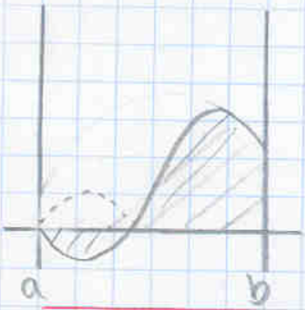
$$\int \frac{2 tg\, x + 3}{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x} dx = \int \frac{2t+3}{\left(\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2}{1+t^2}\right)} \frac{dt}{(1+t^2)} = \int \frac{(2t+3)}{(t^2+2)} dt$$

2 raíces conjugadas → ya está descompuesto en fracciones simples $\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$

se conduce a un logaritmo y una arcotangente

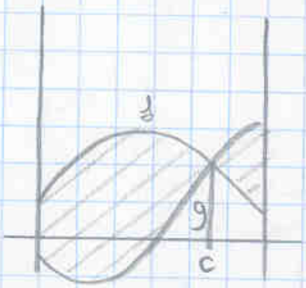
$$= \int \frac{2t}{t^2+2} dt + 3\int \frac{1}{t^2+2} dt$$
$$= \ln|t^2+2| + 3\, \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+(t/\sqrt{2})^2}$$
$$= \ln|t^2+2| + 3\, \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1/\sqrt{2}\, dt}{1+(t/\sqrt{2})^2}$$
$$= \ln|t^2+2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$
$$= \ln(2+tg^2 x) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{tg\, x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Area



$$\boxed{A = \int_a^b |f(x)|}$$

Area entre 2 curvas



$$A = \int_a^c (f-g) + \int_c^b (g-f)$$

la de arriba menos la de abajo en cada intervalo

Resultados conocidos

Area de la elipse

$A = \pi ab$

esfera: πr^2

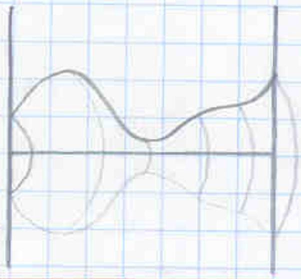
Volumen de esfera

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Volumen de un cono

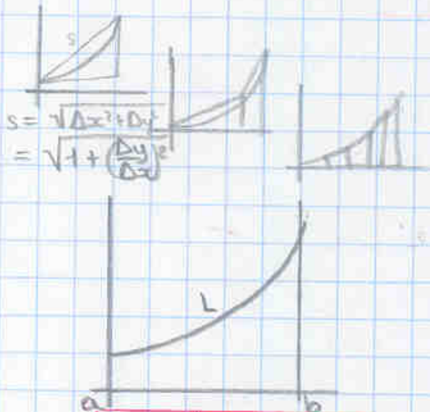
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Volumenes de Revolución



$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2 \, dx}$$

Longitudes de arcos

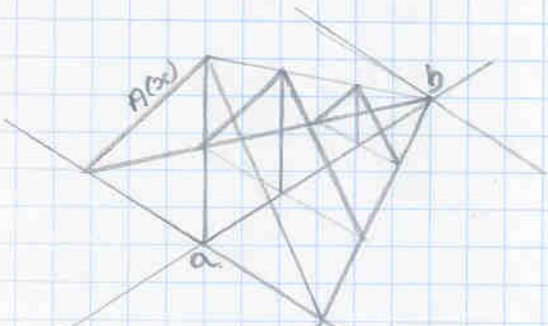


$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}}$$

Superficie de un cuerpo de revolución

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + (f')^2}}$$

Volumenes de traslación

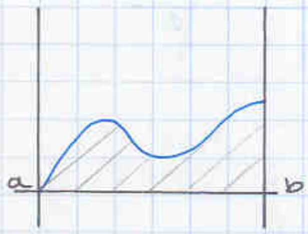


necesitan el area en función de x

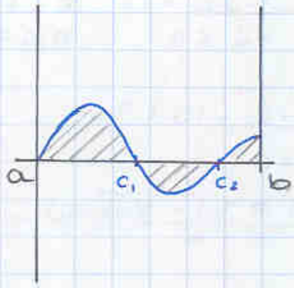
$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\, dx}$$

- Cálculo de areas

$A = \int_a^b f(x)\,dx$

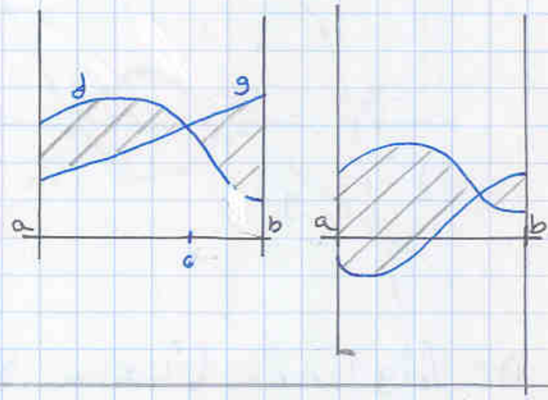


$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$
$= \int_a^{c_1} f(x)\,dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx$



$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
$= \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$

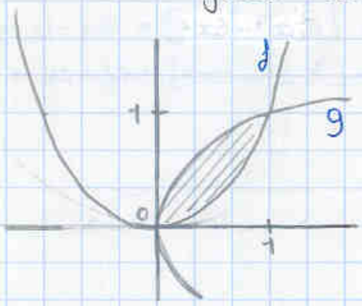
$A = \int_a^c (f-g) + \int_c^b (g-f)$



Ejemplos

- Area entre las curvas x^2 y $\sqrt{x}$

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sqrt{x}$



$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{array}\right\} \quad x^2 = \sqrt{x}$

$x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$\underline{x = 0} \qquad x^3 - 1 = 0$

$x^3 = 1$

$\underline{x = 1}$

$A = \int_0^1 (g - f)\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$

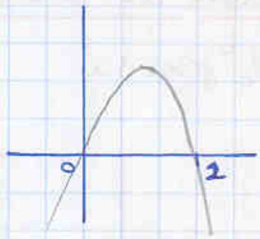
$A = \frac{1}{3}$ u.a.

ej $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ Area delimitada por ellas
$g(x) = 2x - x^2$

· Puntos de corte:

$g(x) = x(2-x) = 0$ $\quad x = 0$, $x = 2$

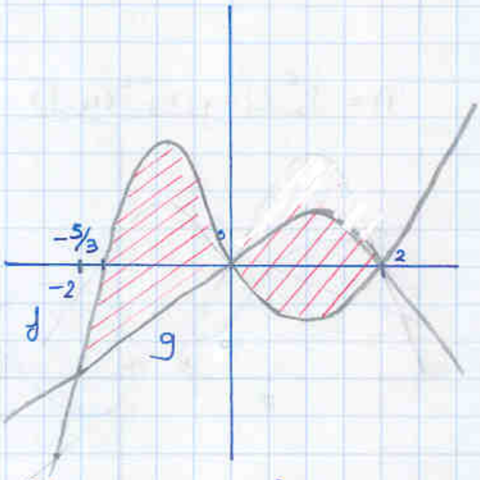
$g'(x) = 2 - 2x = 0 \quad x = 1$
$g''(x) = -2 < 0 \quad$ máx



$f(x) = x(3x^2 - x - 10) = 0$

$x = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(3)(-10)}}{6} = \frac{1 \pm 11}{6} = \begin{cases} 2 \\ -5/3 \end{cases}$$



¿se cortan en algún otro sitio?

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x^3 - x^2 - 10x \\ y &= 2x - x^2 \end{aligned}\right\}$$

$3x^3 - \cancel{x^2} - 10x = 2x - \cancel{x^2}$

$3x^3 - 12x = 0$

$3x(x^2 - 4) = 0$

$x = 0$

$x = \pm 2$

$A_1 = \int_0^2 (g - f)\,dx = \int_0^2 (2x - x^2 - 3x^3 + x^2 + 10x)\,dx$

$A_2 = \int_{-2}^0 (f - g)\,dx = \int_{-2}^0 (3x^3 - x^2 - 10x - 2x + x^2)\,dx$

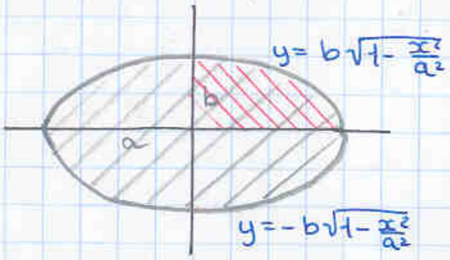
$A_1 = \int_0^2 (12x - 3x^2)\,dx = \left[6x^2 - \frac{3}{4}x^4\right] = 24 - 12 = 12$

$A_2 = \int_{-2}^0 (3x^3 - 12x)\,dx = \left[\frac{3}{4}x^4 - 6x^2\right] = -12 + 24 = 12$

$A = 24$

Area de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

recordemos que la elipse son 2 funciones en una

$$\frac{1}{4}A=\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=b\int_0^a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx=\left(\begin{array}{l}\frac{x}{a}=\operatorname{sen}t\\ x=a\operatorname{sen}t\\ dx=a\cos dt\\ x=0\to t=0\\ x=a\to t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right)$$

$t=\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$

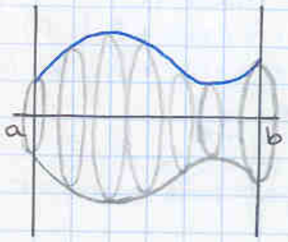
$$=b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,dx=b\int_0^{\pi/2}\cos t(a\cos dt)$$

$$=ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$\frac{1}{4}A=ab\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2t\right]_0^{\pi/2}=ab\,\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{A=\pi ab}$$

- Volúmenes de revolución

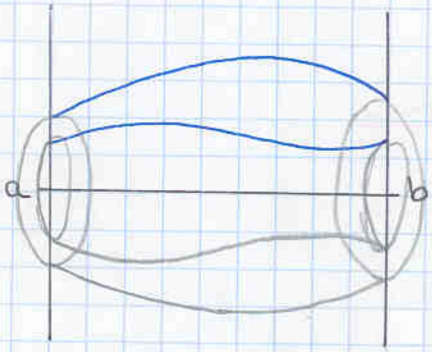


en lugar de dividir en tiras se divide en rodajas

$A = \pi(f(x))^2$

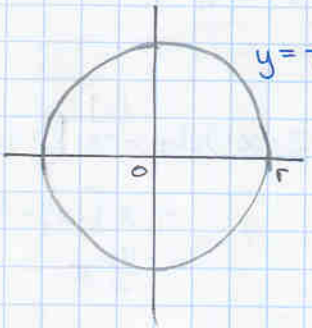
$dV = \pi\, f(x)^2\, dx$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2 \cdot dx}$$



$$V = \pi \int_a^b (f^2 - g^2)\, dx$$

Ejemplo: volumen de una esfera



$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\frac{1}{2}V = \pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx$$

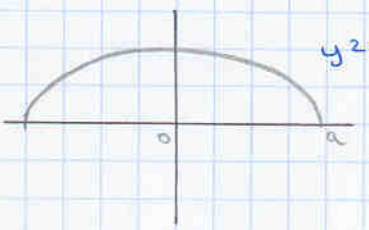
$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r$$

$$= \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{2\pi r^3}{3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

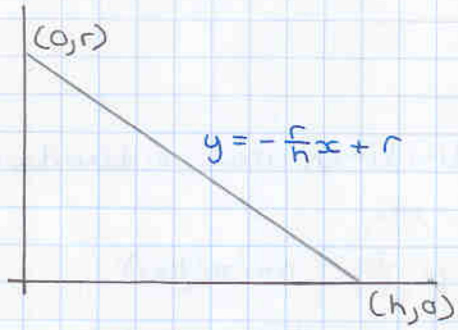
Volumen de un elipsoide

Pa casa!



$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

Volumen de un cono



ec de una recta

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

o tambien

$$y=mx+n$$

$$\left.\begin{array}{l} r=m\times 0+n \\ 0=mh+n \end{array}\right\} \begin{array}{l} r=n \\ m=-\frac{r}{h} \end{array}$$

o tambien

$$y=mx+n$$

$m=tg\,\alpha=-\frac{r}{h}$

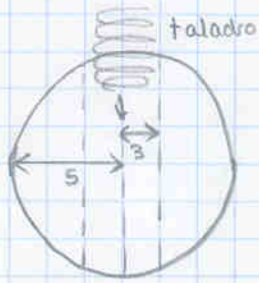
$n=$ punto de corte $=r$

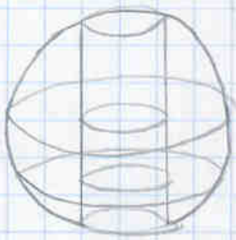
$$V=\pi\int_0^h\left(-\frac{r}{h}x+r\right)^2dx=\pi\int_0^h\left(\frac{r^2}{h^2}x^2-\frac{2r^2}{h}x+r^2\right)dx$$

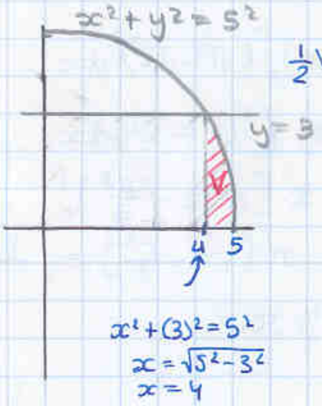
$$=\pi\left[\frac{r^2}{h^2}\frac{x^3}{3}-\frac{r^2x^2}{h}+r^2x\right]_0^h=\pi\left(\frac{r^2h}{3}-\cancel{r^2h}+\cancel{r^2h}\right)$$

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\pi r^2h}$$

Volumen delimitado por dos curvas







$x^2+(3)^2=5^2$

$x=\sqrt{5^2-3^2}$

$x=4$

$$\frac{1}{2}V_T=\underbrace{\frac{2}{3}\pi r^3}_{\text{esfera}}-\underbrace{\pi 3^2\cdot 4}_{\text{cilindro}}-\underbrace{V_c}_{\text{casquete}}$$

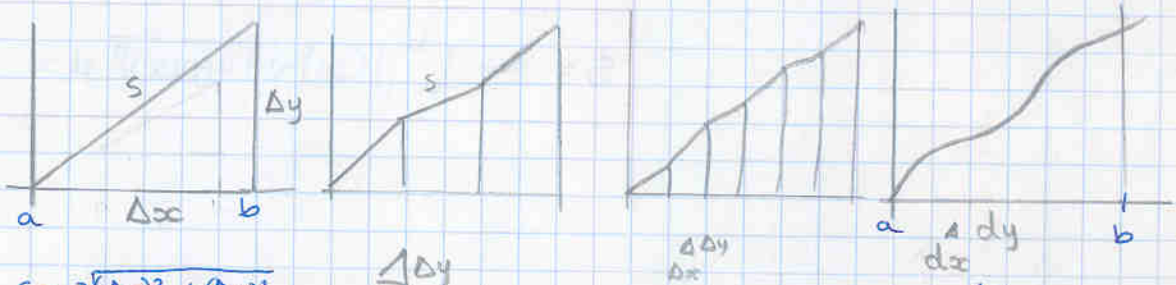
$$V_c=\pi\int_4^5(25-x^2)\,dx=\pi\left[25x-\frac{x^3}{3}\right]_4^5$$

$$=\pi\left[125-\frac{125}{3}-100+\frac{64}{3}\right]$$

$$=\frac{14}{3}\pi$$

$$V_T=2\left[\frac{2}{3}\pi r^3-\pi 3^2\cdot 4-\frac{14}{3}\pi\right]$$

- $\boxed{\text{Longitudes de arcos}}$



$$s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\ \Delta x$$

$\frac{\Delta\Delta y}{\Delta x}$ $\qquad$ $\frac{\Delta\Delta y}{\Delta x}$

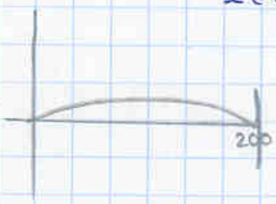
$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}\ dx$$

longitud de arco $\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,dx}$

ejemplo $f(x) = x - 0.005x^2$

$f'(x) = 1 - 0.01x$

$x(1 - 0.005x)$



$$L = \int_0^{200} \sqrt{1 + (1 - 0.01x)^2}\ dx =$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} -1 + 0.01x = \operatorname{sen} t \\ +0.01\,dx = \cos t\,dt \\ dx = \frac{\cos t}{+0.01}\,dt \end{pmatrix}} = \int_0^{200}$$

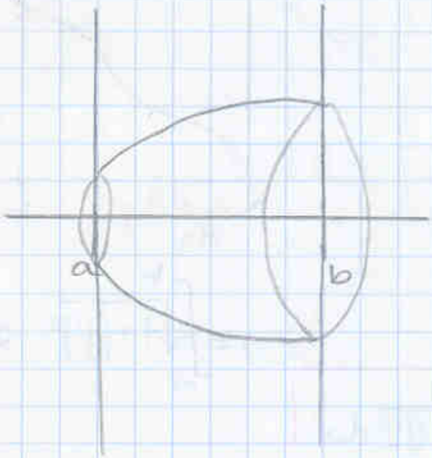
$$= \begin{pmatrix} 1 - 0.01x = sh\,t \\ -0.01\,dx = ch\,dt \\ dx = -\frac{1}{0.01}\,ch\,t\,dt \end{pmatrix} = \int_0^{200} \sqrt{1 + sh^2 t}\ -\frac{1}{0.01}\,ch\,t\,dt$$

$$= \int_0^{200} ch\,t - \frac{1}{0.01}\,ch\,t\,dt = \int_0^{200} -99\,ch\,t\,dt$$

$$= -99 \int_0^{200} ch\,t\,dt = -99\,[sh\,t]_0^{200} = -99\,[1 - 0.01x]_0^{200}$$

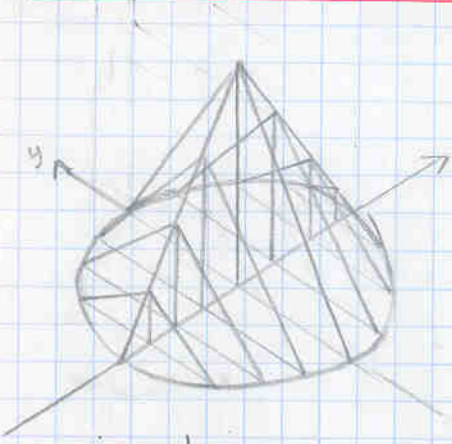
$$= 99$$

- Superficie de un cuerpo de revolución

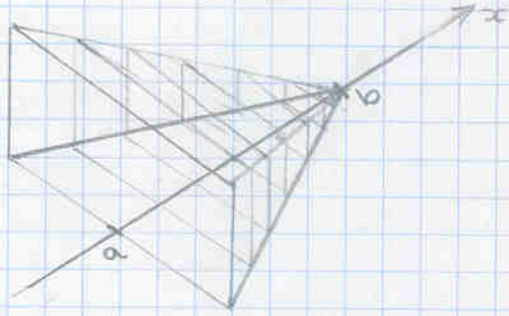


$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

- Volúmenes de traslación



se saca el area para cualquier x y se integra $\int_a^b A(x)\,dx$



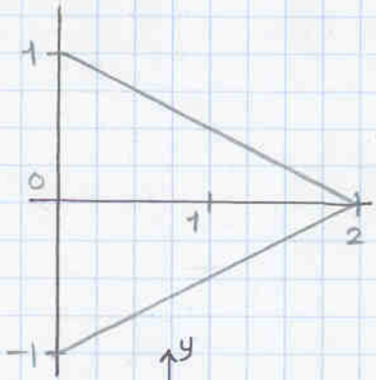
ejemplo

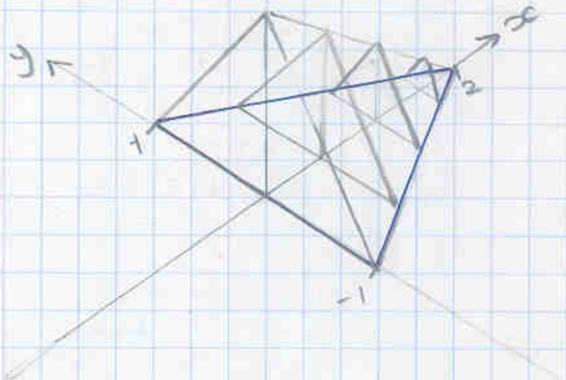
$f(x) = 1 - \frac{x}{2}$

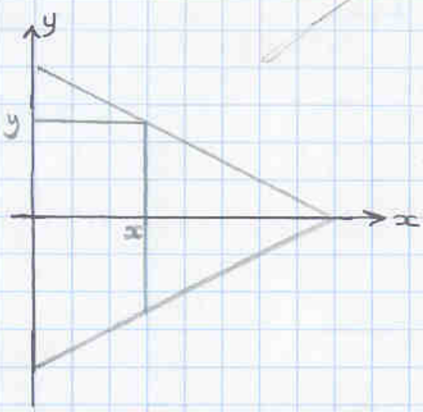
$g(x) = -1 + \frac{x}{2}$

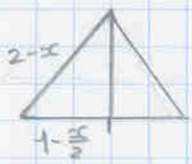
$x = 0$

sección para el eje X es un triángulo equilátero









$h = \sqrt{(2-x)^2 - (1-\frac{x}{2})^2}$

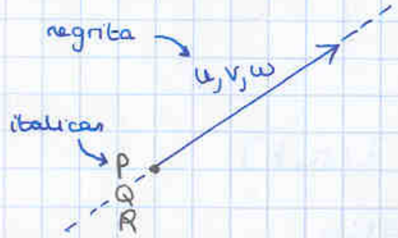
$h = \sqrt{3}\,(1 - \frac{x}{2})$

$A(x) = \frac{1}{2}\underbrace{(2-x)}_{\text{base}}\underbrace{\sqrt{3}\,(1-\frac{x}{2})}_{\text{altura}} = \sqrt{3}\,(1-\frac{x}{2})^2$

$V = \int_0^2 \sqrt{3}\,(1-\frac{x}{2})^2\,dx = -\frac{2\sqrt{3}}{3}(1-\frac{x}{2})^3\Big]_0^2$

$= 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

TEMA 7: GEOMETRIA

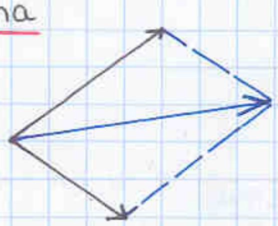


un vector libre
no depende del punto de aplicación

vectores; algo abstracto que cumple las propiedades de abajo suma y producto, que conviene expresar en un sistema de referencia (hay muchos

Operaciones

→ Suma



→ Producto por un escalar

Asociativa:
$(u+v)+w = u+(v+w)$

Conmutativa:
$u+v = v+u$

El. neutro:
$u+0 = u$

El. simétrico:
$u+(-u) = 0$

Distributiva respecto suma de vectores:
$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; u, v, w vectores)

Distributiva respecto suma de números
$(\lambda+\mu)\cdot v = \lambda v + \lambda\mu$

$\lambda\cdot(\mu v) = (\lambda\mu)\cdot v$

$1\cdot v = v$

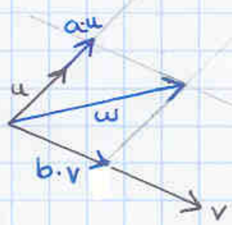
→ Espacio vectorial

$(E, +; \mathbb{R}, \cdot)$ espacio vectorial

cjto de los vectores — operacion suma — operación para agrandar, acortar... multiplicar por escalar

→ Sistema de Referencia

$\mathbb{R}^2$



(a, b) componentes de w en el sistema de referencia formado por u y v.
la base {u, v}

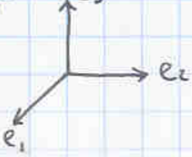
u y v tienen que tener independencia lineal (no paralelos)

el trabajo con vectores, una vez definida la base, pasa a ser operaciones con sus componentes

sistemas de Referencia canónicos: Base canónica

$\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$



$\boxed{\text{Rectas en } \mathbb{R}^2}$

$X(x,y)$

$P(x_0,y_0)$

$0 \neq v = (a,b)$ vector director

$\lambda \in \mathbb{R}$

ecuación vectorial

$$X = P + \lambda v$$

$$(x,y) = (x_0,y_0) + \lambda(a,b)$$

también se puede $X - P \perp u$ $\quad u(A,B)$

$(x-x_0, y-y_0) \perp (A,B)$

$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$

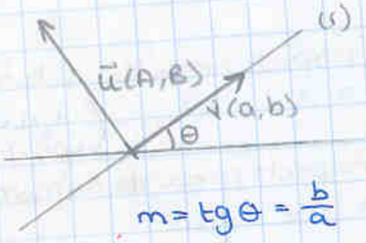
$Ax + By = Ax_0 + By_0$

ecuación paramétrica

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a \\ y &= y_0 + \lambda b \end{aligned}\right\}$$

$\lambda = \dfrac{x-x_0}{a}$

$\lambda = \dfrac{y-y_0}{b}$



$m = tg\,\theta = \dfrac{b}{a}$

$m' = tg(\theta + \frac{\pi}{2}) = \dfrac{B}{A} = \dfrac{-a}{b}$

$\boxed{m' = \dfrac{-1}{m}}$

ecuación continua

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \qquad a,b \neq 0$$

si $a = 0$ la ec continua es $\boxed{x = x_0}$

si $b = 0$ la ec continua es $\boxed{y = y_0}$

$y - y_0 = \dfrac{b}{a}(x - x_0)$ gradiente

ec. punto pendiente

$y = mx + h$

ecuación explícita

$$y = y_0 + \frac{b}{a}(x-x_0)$$

ecuación general

$$Ax + By = D$$

· 2 rectas en $\mathbb{R}^2$

$r: X = P + \lambda u$ $\quad X(x,y)$
$r': X = Q + \lambda v$ $\quad P(x_0, y_0)$ $\quad u = (a,b)$
$Q(x_0', y_0')$ $\quad v = (a', b')$

$$\left.\begin{array}{l} r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases} \\ r': \begin{cases} x = x_0' + \mu a' \\ y = y_0' + \mu b' \end{cases} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x_0 + \lambda a = x_0' + \mu a' \\ y_0 + \lambda b = y_0' + \mu b' \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$a\lambda - a'\mu = x_0' - x_0$$
$$b\lambda - b'\mu = y_0' - y_0$$

$$\Downarrow$$

Teorema de Rouche-Frobenius

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & -a' & x_0'-x_0 \\ b & -b' & y_0'-y_0 \end{array}\right)$$

$rg\begin{pmatrix} a & -a' \\ b & -b' \end{pmatrix} =$

- 1 $\quad u \parallel v \quad r \parallel r'$ $\quad rg\left(\begin{array}{cc|c} a & -a' & x_0'-x_0 \\ b & -b' & y_0'-y_0 \end{array}\right) =$
  - $1 < 2$ nº de incognitas, $\exists \infty$ sol. $r \equiv r'$
  - 2 $\quad r \parallel r'$ distintas, si $(x_0', y_0') \neq (x_0, y_0)$
- 2 $\quad u \not\parallel v \quad r \not\parallel r'$, $u \neq k \cdot v$ $\quad rg\left(\begin{array}{cc|c} a & -a' & x_0'-x_0 \\ b & -b' & y_0'-y_0 \end{array}\right) = 2 =$ nº de incog

si rg es 1, sería $(a,b) \parallel (a', b')$, $u \parallel v$

$\exists!$ solución $\quad r \cap r' = \{P\}$

$\downarrow$

$(\lambda, \mu) \xrightarrow{\text{ec. paramétrica}}$ r corta r' en un punto P

Recta en $\mathbb{R}^3$

$P = (x_0, y_0, z_0)$
$X = (x, y, z)$
$v(a, b, c)$

ecuación vectorial
$$\boxed{X = P + \lambda v}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (a, b, c)$$

ecs. paramétricas
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

eliminando λ y μ

ecs continuas
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad a, b, c \neq 0$$

ej si $a = b = 0$ ecs. cont $\longrightarrow$ $x = x_0$, $y = y_0$

ej si $a = 0$ ecs cont $\longrightarrow$ $x = x_0$, $\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

$$Ax + By + Cz = D$$
$$A'x + B'y + C'z = D'$$
ecs. generales

Plano en $\mathbb{R}^3$

$X = (x, y, z)$
$P = (x_0, y_0, z_0)$
$u = (a, b, c)$
$v = (a', b', c')$ $\quad u \not\parallel v$

ec vectorial
$$\pi: \quad X = P + \lambda u + \mu v$$

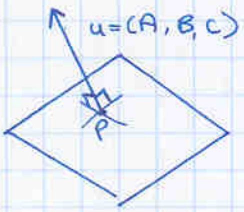
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (a, b, c) + \mu (a', b', c')$$

ecs. paramétricas
$$x = x_0 + \lambda a + \mu a'$$
$$y = y_0 + \lambda b + \mu b'$$
$$z = z_0 + \lambda c + \mu c'$$

eliminando λ y μ

ec. general
$$Ax + By + Cz = D$$

también se puede



$X - P \perp u$
$(X - P) \cdot u = 0$
$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz = D \rightarrow \text{la ec. general}$$

vector perpendicular al plano : (A, B, C)

• Posición Relativa de dos rectas

$$r: \left.\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{array}\right\}$$

$$r': \left.\begin{array}{l} x = x'_0 + \mu a' \\ y = y'_0 + \mu b' \\ z = z'_0 + \mu c' \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 + \lambda a = x'_0 + \lambda a' \\ y_0 + \lambda b = y'_0 + \lambda b' \\ z_0 + \lambda c = z'_0 + \lambda c' \end{array}\right\}
\qquad
\begin{array}{cc|c} \lambda & \mu & \\ \end{array}
\left(\begin{array}{cc|c} a & -a' & x'_0 - x_0 \\ b & -b' & y'_0 - y_0 \\ c & -c' & z'_0 - z_0 \end{array}\right)
\quad M \qquad N$$

Rouché-Frobenius:

$rg(M) =$
- 1 $u // v$ $r // r'$ $Rg(M|N)$
  - 1 $< 2 =$ nº de incognitas $\exists \infty$ sol $r \equiv r'$
  - 2 $\nexists$ solución $r // r'$ distintas
- 2 $u \not\parallel v$ $r \not\parallel r'$ $u \neq k \cdot v$ $Rg(M|N)$
  - 2 = nº de incognitas $\exists!$ solucion $r \cap r' = \{P\}$ $\downarrow (\lambda, \mu)$ $\xrightarrow{\text{ecs paramétricas}}$
  - 3 $\nexists$ solución r y r' se cruzan

• Posición Relativa Recta-Plano

$$r \left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{array}\right.$$

$$\pi : Ax + By + Cz = D$$

$$A(x_0 + \lambda a) + B(y_0 + \lambda b) + C(z_0 + \lambda c) = D$$

$$(Aa + Bb + Cc)\lambda = D - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

$$M\lambda = N$$

también se puede usar Rouché-Frobenius! $(M \mid N)$ matrices con un solo elemento

$rg(M)$
- 0 $M = 0$ $r \perp n$ $r // \pi$ $rg(M|N) =$
  - 0 $0\lambda = 0$ < 1 nº de incog $\exists \infty$ sol $r \subset \pi$
  - 1 $N \neq 0$ $0\lambda = N$ $\nexists$ solucion
- 1 $M \neq 0$ $r \not\parallel \pi$ $rg(M|N) = 1 =$ nº incog. $\exists!$ sol $r \cap \pi = \{P\}$

como $M = 0$

$M = Aa + Bb + Cc = n \cdot u = 0$

$n \perp u$

Posición Relativa Plano-Plano

$$\left.\begin{array}{l}\pi: \; Ax + By + Cz = D \\ \pi': \; A'x + B'y + C'z = D'\end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D'\end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} M \quad\quad & N \end{array}\end{array}$$

$rg(M) = 1$: $n \parallel n'$, $\pi \parallel \pi'$, $n = k \cdot n'$

- $rg(M|N) = 1 < 2 = n^o$ incog. $\exists \infty$ sol $\quad \pi = \pi'$
- $rg(M|N) = 2$: $\nexists$ sol $\quad \pi \parallel \pi'$ distintos

$rg(M) = 2$: $n \nparallel n'$, $\pi \nparallel \pi'$, $n \neq k \cdot n'$

$rg(M|N) = \underbrace{2 < 3 = n^o \text{ incog}}_{3-2=1 \to 1 \text{ parámetro libre}}$ $\quad \exists \infty$ sol $\quad \pi \cap \pi' = r$

Curvas en Polares

↳ Representación de funciones

cartesiana: $y = f(x)$

paramétrica: $x = f(t)$
$y = g(t)$

polar: $\rho = f(\theta)$

ρ ↑ distancia al origen ¡SIEMPRE! ≥ 0

θ ↑ ángulo respecto al eje polar

ej: circunferencia

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$\rho = r$

↳ Ejemplos de curvas en polares

$\rho = \theta$

espiral de arquímedes

en cartesiana:

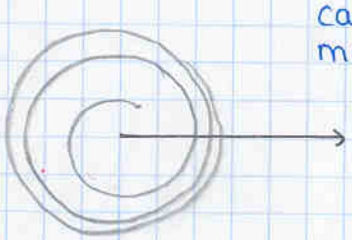
$$\sqrt{x^2+y^2} = \text{arctg}2\left(\frac{y}{x}\right)$$

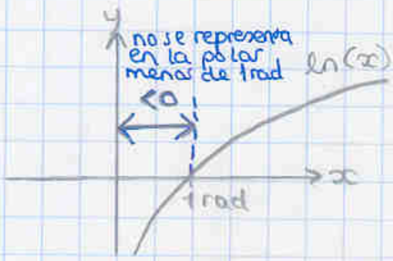
$\sqrt{x^2+y^2}$ ↑ ρ ; $\text{arctg}2\left(\frac{y}{x}\right)$ ↑ θ

(igual que módulo y argumento de los $\mathbb{C}$)

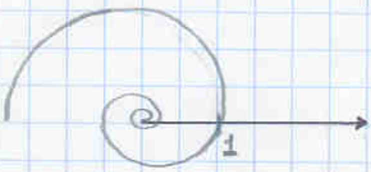
$\rho = \ln\theta$

cada vez crece más lentamente





$\rho = e^{\theta}$



$\rho = \text{sen}\,4\theta$ es acotada, el radio siempre ≤ 1