М. Ш. Бирман, А. Б. Пушницкий

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР В ЛАКУНАХ ВОЗМУЩЕННОГО ПСЕВДОРЕЛЯТИВИСТСКОГО МАГНИТНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Ольге Александровне Ладыженской

Введение

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 2$, рассмотрим магнитный гамильтониан

$$M = \left(\frac{1}{i}\nabla - \mathbf{A}(x)\right)^2 + I, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d \geqslant 2, \tag{0.1}$$

и более общий оператор Шредингера

$$G = M + W(x). \tag{0.2}$$

Точные условия на магнитный вектор-потенциал $\mathbf{A}$ и на электрический потенциал W приводятся ниже. Пусть далее, V – "исчезающий" при $|x| \to \infty$ потенциал возмущения, $V(x) \geqslant 0$ и

$$G_\pm(\alpha) = G \mp \alpha V, \quad \alpha > 0. \tag{0.3}$$

Пусть $\lambda = \bar{\lambda}$ – регулярная точка для G. Обозначим через $N_\pm(\lambda, \alpha; G, V)$ число собственных значений оператора $G_\pm(t)$, прошедших через точку λ при росте *константы связи* t от нуля до α. В работе [3] была получена следующая асимптотика вейлевского типа при $\alpha \to \infty$:

$$N_+(\lambda, \alpha; G, V) \sim (2\pi)^{-d}\omega_d\alpha^{d/2}\int V^{d/2}dx, \quad V \in L_{d/2}(\mathbb{R}^d), \quad d \geqslant 3, \tag{0.4}$$

где

$$\omega_d := \operatorname{vol}\{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |x| < 1\}.$$

Одновременно было показано, что

$$N_-(\lambda, \alpha; G, V) = o(\alpha^{d/2}). \tag{0.5}$$

Существенно, что при этом на вектор-потенциал накладывалось лишь локальное условие $\mathbf{A} \in L_{d,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Здесь мы рассматриваем аналогичный вопрос для псевдорелятивистского магнитного оператора

$$G_{1/2} = M^{1/2} + W(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d \geqslant 2. \tag{0.6}$$

Как и в [3], мы исходим из одной абстрактной теоремы, полученной в [2] (см. ниже теорему 1.1). При проверке ее условий некоторые осложенения (по сравнению со случаем оператора (0.2)) появляются из-за нелокального характера оператора (0.6). Теорема 1.1 позволяет свести вычисление асимптотики к случаю, когда λ лежит левее спектра $G_{1/2}$. Для таких λ уже применима вариационная техника; однако и здесь нелокальный характер оператора (0.6) приводит к дополнительным осложнениям.

Методически нам удобнее рассматривать более общий оператор

$$G_l = M^l + W(x), \quad 0 < l < 1, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d \geqslant 2. \tag{0.7}$$

Попутно мы заново получаем асимптотику (0.4) при несколько более общих предположениях о потенциале $W(x)$ в (0.2).

В существенном мы следуем плану работы [3], в который, впрочем, внесены некоторые упрощения. При исследовании задач с магнитным полем приходится пользоваться понятиями, связанными с *полугруппами, доминируемыми положительными*. Здесь мы опираемся на работы [1] и [5], где имеются ссылки и на другие источники. По поводу материала статьи [5] и близких вопросов мы пользовались консультациями Г. В. Розенблюма; выражаем ему свою искреннюю признательность.

Ниже $|\cdot|$ – стандартная норма в $\mathbb{C}^d$. Символ $\int$ предполагает интегрирование по $\mathbb{R}^d$. Через C, c (возможно, с индексами) обозначаются различные оценочные постоянные. Классы H^s, $\mathring{H}^s$ суть обычные классы Соболева порядка $s > 0$ с гильбертовой метрикой.

§1. Предварительные сведения

1. Ниже $\mathcal{H}$ – комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $\|\cdot\|$ – норма в $\mathcal{H}$. Для самосопряженного в $\mathcal{H}$ оператора B через $\rho(B)$, $\sigma(B)$ обозначаются соответственно его резольвентное множество и спектр. Далее, $E_B(\cdot)$ – спектральная мера для

B, а $2B_\pm := |B| \pm B$. Через $\mathbf{S}_\infty$ обозначается класс всех компактных линейных операторов в $\mathcal{H}$; через $\mathbf{S}_p$, $0 < p < \infty$, – классы Неймана–Шаттена. Для $T \in \mathbf{S}_\infty$ вводится функция распределения s-чисел

$$n(s,T) = \operatorname{card}\{k \mid s_k(T) > s\}, \quad s > 0.$$

Для $T = T^* \in \mathbf{S}_\infty$ полагаем

$$n_\pm(s,T) = n(s,T_\pm).$$

Класс $\mathbf{\Sigma}_p$, $0 < p < \infty$, – множество всех $T \in \mathbf{S}_\infty$, для которых конечен функционал

$$\|T\|^p_{\Sigma_p} := \sup_{s>0} s^p n(s,T),$$

определяющий в $\mathbf{\Sigma}_p$ квазинорму. Пространство $\mathbf{\Sigma}_p$ – несепарабельное; его сепарабельное подпространство, выделяемое условием

$$n(s,T) = o(s^{-p}), \quad s \to +0,$$

обозначается через $\mathbf{\Sigma}^0_p$. Для $T \in \mathbf{S}_\infty$ и $p > 0$ положим

$$\Delta_p(T) = \limsup_{s\to+0} s^p n(s,T),$$
$$\delta_p(T) = \liminf_{s\to+0} s^p n(s,T),$$

а для $T = T^* \in S_\infty$ определим

$$\Delta^{(\pm)}_p(T) = \Delta_p(T_\pm), \quad \delta^{(\pm)}_p(T) = \delta_p(T_\pm).$$

Эти функционалы непрерывны в $\mathbf{\Sigma}_p$. Более того, они определены и непрерывны на фактор-пространстве $\mathbf{\Sigma}_p/\mathbf{\Sigma}^0_p$.

2. Пусть теперь оператор $A = A^* > I$ и a – его квадратичная форма с областью определения $d[a]$. Пусть Z – определенный на $d[a]$ замыкаемый оператор в $\mathcal{H}$ и v – форма

$$v[u,u] = \|Zu\|^2, \quad u \in d[a], \tag{1.1}$$

которая предполагается компактной в гильбертовом пространстве $d[a]$ с метрикой $a[\cdot,\cdot]$. Тогда каждая из форм

$$a_\pm(\alpha) := a \mp \alpha v, \quad \alpha > 0, \quad d[a_\pm(\alpha)] = d[a], \tag{1.2}$$

полуограничена снизу и замкнута. Соответствующие формам (1.2) операторы будем обозначать через $A_\pm(\alpha)$, а также писать

$$A_\pm(\alpha) = A \mp \alpha V, \quad V = Z^* Z.$$

Пусть теперь f_* – неотрицательная форма на $d[a]$ и

$$f_*[u,u] \leqslant \varepsilon a[u,u] + c(\varepsilon)\|u\|^2, \quad \forall \varepsilon \in (0,1], \tag{1.3}$$

а f – вещественная форма на $d[a]$, такая что

$$|f[u,u]| \leqslant f_*[u,u], \quad u \in d[a].$$

Тогда форма

$$b := a + f, \quad d[b] = d[a],$$

полуограничена снизу и замкнута. С ее помощью вводится семейство форм

$$b_\pm(\alpha) = b \mp \alpha v, \quad \alpha > 0,$$

и операторы $B_\pm(\alpha) = B \mp \alpha V$. Следующее утверждение содержится в теореме 1.2 из [2].

Теорема 1.1. *Пусть $\lambda = \bar\lambda \in \rho(A)$, $\mu = \bar\mu \in \rho(B)$ и при некотором $p > 0$ выполнены условия*

$$Z A^{-1/2} \in \mathbf{\Sigma}_{2p}, \tag{1.4}$$

$$Z A^{-1} \in \mathbf{\Sigma}^0_{2p}. \tag{1.5}$$

Тогда (при сделанных в этом пункте предположениях)

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left\{ {\sup \atop \inf} \right\} \alpha^{-p} N_+(\lambda,\alpha; A, V) = \lim_{\alpha\to\infty} \left\{ {\sup \atop \inf} \right\} \alpha^{-p} N_+(\mu,\alpha; B, V), \tag{1.6}$$

$$N_-(\mu,\alpha; B, V) = o(\alpha^p), \quad \alpha \to \infty. \tag{1.7}$$

Смысл соотношения (1.6) в том, что вычисление асимптотических характеристик достаточно выполнить только для оператора A, причем в точке $\lambda = 0$, т.е. левее $\sigma(A)$. Это позволяет использовать вариационную технику.

§2. Формулировки результатов

1. Введем основные объекты. Операторы в $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 2$, ниже определяются через свои квадратичные формы. При этом исходные формы задаются первоначально на классе $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, а затем замыкаются.

Оператор (0.1) вводится через квадратичную форму

$$m[u,u] = \int \left(\left| \left(\frac{1}{i}\nabla - A \right) u \right|^2 + |u|^2 \right) dx, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{A} \in L_{d,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \text{ при } d \geqslant 3; \quad \mathbf{A} \in L_{\sigma,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2),\ \sigma > 1 \text{ при } d = 2. \tag{2.2}$$

Для оператора $M_l := M^l$, $l \in (0,1)$, квадратичная форма есть

$$m_l[u,u] = \|M^{l/2}u\|^2.$$

Операторы M, M_l и формы m, m_l, соответствующие случаю $\mathbf{A} = 0$, обозначим через H^0, H_l^0 и h^0, h_l^0. Далее вводится оператор $H_l := M_l + U$ через форму

$$h_l[u,u] = m_l[u,u] + \int U|u|^2 dx, \quad 0 < l < 1, \tag{2.3}$$

$$U(x) \geqslant 0, \quad U \in L_{\varkappa,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d), \tag{2.4}$$

$$\varkappa := d/2l. \tag{2.5}$$

Наряду с U введем еще вещественный потенциал F, для которого выполнено следующее "неявное" условие:

$$\int |F|\,|u|^2 dx \leqslant \varepsilon h_l^0[u,u] + C(\varepsilon)\|u\|^2, \quad \forall \varepsilon \in (0,1]. \tag{2.6}$$

Ниже (см. замечание 2.2) мы укажем условия, достаточные для справедливости соотношения (2.6). Положим теперь

$$W(x) = U(x) + F(x) \tag{2.7}$$

и введем оператор G_l вида (0.7) с помощью формы

$$g_l[u,u] = h_l[u,u] + \int F|u|^2 dx = m_l[u,u] + \int W|u|^2 dx.$$

2. Пусть теперь потенциал возмущения V удовлетворяет условиям

$$V(x) \geqslant 0, \quad V \in L_{\varkappa}(\mathbb{R}^d), \quad d \geqslant 2, \quad 0 < l < 1.$$

Обозначим $Z = V^{1/2}$ и рассмотрим форму v вида (1.1), а также формы

$$m_{l,\pm}(\alpha) = m_l \mp \alpha v, \quad h_{l,\pm}(\alpha) = h_l \mp \alpha v, \quad \alpha > 0, \tag{2.8}$$

$$g_{l,\pm}(\alpha) = g_l \mp \alpha v, \quad \alpha > 0. \tag{2.9}$$

Формы (2.8), (2.9) определяют собой операторы

$$M_{l,\pm}(\alpha) = M_l \mp \alpha V, \quad H_{l,\pm}(\alpha) = H_l \mp \alpha V, \quad \alpha > 0,$$
$$G_{l,\pm}(\alpha) = G_l \mp \alpha V = M_l + U + F \mp \alpha V, \quad \alpha > 0.$$

Наш основной результат – следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $d \geqslant 2$, $l \in (0,1)$. При сделанных выше предположениях о потенциалах $\mathbf{A}$, U, F, V для любого $\lambda = \bar{\lambda} \in \rho(G_l)$ справедливы соотношения*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-\varkappa} N_+(\lambda, \alpha; G_l, V) = (2\pi)^{-d} \omega_d \int V^{\varkappa} dx, \tag{2.10}$$

$$N_-(\lambda, \alpha; G_l, V) = o(\alpha^{\varkappa}), \tag{2.11}$$

где показатель $\varkappa$ определен в (2.5).

Замечание 2.2. Приведем элементарные достаточные условия, обеспечивающие (2.6). Легко вывести (2.6) из следующего соотношения:

$$\int |F|^{1/l} |u|^2 dx \leqslant \varepsilon \int (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx + c(\varepsilon) \|u\|^2, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1]. \tag{2.12}$$

Далее, пусть $\mathbb{Q}^d$ – единичный куб в $\mathbb{R}^d$, и выполнено условие

$$\lim_{|y| \to \infty} \int\limits_{\mathbb{Q}^d + y} |F|^{\varkappa} dx = 0, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad d \geqslant 3. \tag{2.13}$$

Тогда справедливо (2.12), а значит, и (2.6). Близкое, но несколько иное условие пригодно для $d \geqslant 2$. Именно, (2.12) выполнено, если

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{Q}^d + y} |F|^r dx < \infty, \quad r > \varkappa, \quad d \geqslant 2. \tag{2.14}$$

3. Случай оператора (0.3) формально отвечает значению $l = 1$. Однако теперь приходится считать $d \geqslant 3$; пояснения на этот счет см. в замечании 3.2. В остальном, соображения, использованные при доказательстве теоремы 2.1, сохраняют силу при $l = 1$, причем со значительными упрощениями. Таким образом получается

Теорема 2.3. *Пусть $d \geqslant 3$ и потенциалы $\mathbf{A}$, U, V удовлетворяют условиям*

$$\mathbf{A} \in L_{d,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d), \quad 0 \leqslant U \in L_{d/2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d), \quad 0 \leqslant V \in L_{d/2}(\mathbb{R}^d),$$

а для F выполнено соотношение (2.12) *при $l = 1$. Пусть операторы G, $G_\pm(\alpha)$ определены в* (0.1)–(0.3), (2.7) *и пусть $\lambda = \bar{\lambda} \in \rho(G)$. Тогда справедливы формулы* (0.4), (0.5).

При $U = 0$ эта теорема переходит в теорему 1.1 из [3]. Такое обобщение нельзя считать сколько-нибудь глубоким, но оно может оказаться полезным.

Замечание 2.4. Условие (2.12) при $l = 1$ обеспечивается любым из условий (2.13), (2.14) при $\varkappa = d/2$, $d \geqslant 3$.

§3. Подготовительные предложения

1. Доказательство теоремы 2.1 опирается на теорему 1.1 (при $p = \varkappa$). Роли операторов A, B сейчас играют H_l, G_l; формы f, f_* и v суть соответственно

$$\int F|u|^2 dx, \quad \int |F|\,|u|^2 dx, \quad v[u,u] = \int V|u|^2 dx = \|Zu\|^2;$$

оператор $Z = V^{1/2}$ – оператор умножения. Надлежит проверить условия (1.4), (1.5), (1.3). Отметим прежде всего следующее предложение, которое очевидным образом вытекает (в силу неравенства $U(x) \geqslant 0$) из вариационных соображений.

Предложение 3.1. *Условия* (1.4), (1.5), (1.3) *выполнены при $A = H_l$, если они выполнены при $A = M_l$.*

2. Приступим к проверке условий (1.4), (1.5), (1.3) для $A = M_l$ и $p = \varkappa$. Сначала установим (1.4). Полугруппа $\exp(-tH^0)$ *доминирует* (см. [5]) полугруппу $\exp(-tM)$. Это означает, что *поточечно* (почти всюду)

$$|(e^{-tM}z)(x)| \leqslant (e^{-tH^0}|z|)(x), \quad t > 0, \quad z \in L_2(\mathbb{R}^d),\ d \geqslant 2. \qquad (3.1)$$

Из (3.1) следует (см. [4] или [5, п. 2.4]), что при $l \in (0,1)$

$$|(e^{-tM_l}z)(x)| \leqslant (e^{-tH_l^0}|z|)(x), \quad t>0, \quad z \in L_2(\mathbb{R}^d),\ d \geqslant 2. \tag{3.2}$$

Соотношение (3.2) вместе с явным выражением для ядра $Q_l^0(t;x,y)$ интегрального оператора $\exp(-tH_l^0)$ позволяет воспользоваться теоремой 2.4 из [5], что приводит к оценке

$$\dim \operatorname{Ran} E_{M_l-\alpha V}(-\infty,0) \leqslant C(d,l)\alpha^{\varkappa}\int V^{\varkappa}dx, \qquad \alpha>0,\ d\geqslant 2,\ l\in(0,1). \tag{3.3}$$

Существенно, что постоянная в (3.3) не зависит от потенциала $\mathbf{A}(x)$. Как известно,

$$\dim \operatorname{Ran} E_{M_l-\alpha V}(-\infty,0) = n(\alpha^{-1}, ZM_l^{-1}Z) = n(\alpha^{-1/2}, ZM_l^{-1/2}),$$

а потому (3.3) равносильно оценке

$$\|ZM_l^{-1}Z\|_{\varkappa}^{\varkappa} = \|ZM_l^{-1/2}\|_{2\varkappa}^{2\varkappa} \leqslant C(d,l)\int V^{\varkappa}dx, \quad d\geqslant 2,\ l\in(0,1). \tag{3.4}$$

Таким образом, (1.4) *выполнено при* $A = M_l$.

Замечание 3.2. 1) Псевдорелятивистский магнитный оператор обсуждается в [5, п. 3.4]. Там получена оценка для $\dim \operatorname{Ran} E_\Gamma(-\infty,0)$, где $\Gamma = (M_{1/2}-I)-\alpha V$ и $d\geqslant 3$. Этот случай более сложен, чем оценка (3.3); в правую часть оценки входит $\int(V^d+V^{d/2})dx$.

2) При $l=1$ оценка (3.4) сохраняет силу, но только при $d\geqslant 3$. В этом случае она является следствием принадлежащего Либу “магнитного варианта” известной оценки Цвикеля–Либа–Розенблюма (см. [5]). Именно отсутствие оценки (3.3) при $l=1$, $d=2$ приводит к требованию $d\geqslant 3$ в теореме 2.3.

3. Установим теперь (1.5) при $A=M_l$. В силу (3.4), достаточно установить (1.5) для какого-либо плотного в $L_\varkappa(\mathbb{R}^d)$ множества функций V. Будем считать, что

$$V \in L_\varkappa(\mathbb{R}^d)\cap L_1(\mathbb{R}^d), \quad d\geqslant 2.$$

Тогда, очевидно,

$$Z\exp(-H_l^0) \in \mathbf{S}_2. \tag{3.5}$$

Ядро $Q_l(t;x,y)$ интегрального оператора $\exp(-tM_l)$ мажорируется (см. [5, п. 2.4]) ядром Q_l^0:

$$|Q_l(t;x,y)| \leqslant Q_l^0(t;x,y), \quad t>0, \text{ п.в. } x,y \in \mathbb{R}^d.$$

Отсюда и из (3.5) следует, что

$$Z\exp(-M_l) \in \mathbf{S}_2,$$

а следовательно, при любом $R>0$

$$Y_l(R) := Z\, M_l^{-1} E_{M_l}(0,R) = \\ = Z\exp(-M_l)((\exp M_l)E_{M_l}(0,R)M_l^{-1}) \in \mathbf{S}_2 \subset \mathbf{\Sigma}^0_{2\varkappa}. \quad (3.6)$$

С другой стороны,

$$Y_l(R) = (ZM_l^{-1/2})(M_l^{-1/2}E_{M_l}(0,R)) \overset{\mathbf{\Sigma}_{2\varkappa}}{\to} ZM_l^{-1}; \quad (3.7)$$

это следует из (3.4) и того, что при $R\to\infty$

$$\|M_l^{-1/2}E_{M_l}(R,\infty)\| \to 0.$$

Соотношения (3.6), (3.7) *приводят к* (1.5) *для* $A=M_l$.

4. Осталось проверить (1.3) для $A=M_l$, т.е. установить оценку

$$\int |F|\,|u|^2dx \leqslant \varepsilon m_l[u,u] + C(\varepsilon)\|u\|^2, \quad \forall\varepsilon\in(0,1]. \quad (3.8)$$

Пусть $\gamma\geqslant 0$. Отметим, что соотношения (3.1), (3.2) сохранят силу, если в них заменить M_l и H_l^0 соответственно на $M_l+\gamma I$ и $H_l^0+\gamma I$. Умножая затем (3.2) на $t^{-1/2}$ и интегрируя по полуоси $\mathbb{R}_+$, получим неравенство

$$|(M_l+\gamma I)^{-1/2}z|(x) \leqslant ((H_l^0+\gamma I)^{-1/2}z)(x), \ z\in L_2(\mathbb{R}^d), \ d\geqslant 2, \ l\in(0,1). \quad (3.9)$$

Отсюда вытекает

Предложение 3.3. *Пусть* $\varphi(x)\geqslant 0$ *– измеримая функция. Тогда при* $\gamma\geqslant 0$

$$\|\varphi(M_l+\gamma I)^{-1/2}\| \leqslant \|\varphi(H_l^0+\gamma I)^{-1/2}\|, \quad d\geqslant 2, \ l\in(0,1). \quad (3.10)$$

Действительно, из (3.9) следует, что для $z\in L_2(\mathbb{R}^d)$

$$\|\varphi(M_l+\gamma I)^{-1/2}z\| \leqslant \|\varphi(H_l^0+\gamma I)^{-1/2}|z|\,\| \leqslant \|\varphi(H_l^0+\gamma I)^{-1/2}\|\,\|z\|,$$

что и приводит к (3.10). •

Заметим теперь, что величина $\|\varphi(M_l+\gamma I)^{-1/2}\|^2$ совпадает с наилучшей постоянной C в оценке

$$\|\varphi u\|^2 \leqslant C(m_l[u,u]+\gamma\|u\|^2). \tag{3.11}$$

Отсюда и из (3.10) видно, что (3.11) выполнено, коль скоро

$$\|\varphi u\|^2 \leqslant C(h_l^0[u,u]+\gamma\|u\|^2), \tag{3.12}$$

причем постоянная C в (3.11), (3.12) – одна и та же. Сказанное означает, что (3.8) является следствием неравенства (2.6). Итак, (1.3) выполнено для $A=M_l$.

Отметим, что рассуждения в этом пункте в значительной мере следуют работе [1] (см. теоремы 2.4, 2.5 в [1]).

§4. Завершение доказательства теоремы 2.1

1. Объединяя результаты §3 с теоремой 1.1 (при $p=\varkappa$), видим, что (2.11) уже установлено (что следует из (1.7)), а (2.10) достаточно доказать для H_l вместо G_l (т.е. при $F=0$) и при $\lambda=0$. Так как $H_l\geqslant M_l\geqslant I$, то точка $\lambda=0$ находится левее $\sigma(M_l)$ и, тем более, левее $\sigma(H_l)$. Но тогда $N_+(0,\alpha;H_l,V)$ совпадает с числом отрицательных собственных значений оператора $H_l-\alpha V$, $\alpha>0$.

Рассмотрим задачу о последовательных максимумах отношения квадратичных форм

$$\int V|u|^2dx/h_l[u,u], \quad u\in d[h_l]. \tag{4.1}$$

(Напомним, что форма h_l определена в (2.3)). Последовательные максимумы отношения (4.1) совпадают со спектром компактного оператора $X>0$, который порождается формой числителя в гильбертовом пространстве $d[h_l]$ с метрикой $h_l[\cdot,\cdot]$. Вариационный подход к вычислению асимптотики $N_+(0,\alpha;H_l,V)$ основан на известном соотношении

$$N_+(0,\alpha;H_l,V)=n(s,X), \quad \alpha s=1. \tag{4.2}$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями типа $n(s,(4.1))$ вместо $n(s,X)$; аналогично будем писать $\Delta_p((4.1))$ вместо $\Delta_p(X)$

и т.п. Таким образом, в силу (4.2), доказательство асимптотической формулы (2.10) сводится к проверке равенств

$$\Delta_\varkappa((4.1)) = \delta_\varkappa((4.1)) = (2\pi)^{-d}\omega_d \int V^d dx. \tag{4.3}$$

Наряду с (4.1) рассмотрим отношение

$$\int V|u|^2 dx / m_l[u,u], \quad u \in d[m_l], \tag{4.4}$$

и для него установим равенство

$$\Delta_\varkappa((4.4)) = \delta_\varkappa((4.4)) = (2\pi)^{-d}\omega_d \int V^\varkappa dx. \tag{4.5}$$

После этого получить (4.3) уже несложно.

В силу оценки (3.4) достаточно установить соотношение (4.5) для какого-либо $L_\varkappa$-плотного множества неотрицательных потенциалов V. Мы установим (4.5) для потенциалов, постоянных на кубах Q_k, образующих конечный набор $\{Q_k\}_{k=1}^L$: $V(x) = V_k > 0$, $x \in Q_k$. Мы предполагаем, что кубы попарно не пересекаются и $V(x) \equiv 0$, если $x \in Q_0 := \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^L \bar{Q}_k\right)$. В этих предположениях удается использовать “вилку Дирихле–Неймана”, обходя трудности, связанные с нелокальностью оператора M_l.

2. Нижние асимптотические оценки для (4.4). Сузим область определения формы m (см. (2.1)), введя дополнительные граничные условия

$$u\big|_{\partial Q_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, L,$$

и получившуюся замкнутую форму обозначим $\check{m}$. Соответствующий ей оператор $\check{M}$, очевидно, есть ортогональная сумма операторов $\check{M}^{(k)}$, каждый из которых действует в $L_2(Q_k)$, $k = 0, \dots, L$:

$$\check{M} = \sum_{k=0}^L \oplus \check{M}^{(k)}. \tag{4.6}$$

Введем, далее, оператор

$$\check{M}_l := (\check{M})^l = \sum_{k=0}^L \oplus (\check{M}^{(k)})^l =: \sum_{k=0}^L \oplus \check{M}_l^{(k)}. \tag{4.7}$$

Операторам $\check{M}_l$, $\check{M}_l^{(k)}$ соответствуют квадратичные формы

$$\check{m}_l[u,u] = \|\check{M}_{l/2}u\|^2, \quad \check{m}_l^{(k)}[u,u] = \|\check{M}_{l/2}^{(k)}u\|^2_{L_2(Q_k)}. \tag{4.8}$$

При этом

$$\check{m}_l = \sum_{k=0}^{L} \oplus \check{m}_l^{(k)}, \quad l \in (0,1). \tag{4.9}$$

Поскольку $M < \check{M}$, то из неравенства Гайнца следует, что $M_l < \check{M}_l$. Поэтому спектр отношения

$$\int V|u|^2 dx / \check{m}_l[u,u], \quad l \in (0,1), \tag{4.10}$$

дает нижнюю оценку для спектра отношения (4.4). Используя (4.9), а также соглашение о свойствах V, находим, что (4.10) распадается в ортогональную сумму отношений

$$V_k \int_{Q_k} |u|^2 dx / \check{m}_l^{(k)}[u,u], \quad k = 1, \dots, L, \tag{4.11k}$$

и нулевого отношения, соответствующего $k = 0$. В силу (4.8), (4.9)

$$n(s,(4.10)) = \sum_{k=1}^{L} n(s,(4.11k)), \tag{4.12}$$

$$n(s,(4.11\mathrm{k})) = n(sV_k^{-1}, (\check{M}^{(k)})^{-l}) = n((sV_k^{-1})^{1/l}, (\check{M}^{(k)})^{-1}). \tag{4.13k}$$

Спектр оператора $(\check{M}^{(k)})^{-1}$ есть спектр отношения

$$\int_{Q_k} |u|^2 dx \Big/ \int_{Q_k} \left(\left| \left(\frac{1}{i}\nabla - \mathbf{A} \right) u \right|^2 + |u|^2 \right) dx, \quad u \in \mathring{H}^1(Q_k). \tag{4.14k}$$

Без изменения функционалов $\delta_{d/2}$, $\Delta_{d/2}$ в знаменателе (4.14k) можно убрать члены, содержащие $\mathbf{A}$, поскольку, в силу условия (2.2), эти члены порождают формы, компактные в $H^1(Q_k)$. Таким образом, дело сводится к спектру отношения

$$\int_{Q_k} |u|^2 dx \Big/ \int_{Q_k} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx, \quad u \in \mathring{H}^1(Q_k). \tag{4.15k}$$

Как хорошо известно,

$$\Delta_{d/2}((4.15\mathrm{k})) = \delta_{d/2}((4.15\mathrm{k})) = (2\pi)^{-d}\omega_d \operatorname{mes} Q_k. \tag{4.16k}$$

В итоге получаем

$$\Delta_{d/2}((4.14\mathrm{k})) = \delta_{d/2}((4.14\mathrm{k})) = (2\pi)^{-d}\omega_d \operatorname{mes} Q_k,$$

и простой пересчет на основании (4.13k) и (4.12) дает

$$\Delta_\varkappa((4.10)) = \delta_\varkappa((4.10)) = (2\pi)^{-d}\omega_d \int V^\varkappa dx, \tag{4.17}$$

а потому

$$\delta_\varkappa((4.4)) \geqslant (2\pi)^{-d}\omega_d \int V^\varkappa dx. \tag{4.18}$$

3. Верхние асимптотические оценки для (4.4). Здесь все делается по схеме предыдущего пункта, но область определения формы m расширяется. Именно, функции из $d[m]$ лежат в $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$; это условие мы ослабим, требуя лишь

$$u\big|_{Q_k} \in H^1(Q_k), \quad k = 1, \dots, L;$$

кроме того, считаем, что $u\big|_{Q_0}$ совпадает с сужением на Q_0 какой-либо функции из $d[m]$. Аналитическое выражение для расширенной формы (обозначим ее $\hat{m}$) по-прежнему дается интегралом (2.1). Оператор, порожденный формой $\hat{m}$, обозначим $\hat{M}$ и отметим, что $\hat{M} < M$ и $\hat{M}_l := (\hat{M})^l < M_l$. Справедливы ортогональные разложения, аналогичные (4.6), (4.7). Далее вводятся формы $\hat{m}_l$, $\hat{m}_l^{(k)}$ по аналогии с (4.8) и рассматривается отношение

$$\int V|u|^2 dx / \hat{m}_l[u,u], \quad l \in (0,1). \tag{4.19}$$

Ясно, что спектр отношения (4.19) дает оценку сверху для спектра отношения (4.4). Остальные рассуждения также повторяют доводы п. 4.2 с очевидными изменениями. Дело сводится к асимптотике спектра отношения вида (4.15k), но теперь для всех функций $u \in H^1(Q_k)$. Асимптотика – та же, что и в (4.16k). В итоге оказывается, что

$$\Delta_\varkappa((4.19)) = \delta_\varkappa((4.19)) = (2\pi)^{-d}\omega_d \int V^\varkappa dx,$$

и следовательно,

$$\Delta_\varkappa((4.4)) \leqslant (2\pi)^{-d}\omega_d \int V^\varkappa dx. \tag{4.20}$$

Неравенства (4.18), (4.20) приводят к (4.5).

4. Нам осталось, опираясь на (4.5), получить (4.3). Поскольку $U(x) \geqslant 0$, то справедливо неравенство $n(s,(4.1)) \leqslant n(s,(4.4))$, а потому

$$\Delta_\varkappa((4.1)) \leqslant (2\pi)^{-d}\omega_d \int V^\varkappa dx. \tag{4.21}$$

Установим теперь нижнюю оценку. В силу предложения 3.1 оценка (3.4) переносится на оператор H_l, а потому достаточно рассмотреть тот же класс потенциалов V, что и в пп. 4.2, 4.3. Будем пользоваться обозначениями п. 4.2. Очевидно, мы получим нижнюю оценку для спектра отношения (4.1), если заменим его отношением

$$\int V|u|^2 dx/(\check{m}_l[u,u] + \int U|u|^2 dx), \quad u \in d[\check{m}_l]. \tag{4.22}$$

Это отношение распадается (ср. с (4.9)) в ортогональную сумму нуля и отношений

$$V_k \int_{Q_k} |u|^2 dx\big/\big(\check{m}_l^{(k)}[u,u] + \int_{Q_k} U|u|^2 dx\big), \quad k = 1, \dots, L. \tag{4.23k}$$

Воспользуемся теперь следующим простым утверждением.

Предложение 4.1. *Для отношения форм*

$$\int_{Q_k} U|u|^2 dx/\check{m}_l^{(k)}[u,u] \tag{4.24k}$$

выполнено

$$\Delta_\varkappa((4.24\mathrm{k})) < \infty, \quad k = 1, \dots, L. \tag{4.25k}$$

Доказательство. Пусть U_k – продолжение нулем функции $U\big|_{Q_k}$ на $\mathbb{R}^d \setminus Q_k$. Ясно, что отношение (4.24k) есть сужение отношения

$$\int U_k|u|^2 dx/\check{m}_l[u,u], \tag{4.26k}$$

а потому $n(s,(4.24\mathrm{k})) \leqslant n(s,(4.26\mathrm{k}))$. Далее, спектр отношения

$$\int U_k|u|^2 dx/m_l[u,u] \tag{4.27k}$$

дает оценку сверху для спектра отношения (4.26k), откуда получаем: $n(s,(4.24\mathrm{k})) \leqslant n(s,(4.27\mathrm{k}))$. В силу (2.4) справедливо включение $U_k \in L_\varkappa(\mathbb{R}^d)$. Поэтому, в соответствии с (4.5), находим, что $\Delta_\varkappa((4.27\mathrm{k})) < \infty$, а тогда верно и (4.25k). •

Соотношения (4.25) показывают, в частности, что форма в числителе (4.24k) компактна относительно формы знаменателя. Отсюда следует, что

$$\delta_\varkappa((4.23\mathrm{k})) = \delta_\varkappa((4.11\mathrm{k})), \quad k = 1, \dots, L,$$

а тогда, с учетом (4.17),

$$\delta_\varkappa((4.22)) = \delta_\varkappa((4.10)) = (2\pi)^{-d}\omega_d \int V^\varkappa(x)dx.$$

Следовательно,

$$\delta_\varkappa((4.1)) \geqslant \delta_\varkappa((4.22)) = (2\pi)^{-d}\omega_d \int V^\varkappa(x)dx.$$

Вместе с (4.21) это дает (4.3). Теорема 2.1 доказана.

Замечание 4.2. Условие (2.4) использовалось только при доказательстве соотношения (4.25). Однако фактически мы пользовались лишь компактностью числителя в (4.24k) относительно знаменателя. Это дает возможность несколько ослабить условие (2.3), но в L_p-терминах уменьшить показатель $p = \varkappa$ нельзя. Аналогичное замечание верно и относительно условий (2.2) на вектор-потенциал $\mathbf{A}(x)$. Мы не будем здесь входить в подробности.

Литература

1. J. Avron, I. Herbst, B. Simon, *Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions.* — Duke Math. J. **45, No. 4** (1978), 847–883.
2. M. Sh. Birman, *Discrete spectrum in the gaps of a continuous one for perturbations with large coupling constant.* — Adv. in Soviet Math. **7** (1991), 57–73.
3. M. Sh. Birman, G. D. Raikov, *Discrete spectrum in the gaps for perturbations of the magnetic Schrödinger operators.* — Adv. in Soviet Math. **7** (1991), 75–84.

4. O. Bratteli, A. Kishimoto, D. Robinson, *Positive and monotonicity properties of C_0-semigroups, I.* — Commun. Math. Phys. **75** (1980), 67–84.
5. Г. Розенблюм, М. Соломяк, *Оценка ЦЛР для генераторов положительных полугрупп и полугрупп, доминируемых положительными.* — Алгебра и Анализ **9**, № 6 (1997), 214–236.

Birman M. Sh., Pushnitskii A. B. Discrete spectrum in the gaps of perturbed pseudorelativistic Hamiltonian.

Pseudorelativistic Hamiltonian

$$G_{1/2} = ((-i\nabla - \mathbf{A})^2 + I)^{1/2} + W, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d \geqslant 2,$$

is considered under wide conditions on potentials $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $W(x)$. It is assumed that the real point λ is regular for $G_{1/2}$. Let $G_{1/2}(\alpha) = G_{1/2} - \alpha V$, where $\alpha > 0$, $V(x) \geqslant 0$, $V \in L_d(\mathbb{R}^d)$. Denote by $N(\lambda, \alpha)$ the number of eigenvalues of $G_{1/2}(t)$ that cross the point λ as t increases from 0 to α. The Weyl type asymptotics for $N(\lambda, \alpha)$ as $\alpha \to \infty$ is obtained.

Санкт-Петербургский
Государственный университет

Поступило 4 сентября 1997 г.